学位論文要旨

Non summability of formal solutions of certain partial differential equations (ある偏微分方程式の形式解の非総和可能性)

氏名　黒木 健司

私は偏微分方程式の非総和可能性について研究を行いその結果を学位論文として作成した．偏微分方程式の総和可能性についてはLutz-Miyake-Schäfke[2], Tahara-Yamazawa[3] など, 数多くの研究がされている．一方, 非総和可能性という点における研究はあまり行われておらず, 発表されている結果も少ない．この点が私が偏微分方程式の非総和可能性について研究を行うこととなった動機の一つである．始めに私は Tahara-Yamazawa[3] の結果と関連付けた研究を行い, [3] で与えられているある条件を満たさない場合に発散形式ベキ級数解が任意の方向で総和可能とならない方程式が存在することを示した [1]. その後, より広い方程式に対して [1] と同様の結果を得ることができないのかという動機で非総和可能性について研究を行い, 得られた結果を論文として発表した [4]. 本学位論文は [1] と [4] の 2 つの結果から構成されており, その目的はある 2 つの Cauchy 問題について非総和可能性を考え, 発散形式ベキ級数解が任意の方向で総和可能とならない非斉次項が存在することを示すということである．

以降, $(t,x) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ とする．また $n, k \in \mathbb{N}^*(\mathbb{N}^* = \{1,2,3,\dots\})$ とし, $j = 1,2,\dots,n$ に対し $\alpha_{i,j} \in \mathbb{C}$ とし ξ についての多項式 $P_j(\xi)$ を $P_j(\xi) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,j}\xi^i$ と定義する．さらに, $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ を $\sum_{m=1}^{\infty} |C_m| < \infty$ となる数列, $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ を有界な複素数列とし, $a(x)$ を

$$a(x) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{h_m x}. \tag{1.1}$$

と定義する．
本学位論文では第一に, 次の Cauchy 問題を考える．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u = a(x)t + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(t^2 \frac{\partial}{\partial t}\right)^j \frac{\partial}{\partial t} P_j(\partial_x)u \\ u(0,x) = 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

ここで, (1.2) はある開円板の内部で正則でかつ境界まで込めて連続な関数を係数関数に持つ t についての形式ベキ級数

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)t^n \tag{1.3}$$

を解に持つことがわかる．この時, 次の定理が得られる．

Theorem 1.1. $\alpha_{k,1} \neq 0$ を仮定する. その時, (1.1) で与えられている $a(x)$ に対し, (1.2) のすべての形式ベキ級数解 (1.3) が任意の方向で 1-summable とならない有界な数列 $\{h_m\}_{m=1}^{\infty}$ が存在する.

第二に, 次の Cauchy 問題を考える.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}u(t,x) = a(x) + \left(t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2 u(t,x) + \left(t\dfrac{\partial}{\partial t}\right)^2 \partial_x^{\alpha} u(t,x) \\ u(0,x) = \varphi_0(x). \end{cases} \tag{1.4}$$

ここで $\alpha \in \mathbb{N}^*$, そして $\varphi_0(x)$ は整函数であるとする. (1.2) と同様に (1.4) も t についての形式ベキ級数解 (1.3) を持つことがわかる. この時, 次の定理が成り立つ.

Theorem 1.2. (1.1) で与えられている $a(x)$ に対し, (1.4) の任意の形式ベキ級数解 (1.3) が任意の方向で 1-summable とならない有界な数列 $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する.

定理 1.2 は [3] で与えられている 1-summability のある十分条件を満たさない場合に, 非総和可能となる偏微分方程式の例を与えている.
また, 定理 1.2 の証明において次が証明の鍵である.
$n \in \mathbb{N}^*$ とし $q \in \mathbb{N}^*$ は $q(q-1)/2 < n \leq q(q+1)/2$ を満たすとする. $\nu = n - q(q-1)/2$ とし, h_n を次のように定める.

$$\frac{1}{1+h_n^{\alpha}} = \Big(1 - \frac{1}{q+1}\Big) e^{\frac{2\pi i \nu}{q+1}},$$

ここで α は (1.4) で与えられた自然数である. この h_n が定理 1.2 を満たす有界数列となっていることを証明する事が方針となっている.
また学位論文では定理 1.1 と定理 1.2 を証明するために, 形式ベキ級数解の Gevrey 評価に関する 2 つの命題を与えている.

References

[1] K. Kurogi, Counterexample to the 1-Summability of a Divergent Formal Solution to Some Linear Partial Differential Equations, Funkcial Ekvac., 61(2018), 219-227.

[2] D. A. Lutz, M. Miyake and R. Schäfke, On the summability of divergent solutions of the heat equation, Nagoya Math. J., 154(1999), 1-29.

[3] H. Tahara and H. Yamazawa, Multisummability of formal solutions to the Cauchy problem for some linear partial differential equations, J.Differential Equations, 255(2013), 3592-3637.

[4] M. Yoshino and K. Kurogi, An example of a non 1-summable partial differential equation, RIMS Kôkyûroku Bessatsu (to appear).