学位論文要旨

Generating functions of Box and Ball System
（箱玉系の母関数）

氏　名　　沖吉　真実

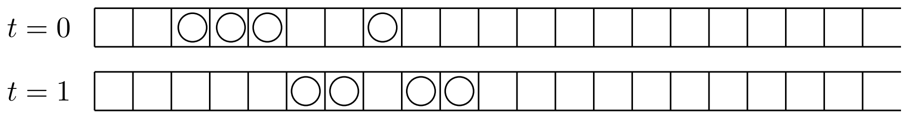
箱玉系 (Box and Ball System, 略して BBS) とは右方向へ無限の一列に並べた箱に玉を入れて, 規則に従って玉を動かしていくゲームのような系である. 1990 年に高橋・薩摩 [1] によって導入された箱玉系は, 玉の種類, 箱の容量の自由度を変えることなどにより一般化されてきた [2]. 本研究では箱玉系の母関数を定義して, まずオリジナルの高橋・薩摩の箱玉系の場合にその母関数が有理関数になることを証明した. さらに玉の個数を無限にした場合でも, 玉の初期配置が準周期的であれば母関数が有理的であろうという作業仮説をたて特別な場合に証明した.

1　先行研究

各時刻 $t \in \mathbb{N}$ で, 左から玉を運ぶキャリアーがやってきて右方向に進み, 以下の規則に従い箱の玉を動かしていく.

$$\begin{cases} \text{箱に玉がある場合はその玉を持ち次の箱に移動する.} \\ \text{箱に玉がない場合は} \begin{cases} \text{玉を持っていれば持っている玉をいれる.} \\ \text{玉を持っていなければ何もしない.} \end{cases} \end{cases}$$

すべての玉を移し終えたら, 時刻が 1 増え, 次の時刻へ時間発展する.



高橋・薩摩の定理 [1]　玉の個数が有限個の箱玉系では, ある時刻を過ぎると, 右から玉が連続して並ぶ塊 (以下, ソリトンと呼ぶ) が大きい順に並び, またソリトンとソリトンの間には十分な空き箱が存在し, ソリトンは衝突することなく規則正しく時間発展する.

2　主結果

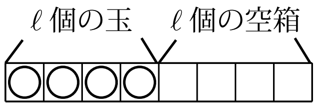
箱玉系の箱と玉の状態を, 時刻 j で i 番目の箱に玉があれば $a_i^j = 1$, そうでなければ $a_i^j = 0$ として, 箱玉系の母関数 $F(z,t)$ を次のように定義する.

$$F(z,t) := \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_i^j z^i t^j$$

高橋・薩摩の定理の「ある時刻を過ぎると, 規則正しく時間発展する」は母関数の言葉では次の定理で表される.

Theorem 2.5　玉の個数が有限個の箱玉系では, $F(z,t)$ は有理式となる.

玉が無限個ある箱玉系では母関数 $F(z,t)$ が有理関数になるための必要条件として $F(z,0)$ が有理関数となること, すなわち (Proposition 3.3) 初期状態の玉の配置が準周期的であることが必要である. ここで玉の配置が準周期的であるとは, 十分右側では玉の配置が同じパターンを無限に繰り返すことをいう. 本論文では逆に初期状態の玉の配置が準周期的ならば母関数 $F(z,t)$ が有理的であると予想した.



というパターンを繰り返す準周期的な箱玉系を ℓ-ℓ BBS と定義すると,

Theorem 3.10　ℓ-ℓ BBS の場合, $F(z,t)$ は有理式になる.

さらに本論文ではキャリーさんが $k \in \mathbb{N}$ 個までの玉しか同時に運べないというルールの場合も考察した. つまり, 手持ちの玉が k 個未満の場合はこれまで通りで, 手持ちの玉が k 個で玉が入っている箱を通るとき, 何もせずに通過する.

Corollary 4.11**, Theorem** 4.12 キャリーさんの運べる玉に制限がある場合も, 有限個の箱玉系の場合・ℓ-ℓ BBS の場合共に $F(z,t)$ は有理関数となる.

参考文献

[1] Daisuke Takahashi and Junkichi Satsuma, A Soliton Cellular Automaton, J. Phys. Soc. Jpn. 59 (3514-3519), 1990

[2] Daisuke Takahashi and Junta Matsukidaira, Box and Ball System with a Carrier and Ultra-Discrete Modified KdV Equation J. Phys. A: Math. Gen. 30, 1997