学位論文要旨

Generalized Cousin-I condition and intermediate pseudoconvexity in a Stein manifold
（Stein 多様体での一般化された Cousin-I 条件と中間的擬凸性）

氏名　杉山　俊

中間的擬凸性と呼ばれるべき擬凸性を一般化した概念がある．これには二つの側面があると考えられる．一つめは，滑らかな強多重劣調和関数の一般化に当たる q-convex 関数により定まる中間的擬凸性である．例えば，Andreotti–Grauert の高次コホモロジー消滅定理 (1962), Diederich–Fornæss の近似定理 (1985) などの研究があり，これらは中間的な擬凸性の研究の一つの到達点と考えることができる．一方で，Tadokoro (1965), Fujita (1990), Matsumoto (1989) らが研究した連続性原理から派生した中間的擬凸性もある．それぞれの研究を総合すると，擬凸性と中間的擬凸性は，$\mathbb{C}^n$ 内の部分領域に限定しても，状況が異なっているということがわかってくる．つまり，擬凸性が持つ連続性原理から，滑らかな強多重劣調和階位関数を構成できる一方で，中間的な連続性原理から，空間全体で定義された q-convex な階位関数は構成できない，という事実に出くわすことになったのである (Eastwood–Vigna Suria (1980), Diederich–Fornæss (1985) 参照)．滑らかな強多重劣調和階位関数の存在が中核となって，コホモロジー群の消滅定理が得られることを思い起こせば，この事実は，中間的な連続性原理と，コホモロジー群の代数的条件とを結びつけることの困難さを語っている．この問題を中心的に取り扱ったものとしては，前述した Andreotti–Grauert (1963) や Eastwood–Vigna Suria (1980), Watanabe (1993), Vâjâitu (1994) などが挙げられる．この論文では，この高次コホモロジーと中間的な連続性原理の関係を考察の対象にする．中間的な連続性原理は，q-convex 性や q-complete 性と比較した際，空間を捉える条件として弱い条件である．従って，高次コホモロジーの消滅条件よりもさらに弱い仮定のもとで，制御できる可能性がある．そこで，Cartan-Behnke-Stein の定理 (1934,1937) と $H^1(D,\mathcal{O}) \to H^1(D,\mathcal{M})$ の単射性に注目し，高次コホモロジーの場合を考察した．具体的には，次の主定理を証明をする．

定理. n を 2 以上の自然数, X を n 次元 Stein 多様体, D を X 内の領域とする．このとき, $H^{n-1}(D,\mathcal{O}) \to H^{n-1}(D,\mathcal{M})$ が単射ならば, D は pseudoconvex of order 1 である．

この主定理における $H^{n-1}(D,\mathcal{O}) \to H^{n-1}(D,\mathcal{M})$ の単射性というのが Cousin-I 条件の高次化にあたる．さらに，主定理における $n=2$ の場合が，前述の Cartan-Behnke-Stein の定理 (1934,1937) にあたる．この主定理を証明するために，q 次の Hartogs 図形を用いた，中間的擬凸性の特徴付けの補題を用意する．

補題. D を $\mathbb{C}^n$ 内の領域とし, $1 \le q \le n-1$, $b, c \in (0,1)$, $\mathsf{H}_q = \{(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{n-q}\ ;\ |\zeta_1| < 1,\ |\zeta_2| < b\} \cup \{(\zeta_1,\zeta_2) \in \mathbb{C}^q \times \mathbb{C}^{n-q}\ ;\ c < |\zeta_1| < 1,\ |\zeta_2| < 1\}$ とおく．このとき，次は同値である．

(1) D は pseudoconvex of order $n-q$ である．

(2) $\varphi = (\varphi_1,\dots,\varphi_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, (z_1,\dots,z_n) \mapsto (w_1,\dots,w_n)$, は双正則写像で以下の条件を満たす．

- $\varphi(\mathsf{H}_q) \subset D.$

- φ と φ^{-1} の各成分は以下の表示を持つ．
  $\varphi_j(z_1,\ldots,z_n) = P_j(z_1,\ldots,z_n)$,　$(\varphi^{-1})_j(w_1,\ldots,w_n) = Q_j(w_1,\ldots,w_n)$.
  ただし，$P_j(z_1,\ldots,z_n)$, $Q_j(w_1,\ldots,w_n)$ は 2 次以下の多項式である．

このとき，$\varphi(\mathsf{P}^n(0,1)) \subset D$ が成立する．ただし，$\mathsf{P}^n(0,1)$ は単位多重円板である．

主定理は，次のように証明される．領域 D が pseudoconvex of order 1 ではないとすると，中間的擬凸性の特徴付けの補題により，D のある境界点を含む近傍 U 上で，局所的に $\mathbb{C}^n$ 内の開集合と解析同型となるような大域正則写像 $\phi : X \to \mathbb{C}^n$ が取れ，$\mathsf{H}_{n-1} \subset \phi(U \cap D)$ かつ $\mathsf{P}^n(0,1) \subset \phi(U)$ かつ $a \notin \phi(U \cap D)$ となる点 $a \in \mathsf{P}^n(0,1)$ が取れる．ただし，H_{n-1} は $n-1$ 次の Hartogs 図形である．この点 a を中心にして，コホモロジー群を計算できる D の開被覆 $\mathcal{U}$ を構成する．このアイデアは，Kajiwara–Kazama (1973) によるものである．この開被覆 $\mathcal{U}$ に対応して，擬似的な有理式 f が定まる．Stein 多様体 X には，大域的な座標があるとは限らないので，多項式を考えることはできない．代わりに，大域的な正則関数の分数関数で代用をした関数を考えるために擬似的と表現したのである．この擬似的な有理式 f の表示と $H^{n-1}(D,\mathcal{O}) \to H^{n-1}(D,\mathcal{M})$ の単射性を用いることで，$\mathbb{C}^n$ 内の H_{n-1} 上で，分数関数 $g = 1/(z_1 \cdots z_n)$ の正則関数での局所分解を得て，$H^{n-1}(\mathsf{H}_{n-1},\mathcal{O})$ 上で g は自明になる．これは初等的な Hartogs の接続定理に矛盾する．このようにして，主定理は完結する．

加えて，この論法は，より一般の場合に拡張が可能である．それには，Abe (2011) の高次コホモロジーの具体的な計算が必要不可欠である．この計算を用いることで，高次コホモロジーの元の次数を中間的擬凸性と対応した次数まで引き下げていくことができる．この手法により，次の定理が証明できる．

定理． X を n 次元 Stein 多様体, D を X 内の領域とし，q は $1 \le q \le n$ を満たす自然数とする．領域 D は，$H^{n-1}(D,\mathcal{O}) \to H^{n-1}(D,\mathcal{M})$ が単射かつ $H^k(D,\mathcal{O}) = 0$ $(k = q,\ldots,n-2)$ を満たすとする．このとき，D は pseudoconvex of order $n-q$ である．

この定理の証明により，Eastwood–Vigna Suria (1980) の別証明が得られたことになる．これは既存の証明方法をより簡明にするものであり，中間的擬凸性の特徴付けの有用性を示すものとなっている．