論 文 審 査 の 要 旨

<table>
<tr><td>博士の専攻分野の名称</td><td>博　士（　理学　）</td><td rowspan="2">氏名</td><td rowspan="2">Rasha Mohamed Farghly Eid</td></tr>
<tr><td>学位授与の要件</td><td>学位規則第 4 条第 1・2 項該当</td></tr>
</table>

論文題目

Elliptic Quantum Algebra $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$, Dynamical Quantum $\mathcal{Z}$-algebra and Higher Level Representation

（楕円量子代数 $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$，ダイナミカル量子 $\mathcal{Z}$代数，および高レベル表現）

論文審査担当者

主　　査	教　授	阿部　誠
審査委員	教　授	阿賀岡　芳夫
審査委員	教　授	石井　亮
審査委員	教　授	今野　均（東京海洋大学）

〔論文審査の要旨〕

本論文では, 非振アフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ に付随して定まる楕円量子代数 $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ に対して，そこに現れるダイナミカル量子 Z 代数の構造を調べ，その表現と $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のレベル一般の無限次元表現の既約性の関係を解明するとともに，$\hat{\mathfrak{g}}$ が A_n，B_n，D_n，E_6，E_7，E_8 型の場合にレベル 1 の具体的な既約表現の構成を行い，また，$\hat{\mathfrak{g}}$ が $sl(2, C)$ 型の場合に余積を用いて高レベル表現の構成を行い，表現の可積分性について調べている。

楕円量子代数 $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ は，通常のアフィン量子代数 $U_q(\hat{\mathfrak{g}})$ の 1 パラメター変形として，今野によって 1998 年に導入された無限次元のホップ亜代数であり，代数の定義関係式を生成元の母関数を用いて表すとき構造関数が楕円関数を用いて表されるという意味で楕円量子代数と呼ばれる。また，生成元の母関数は楕円カレントと呼ばれる。$U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ はヤン・バクスター方程式 (YBE) の楕円関数解とも密接な関係があることが分かっており, $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現は YBE の楕円関数解を用いて定義される楕円関数型の可解格子模型の代数解析をはじめとして，超幾何級数の楕円関数的拡張の表現論的定式化などにおいても重要な役割を果たしている。

本論文では，まず，$U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の無限次元表現，特に，その上で標準中心元 c が複素数 k の値をとる表現（これをレベル k の表現という）を考察しており，その構成と既約性の判定が第 1 のテーマである。このテーマはアフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ のレベル k 表現に対しては Lepowsky-Wilson によってよく研究されているが，その結果が $\hat{\mathfrak{g}}$ の普遍包絡環の 2 パラメター変形に相当する $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の場合にそのまま持ち上がるかどうかは非自明なことである。本論文では，$U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の定義関係式を注意深く考察し，そこに Lepowsky-Wilson によって導入された Z 代数のダイナミカルかつ量子的な変形（ダイナミカル量子 Z 代数）が存在することを突き止め，それを定義付ける関係式を書き下した。さらに，$U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のレベル k 表現の圏はダイナミカル量子 Z 代数の表現の圏と同値であることを示し，特に，その過程で, $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のレベル k 表現はダイナミカル量子 Z 代数の表現から $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のハイゼンベルク部分代数の作用によって誘導されることを示し，その結果, $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現の既約性はダイナミカル量子 Z 代数の表現の既約性に支配されることを明らかにした。

この構成法に基づいて $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のレベル 1 の既約表現を $\hat{\mathfrak{g}}$ が A_n，B_n，D_n，E_6，E_7，E_8 型の場合に具体的に構成したのが第 2 のテーマである。自由場を用いてダイナミカル量子 Z 代数の既約表現を構成し，これに $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のハイゼンベルク部分代数の作用を定めて構成が完成する。

第 1，第 2 のテーマに関する結果は，今野・大島との共著論文として，公表論文（1）に出版されている。

第 3 のテーマは，$\hat{\mathfrak{g}}$ が sl(2, C) 型の場合の高レベル（k が 1 より大きい整数）表現の構成と，その可積分性についての研究である。本論文では，ドリンフェルト余積と呼ばれる $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の楕円カレントに対する余積（$U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ から $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ のふたつのテンソル積への代数射）を用いて，上で構成したレベル 1 の表現のテンソル積表現を構成することにより，高レベル表現を構成した。この表現は既約にはならないが，高レベル表現における楕円カレントの具体的な実現を得ることができることがポイントである。特に，アフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現論においては, 表現空間のウェイト分解可能性とそこでの生成元の局所冪零性を要請する可積分表現と呼ばれる表現の圏が重要であるが，この概念が $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ の表現にまで持ち上がるのかどうかを明らかにすることは重要な問題である。本論文では，余積を用いて具体的に構成した高レベル表現の楕円カレントの実現を用いて，生成元の母関数である楕円カレントが冪零性を持つことを突き止め，これが可積分性における生成元の局所冪零性に対応する条件を与えるという予想を得た。

さらに，対応するダイナミカル量子 Z 代数の実現や，楕円カレントが満たす差分方程式なども導いており，今後，相関関数の計算などへの応用が期待できる。

第 3 のテーマに関する結果は，公表論文（2）として，掲載確定である。

以上のように，申請者は楕円量子代数の表現論の展開において基礎となるいくつかの問題に取り組み，複数の新しい成果を得た。また，その過程においては，複雑で膨大な計算を数多くこなし，結果を論理的に組み上げる必要があり，それを成し遂げた申請者の計算力・論理力・集中力と根気は研究者として一定の水準に達している。

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

（1） Elliptic Algebra $U_{q,p}(\hat{\mathfrak{g}})$ and Quantum Z-algebras
Rasha M. Farghly, Hitoshi Konno, and Kazuyuki Oshima
Algebra and Representation Theory, 18 (2015) 103－135.

（2） Higher Level Representation of the Elliptic Quantum Group $U_{q,p}(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ and its Integrability
Rasha Mohamed Farghly
Hiroshima Mathematical Journal, 掲載確定.