高等学校の数学授業における多面的な見方の指導
－「代数的方法から解析的方法への変容」の授業構成－

清水　浩士

本研究では微分法の方程式への応用の題材として，高次方程式の解を扱う。教科書において，高次方程式は因数定理と微分法の応用の２カ所で別の単元として取りあげられる。この２つの題材を「高次方程式の解を代数的に求めることができなくても，解析的に迫ることができる」という一連の題材ととらえ，超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1994; et al.) の図と理論を規範的に適用することによりその授業の指導案の構成を図る。モデルを用いることにより，授業における学習軌道を一定の理論的枠組みの中で考察することが可能となる。

因数定理という代数的方法から解析的方法に切り替えるためには，数学的活動に立ち返り，その活動の内容に別の解釈を与える必要がある。生徒はこの授業での学習を通して，ひとつの手法にこだわるのではなく複数の方法によって高次方程式の理解を深めることができる。このような学習の蓄積はクリティカルシンキング（複眼的なものの見方）の基盤となる。

１．はじめに

数学の学習内容は互いに関連づいている。ひとつの題材を多面的に見たり，ひとつの問題を解決するにあたり複数の知識を組み合わせて用いたりすることのできる力を養うことは，生徒の数学的理解を深める上で重要なことである。筆者はそのような問題意識から単元や学年，小中高の連携や接続を意識しての教材開発や授業実践をおこなってきた（清水，2007c, 2008a, 2008b; et al.）。

本研究では微分法の方程式への応用を取りあげる。高等学校の数学においては，高次方程式は因数分解や因数定理を用いてごく特別の場合についてのみ解くことができる。一方で，微分法を用いて高次方程式の実数解の個数を調べることが可能である。前者は代数的，後者は解析的なアプローチであり，教科書では別の単元として取りあげられる。この２つの題材を，「高次方程式の解を代数的に求めることができなくても，解析的に迫ることができる」という一連の題材ととらえて指導案を構成する。生徒はこの授業に取り組むにあたり，ひとつの手法にこだわるのではなく複数の方法によって高次方程式の理解を深めることができる。このような学習の蓄積はクリティカルシンキング（複眼的なものの見方）の基盤となる。

本研究においては授業の構成に，超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1994; et al.) の図と理論を用いる。超越的再帰モデルは，本来生徒が数学を理解する過程を記述するためのモデルであるが，筆者はこのモデルを，授業とはどうあるべきかという教授原理を示す規範性をもつモデルととらえ直し，指導者の介入を位置づけた“拡張された超越的再帰モデル”（清水, 2007a, 2007b, 2008a; et al.）により授業構成を図った。

２．これまでの研究の概要

(1) 超越的再帰モデルの概観

超越的再帰モデルは生徒の数学的理解過程を記述するモデルであり，その理論の特徴として次のようなことをあげることができる。

① 数学的理解はいろいろな水準[1]により特徴づけられるであろうが，それは直線的ではない。理解は再帰的現象であり，再帰は思考が知識水準間を移行するときにみられる。(Pirie, S. & Kieren, T., 1989)

② 子どもたちの数学的理解の成長において，新しい水準での知識がそれ以前にもっていた知識と互換性を保ちながら超えていく(小山，1994，p.67)という超越性を有する。

③ その超越は，実際の理解過程においては，どの水準にあっても，すぐには解決できないような問題や疑問に直面したとき，自分のその時点での不適切な理解を拡張するために，内側の水準へ折り返す(Pirie, S. & Kieren, T., 1992, p.248) ことを通して行われる。

④ 各理解水準は，次の【図１】のような８層のモデルでえがかれる。

Pirie, S. & Kieren, T.(1994, pp.169-172) をもとに，モデルを構成するそれぞれの水準をまとめ概観する。

<u>第１水準：初源的認識</u> (Primitive Knowing)

[1] 本研究においては，超越的再帰モデルにおける理解の水準を《》で表し，教授の段階とは区別する。

理解するようになる過程の始まりである。ここで，初源的とは，それぞれ固有の数学的理解への出発の場所であり，学習者が最初に行なうことができると観察者，指導者あるいは研究者が仮定するものである。

第2水準：イメージづくり (Image Making)

学習者は以前の知識の中で分類をし，それを新しい方法で用いることが求められる。

第3水準：イメージ所有 (Image Having)

学習者は，あるトピックについての心的構成をもたらしたいくつかの特別な活動を実際にすることなく，その心的構成を用いることができる。

第4水準：性質認知 (Property Noticing)

学習者が，文脈に固有な，関連した性質を構成するために，その人のイメージの諸側面を操作したり組み合わせたりすることができるときに起こる。

第5水準：形式化 (Formalizing)

学習者は，その人が気づいた性質を特徴づけた以前のイメージから，ある方法や共通な性質を抽象する。

第6水準：観察 (Observing)

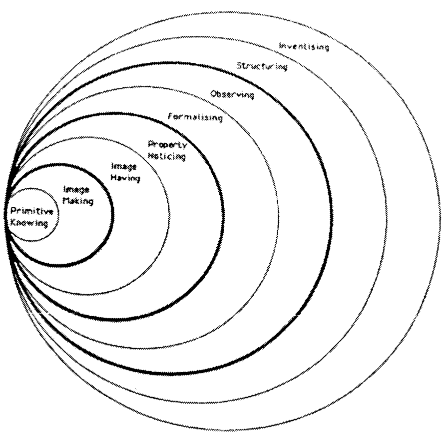
形式的活動を反省し，調整する。

第7水準：構造化 (Structuring)

蓄積された定理の内的関連に気づいて数学的構造をつくる。

第8水準：発明化 (Inventising)

十分構造化された理解をもち，新しい概念に成長するような，新しい問題を創造する可能性をもつ。



【図１】超越的再帰モデル

(2) 拡張された超越的再帰モデル

本研究では，本来は生徒の数学的理解過程を記述するモデルである超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1994) を規範的に適用する。このモデルを規範的に用いることにより，次のようなことが期待できる。

① 活動を通して知識を構成していく学習を説明することができる。

② 生徒のよりよい数学的理解過程を得るような授業構成を検討することができる。

③ 指導者の役割を検討できる。

これまでの研究により，次のような知見を得ることができた。

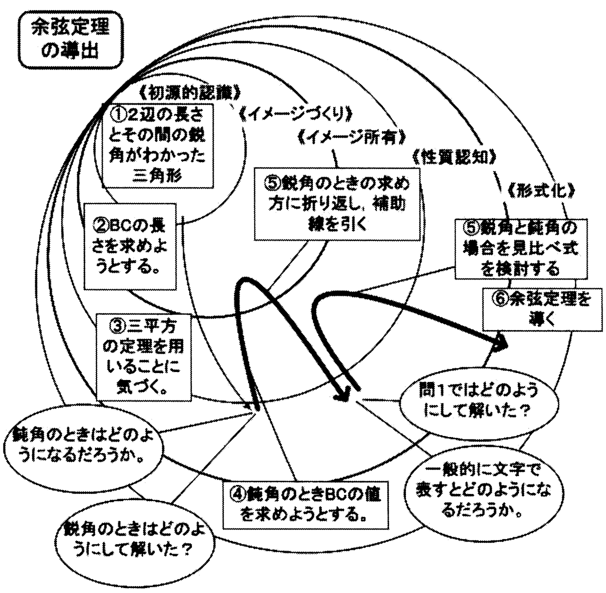
① 本来個々の生徒の数学的理解過程を記述するために用いられる超越的再帰モデルを，児童・生徒に理解させるにはどのような状況を設定すればよいか，また，理解をどのような方向に進化させればよいかなどの教授的原理を示しうるという意味での規範的特性(小山, 1992, p.181)をもちうるモデルととらえ直すことができる。

② この超越的再帰モデルの理論の中に生徒による問題づくり（問題の再構成）を位置付けることにより，次のことが明確になる。

i) 生徒が与えられた問題を再構成する行為は，超越的再帰モデルにおける理解の水準間を移行する場面において必然的に生ずる。

ii) 授業における支援的な発問などの介入を通して，問題の再構成をうながし，より深い数学的理解を得るための「折り返し(folding back)」 (Pirie, S. & Kieren, T., 1992, p.248) を生じさせることができる。

③ 超越的再帰モデル(Pirie, S. & Kieren, T., 1989, 1994) を授業における規範性のあるモデルと考え，その理論を適用して超越的再帰モデルの図の中に生徒の理解過程を予想して矢印で記入し，さらに折り返しを促すための指導者の介入を位置づけた【図２】。



【図２】拡張された超越的再帰モデル
（題材は余弦定理の導出）

この“拡張された超越的再帰モデル”(清水, 2007a, 2007b) において，予想される生徒の数学的理解過程は，教授の文脈における授業構成と一致する。したがって，このモデルを用いることで指導案から発問計画まで一貫した授業設計をすることが可能となる。

④ 生徒がよりよい数学的理解を得るために，より内側の水準に折り返すことは，新たに学習した数学的形式や手法での表現を獲得するために必然的に通る足場の役割を果たす。超越的再帰モデルの理論を適用することで，学習指導要領(2008)にうたわれる数学的活動および反復（スパイラル）学習に，より積極的な意味をもたせることが可能となる(清水, 2008a)。

⑤ 数学的活動を，ひとつの数学的概念を獲得するために，より具体的で個別の状況の中で考察を深めることと位置づけることができる。《初源的認識》から《イメージづくり》，《イメージ形成》を経て《性質認知》に至る過程が該当する。《性質認知》から《形式化》の水準の移行においては，より外側に自分の理解を拡張するために，内側の水準へ折り返して数学的活動の内容を参照する(清水, 2012a, 2012b)。

⑥ “拡張された超越的再帰モデル”(清水, 2007a, 2007b) を，生徒がよりよい数学的理解を得るような学習指導案の根拠とした。学習指導案に理論的枠組みを与えることで，日々の数学授業実践や教育実習生の指導に再現可能な道標と，反省的実践の根拠を与えることができる。

3．授業の構成[2]

(1) 題材と目標

本研究においては，数学Ⅱ微分法と積分法で扱われる導関数を高次方程式の解へのアプローチに応用する授業を取りあげる。高等学校数学Ⅱの教科書では「微分法の方程式への応用」の例題として取りあげられている（高橋ほか，2011）。

a を定数とするとき，方程式 $x^3-3x^2-a=0$ の異なる実数解はいくつあるか。a の値によって分類せよ。

この題材をもとに，次の２点を目標とした授業構成を図る。

目標

① 高次方程式の解を，因数定理を用いて求めることができない場合でも，微分法を用いることにより方程式の実数解に迫ることができることを理解する。

② ３次関数のグラフと３次方程式の関係を理解し，グラフを用いて方程式の解の範囲や，解の個数を調べることができるようにする。

ここで，①の目標は，単に「方程式の実数解に迫る」ことではない。高次方程式の解に代数的方法と，解析的方法という２つの「方法」があることに注目させ，多様な考え方の重要性に気づかせることである。

②の目標は実際に微分法の手法を用いて高次方程式という数学的概念を深めることである。この微分法という手法を用いて，ニュートン法（数学Ｂ；数列と漸化式，数値計算とコンピュータ），二分検索（情報；並べ替えと検索），漸化式と極限（数学Ⅲ；数列の極限）の授業内容に発展させることができる。

(2) 導入

授業の導入となる問は，例題の a に数値を代入して作成する。本研究の授業の導入においては，因数定理によって解くことのできる例として次の問いを用いる。

〔問１〕 $x^3-3x^2+2=0$ を解け

生徒は因数定理を用いて方程式の解を得る。

(3) 代数的方法から解析的方法への変容

続いて生徒は次の３次方程式の解を求めることに取り組む。

〔問２〕 $x^3-3x^2+1=0$ を解け

この３次方程式は因数定理により解くことができない。生徒は高次方程式を代数的に解くことに行き詰まりを生じる。この行き詰まりを生じたあと，別の方法によって解に迫るような授業をいかに構成するかが，本研究の中心テーマである。

スケンプは，学習者の数学概念の獲得に関わって次のように述べる。

> ある個人が持っている概念よりも高次の概念は単なる定義によっては理解されない。唯一の方法は適切な範例の集合を示すことである（スケンプ，1973）

スケンプのこの見解から，ある新しい数学概念は他の数学概念を用いて直接理解されないこと，また，新しい数学概念を獲得するためには一度範例に立ち返り，その範例に別の解釈を与える必要があることが示唆される。超越的再帰モデルの図における，より内側の水準（この場合においては《イメージづくり》）に返り，そこからもう一度知識の再構成をする必要がある。

[2] 本研究の授業の内容については，その多くを（清水，2010）から引用している。本研究はこの授業の理論的側面を補強するものである。

本研究の授業に展開においては，因数定理を用いて解くために代入したいくつかの数値の組を，３次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフ上の点の座標に読み替えることにより因数定理から微分法への切り替えを果たす。

(4) 指導者の介入

このような切り替えに，生徒自らが気づくことができればよいが，実際には難しいところがあり，ここに発問という形での指導者の介入が生じる。

Pirie & Kieren は指導者の介入について次の３つのタイプにふれている (Pirie, S. & Kieren, T., 1992, p.248)。

①確認的介入

生徒に自分が今どういう状態にあって，なぜそのように考えているかを自分自身あるいは観察者に示させることが意図されている。

②挑戦的介入

新しい場面へと，あるいはより外側へと向かう生徒の拡張を意図的に促そうとする試みである。

③支援的介入

生徒の理解の障害物を問いただしたり同定したり，内側の水準の活動への折り返しを（《イメージづくり》への直接的な折り返しさえも）促すことを意図する。

本研究における代数的方法から解析的方法への変容は，《イメージづくり》への直接的な折り返しを促すような支援的介入となる。この介入は，授業の段階としても大きな転機となる。

「解に近い x はどこだろうか」

「数値の組を見てわかることはないか」

「数の組を表にしたらどうだろうか」

のように，グラフをかくことを生徒から引き出すような一連の発問を準備しておく必要があろう。

このような介入を通して，生徒は３次関数のグラフをかくことに気づき、微分法を用いることに思い至る。

近似解を求めることは別の授業でのテーマになるが，本時においては，区間幅１程度までに絞り込むことを目標とする。

(5) 数学的活動

生徒は〔問２〕を解決するためにいくつもの数を代入する。また，この数の対応を見直すことにより下記のような対応表をつくる。

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-19	-3	1	-1	-3	1	17

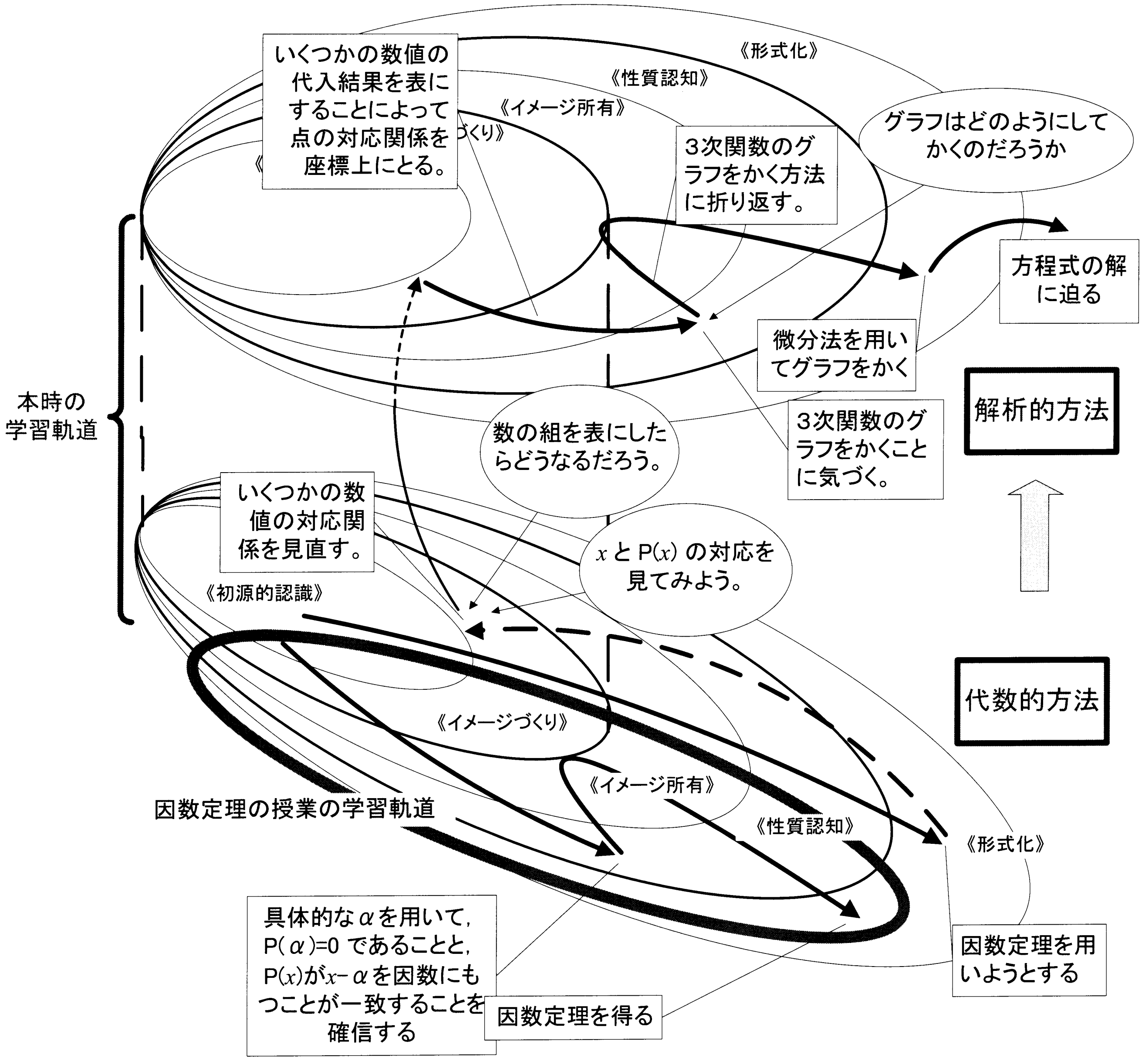
本研究においては，生徒が，〔問１〕，〔問２〕に因数定理を適用するためにいくつもの数値を代入すること，および，〔問２〕に折り返し，数と数の対応関係を考える過程を数学的活動と考える。それは，《初源的認識》から《イメージづくり》，《イメージ形成》に至るプロセスであり，《性質認知》に至るために必要不可欠である。また，生徒は《性質認知》から，自分の理解水準を拡張する方法をもって，より内側の水準に折り返す際に数学的活動を参照する。

(6) 超越的再帰モデルによる授業の構成

次ページ【図３】において，授業は下のモデルから始まる。矢印は想定される学習軌道である。太線の⬭で囲まれた「因数定理の授業の学習軌道」は，数学Ⅱの高次方程式における既習事項であり，本研究の授業では，《初源的認識》に埋め込まれる。本授業では，生徒はまず因数定理を用いて問を解こうとするが，解けずに行き詰まりを生じる。この行き詰まりを生じさせ，因数定理を用いるために代入した x と $\mathrm{P}(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ の数値の組を，グラフをかくための表に読み替えさせるために指導者は介入をおこなう。この介入により，生徒は《イメージづくり》まで折り返し，新たな概念の形成のために活動を始める。これが【図３】の上半分のモデルにあたる。

４．まとめと課題

本研究においては，超越的再帰モデルとその理論を用いて授業軌道を描き出すことにより，生徒の方法の変容を生じさせるための指導者の介入はいかにあるべきかについて考察した。代数的方法である因数定理から解析的方法である微分法を用いることに切り替えるためには，いったん数学的活動に立ち返り，その活動の内容に別の解釈を与える必要があることについて，および，その方法について提示することができたと考える。本研究は，教材や単元内容間の連携方法のあり方に寄与すると考える。今後は，そのようなさまざまな授業構成の蓄積を図ることが重要であると考える。



【図３】“拡張された超越的再帰モデル”による本研究の授業構成

《初源的認識》として，生徒は因数定理に対する知識と技能をもつことを想定する。生徒は，因数定理を用いて方程式の解を求めるために数値を代入する数学的活動を行う。ここで，授業者による折り返しを促す発問により，生徒は数学的活動を反省的に振り返ることを通して解析的方法に移行する。モデルの図において，⬭ 囲みは，授業者による生徒の水準の移行を促すための発問を，▭ 囲みは，生徒の活動を表す。

参考・引用文献

Pirie, S. & Kieren, T. (1989), A Recursive Theory of Mathematical Understanding, For the Learning of Mathematics 9, 3 (November 1989), pp.7-11.

Pirie, S. & Kieren, T. (1992), Watching Sandy's Understanding Grow, Journal of Mathematical Behavior 11, pp.243-257.

Pirie, S. & Kieren, T. (1994), Growth Mathematical Understanding: How Can We Characterise It and How Can We Represent It?, Educational Studies in Mathematics 26, pp.165-190.

小山正孝 (1992),「数学教育における理解のモデルについて」, 岩合一男先生退官記念出版会,『数学教育学の新展開』, 聖文社, pp.172-183.

小山正孝 (1994), 「数学理解の超越的再帰理論に関する一考察」,『広島大学教育学部 紀要 第二部 第43号』, pp.63-72.

清水浩士(2007a), 「生徒の数学的理解過程における問題づくり」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究 第13巻』, pp.155-161.

清水浩士(2007b),「超越的再帰モデルの規範的適用－教育実習指導における活用－」, 日本数学教育学会誌, pp.163-168.

清水浩士(2007c), 「学年のまとめとなる教材の作成」,『広島大学附属福山中・高等学校 中等教育研究紀要 第47巻』, pp.135-140.

清水浩士(2008a),「超越的再帰モデルの規範的適用(2)－小中接続の授業構成－」,『第41回数学教育論文発表会 論文集』, 日本数学教育学会誌, pp.163-168.

清水浩士(2008b), 「高等学校数学の導入となる教材」,『広島大学附属福山中・高等学校 中等教育研究紀要 第48巻』, pp.205-208.

清水浩士(2010), 『新しい学びを拓く数学科授業の理論と実践中学・高等学校編』, 岩崎秀樹編著, ミネルヴァ書房, pp.119-125.

清水浩士(2012a),「超越的再帰モデルの規範的適用(3)－問題解決学習への適用－」, 全国数学教育学会誌『数学教育学研究 第19巻』第1号, pp.9-15.

清水浩士(2012b),「超越的再帰モデルの規範的適用(4)－“拡張された超越的再帰モデル”による学習指導案の作成－」,『第 45 回数学教育論文発表会 論文集』, pp.1025-1030.

スケンプ(Skemp, R. R., 1973),「数学学習の心理学」, 新曜社, p.21

高橋陽一郎ほか(2011), 文部科学省検定済教科書「数学Ⅱ」, 啓林館, p.198

文部科学省(2008),『中学校学習指導要領』(平成20年３月)」, 東山書房

本研究は科学研究費補助金（奨励研究）の助成を受けた研究である。

課題番号 24909029
数学的活動を通して生徒の理解を深める，高校数学の授業設計方法の開発に関する研究