

Original

Analysis of Self-balancing Production Line with Bottleneck

Daisuke HIROTANI,¹ Katsumi MORIKAWA¹ and Katsuhiko TAKAHASHI¹

Abstract

In traditional production lines designed using the line-balancing method, each worker is usually assigned to a particular fixed work, and it is valuable to decrease the training task to master the assigned work. However, when an imbalance among workers' speeds exists, the slowest worker will delay the overall work in the production line, and the production rate of the production line will also decrease. To solve this problem, a "Self-Balancing Production Line" was introduced in which each worker is assigned to work dynamically, thus enabling balanced production to be retained. For this kind of line, convergence conditions, where the position of each worker converges to a fixed point and the production rate becomes the maximum, were derived under the same workload. However, in reality bottleneck in which a lot of works have to be processed exists, and few papers assume bottleneck. When considering bottleneck, conditions for maintaining balance that maximize production rate are changed. Therefore, it is important to analyze this effect. In this paper, self-balancing production line with bottleneck is formulated and analyzed for both cases that consider and ignore the walk-back time, and the conditions that enable balanced production are analyzed.

Key words: self-balancing, blocking, production line, bottleneck

¹ Hiroshima University
Received: November 21, 2008
Accepted: December 25, 2009

ボトルネック区間が存在する自己バランスラインの解析

広谷大助¹, 森川克己¹, 高橋勝彦¹

“自己バランスライン”とは、従来のラインバランシングの手法を用いたラインと異なり、生産環境の変化に対して作業者に仕事が動的に割り当てられることによって、次第に仕事の作業が速い作業者は作業を多く受け持ち、仕事の作業が遅い作業者は作業を少なく受け持つようになり各作業者の作業速度に応じてバランスを保つことができるラインのことである。特に、各作業者の作業開始位置が1点に収束し、生産率が最大になる条件は求められてきた。しかし、ボトルネック区間の存在によってバランスをとり生産率が最大になる条件が変化することが考えられ解析の必要があるが、それを考慮した論文はほとんど見当たらない。本研究では、自己バランスラインにおけるボトルネック区間が存在する場合に対してラインを戻る時間を考慮する場合と無視する場合両方について述べ、自己バランスを達成する条件を解析する。

キーワード：自己バランス, ブロッキング, 生産ライン, ボトルネック

1. はじめに

従来のラインバランシングの手法を用いた生産ラインでは、それぞれの作業者に決められた作業が割り当てられていることにより、遅い作業者によって作業が遅れが生じて生産率が低下する原因になっていた。この問題を解決するために“自己バランスライン”が提案されている。そのラインでは作業者が動的に作業を分担し、最後の作業者が製品を完成させた時、各作業者は下流の作業者に作業中の品目を受け渡した後、ラインを戻って前にいる上流の作業者から品目を受け取る。ただし、最初の作業者はラインの最初に戻って新しい品目の作業を行う。この自己バランスラインで次第に作業の速度に応じた作業量を受け持つことによってバランスを保つことが Bartholdi ら [1] によって示されている。ここでいうバランスとは作業者の各サイクルにおける作業開始位置が1点に収束し、同じ作業内容を繰り返すことをいい、適切に作業者を配置することによって特別な制御をせずに、また作業者が特に意識をしなくてもサイクルが進むにつれて作業開始位置が1点に収束することから自己バランスと呼んでいる。ここで“1点に収束”とは、どのサイクルでも作業者の作業開始位置が常に同じになる現象を指す。各作業者の作業開始位置が1点に収束し、生産率が最大になる条件は、Bartholdi ら [1], [2] と、広谷ら [3] によって求められてきた。その際の条件は、作業によらず単位長さあたりの処理量が一定のラインについて述べられてきたが、実際には作業内容によって処理を必要とする量が標準作業と比較して多いボトルネック区間が存在することがある。ボトルネック区間は、作

業内容によって決まり、例えば精密な作業や時間がかかる特殊な作業がこれにあたる。ボトルネック区間では、どの作業者でも作業速度が単位長さあたりの処理量に応じて遅くなることを仮定する。ボトルネック区間が存在する場合を考慮することにより、処理量一定のライン [1]~[3] と比較して作業者による処理量のアンバランスに加えて区間による処理量のアンバランスによってバランスをとることが難しくなり、バランスをとる条件やその際の生産率が変わると考えられ、それらを調べる必要がある。本研究では、自己バランスラインにおいて解析法が戻る時間の考慮によって異なることから、戻る時間を考慮する場合と無視する場合について作業者の作業開始位置の定式化を行い、同時にバランスをとるための条件について解析する。

本論文の内容は以下の通りである。2節ではこの生産ラインの仮定や性質、そして本研究の評価尺度である生産率の定義について述べる。3節では、作業者の戻る時間を無視する場合と考慮する場合の両方に対してボトルネック区間が存在する場合の作業者の作業開始位置を定式化する。4節ではバランスするための条件とそのときの生産率について解析し、最後の5節で結論を述べる。

2. 対象とする生産ライン

2.1 モデルの前提条件

本研究では次のモデルを仮定する。

- 同一の品目を順番に処理するフローショップ型のラインに、作業者1から n が順番に並んで作業をしている。
- 作業者はどの作業も担当することができ、1つの作業に対し任意に作業を分解し、他の作業者が作業することも可能である。
- 作業者 i は、標準作業の区間内では作業によらず各

¹ 広島大学

受付：2008年11月21日，再受付（1回）

受理：2009年12月25日

作業で一定の作業速度 $v_i (> 0)$ により、ラインを移動しながら作業を行う移動作業方式を仮定する。ただし、各作業者は他の作業者を追い越すことができない。ラインを移動しながら作業を行う仮定は従来研究 [1], [2] と異なる。

- 作業員 n が製品を完成させたら、作業員 $n-1$ がいるところまで戻り、そこから作業員 $n-1$ が行っていた作業を引き継いで行う。作業員 $n-1$ は同様に作業員 $n-2$ の作業を引き継ぐ。以下、各作業員とも上流の作業員の作業を引き継ぐ。作業員 1 は新しい品目の作業を始める。ただし、ラインを戻す速度を v_b とし、各作業員で一定とする。また、作業を引き継ぐ時間はかからないものとする。
- 作業員 i が t サイクルの作業を開始した際の、ラインの先頭からの距離とライン全体の長さとの比を $x_i^{(t)}$ とし、終了した際の、ラインの先頭からの距離とライン全体の長さとの比を $x_{i,e}^{(t)}$ ($0 \leq x_i^{(t)} \leq x_{i,e}^{(t)} \leq 1$) とする。なお、モデルより $x_1^{(t)} = 0, x_{n,e}^{(t)} = 1, x_{i,e}^{(t)} = x_{i+1}^{(t+1)} \forall i, t$ とする。
- ライン上に作業内容によって処理を必要とする量が標準作業と比較して多いボトルネック区間が 1 つ存在し、その下限位置を x_L 、上限を x_U とする。また、その区間において標準作業を 1 とした時の単位長さあたりの処理量を $B (> 1)$ とする (図 1 参照)。

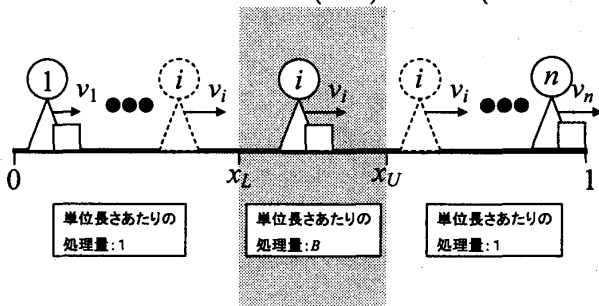


図 1 ボトルネック区間が存在するライン

2.2 生産率

ここでは、本研究で取り上げる評価尺度の 1 つである生産率 PR の導出法について述べる。

まず、作業員 i の t サイクルにおける作業開始位置 $x_i^{(t)}$ と作業終了位置 $x_{i,e}^{(t)}$ から作業員 i が t サイクルにかかる時間を本論文では“サイクルタイム”と定義し、 $a_i^{(t)}$ と表記する。サイクルタイム $a_i^{(t)}$ は、次式で求められる。

$$a_i^{(t)} = \frac{\max\{0, x_{i,e}^{(t)} - \max\{x_U, x_i^{(t)}\}\}}{v_i} + \frac{\max\{0, \min\{x_U, x_{i,e}^{(t)}\} - \max\{x_L, x_i^{(t)}\}\}}{Bv_i}$$

$$+ \frac{\max\{0, \min\{x_{i,e}^{(t)}, x_L\} - x_i^{(t)}\}}{v_i} + \frac{x_{i,e}^{(t)} - x_{i-1,e}^{(t)}}{v_b} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1)$$

(1) 式において、第 1 項から第 3 項までは、作業員 i の作業時間を表し、第 1 項はボトルネック区間より上流、第 2 項はボトルネック区間内、第 3 項はボトルネック区間より下流の場合であり、作業を行わない区間は 0 になる。また、第 4 項は作業員 i の戻る時間を表している。なお、戻る時間を無視する場合は $v_b = \infty$ とし、最後の項を無視することで求められる。

また、作業員の作業開始位置が安定することによって、サイクル数 t に依存しない定常状態のサイクルタイム a_i が求められた時、生産率 PR は下の (2) 式で求められる。

$$PR = \min_i \{1/a_i\} \quad (2)$$

3. 作業員の作業開始位置の定式化

ボトルネック区間が存在する場合には、戻る時間を無視する場合と考慮する場合で解析方法が異なる。ここでは、それぞれの場合に対して作業員の作業開始位置の定式化について述べる。なお、作業員同士がぶつかるブロッキングが起きた場合は、求められた作業開始位置から広谷ら [3] で述べているブロッキング時の対応を用いることにより定式化できることから、ここではブロッキングが起きない場合について述べる。

3.1 戻る時間を無視する場合

戻る時間を無視する場合の作業員の作業開始位置を図 2 の作業員 3 人 ($n = 3$) のタイムチャートで示す。この図は、横軸に作業員の位置、縦軸に時間をとり、右上がりの直線は作業中の状態を表し、傾き 0 の直線は戻る状態を表し、傾きは作業速度に反比例する。この例では、 $x_L = 0.4, x_U = 0.6$ の間で $B = 2$ とし図では網掛けで示している。また、(a) は変換前のタイムチャート、(b) は (a) のラインに対してボトルネック区間を $B = 1$ になるように拡張した変換後のタイムチャートである。(a) のタイムチャートでは処理量が増える区間内では単位長さあたりの処理量が 2 倍になっていることから作業状態における直線の傾きが 2 倍になり、区間外になると元の傾きに戻る。図 2 では $B = 2$ としていることからボトルネック区間の長さを 2 倍つまり長さ 0.2 だけ拡張することでボトルネック区間に関わらず同じ傾きになり、定式化が容易になる。従って、戻る時間を無視する場合、従来研究 [1]~[3] で解析されているラインと処理量が同じになるように

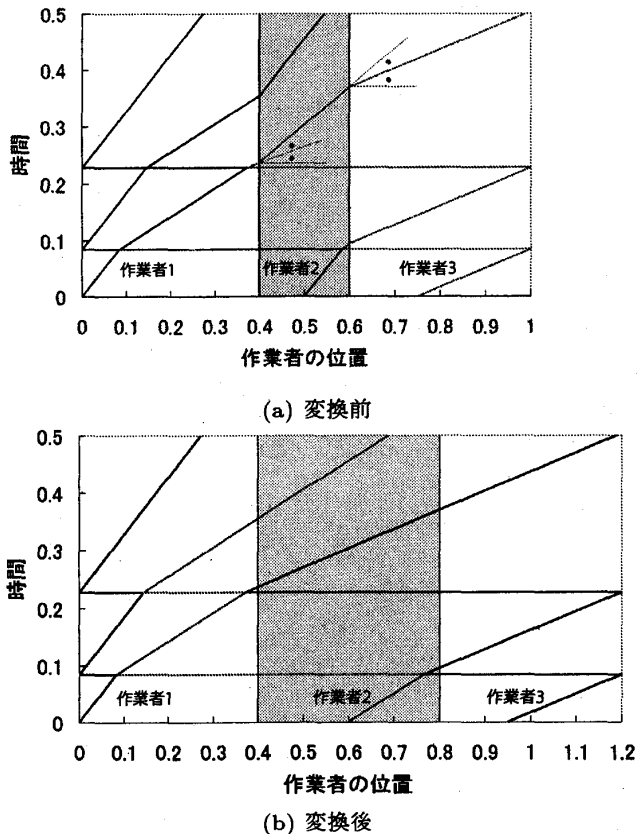


図2 戻り時間を無視する場合のタイムチャート例 ($n = 3$)

ボトルネック区間の長さを B 倍に仮想的に変換させればよい。ラインの長さの変化量 Δ_B は下のように表される。

$$\Delta_B = (B - 1)(x_U - x_L) \quad (3)$$

なお、仮定より $B > 1$ であることから $\Delta_B > 0$ である。この時、(3) 式を用いて、長さを変換したラインにおける作業員 i の t サイクルの作業開始位置 $y_i^{(t)}$ は実際の位置 $x_i^{(t)}$ が分かると、以下の式で求められる。

$$y_i^{(t)} = x_i^{(t)} + \max\{0, \min\{(B - 1)(x_i^{(t)} - x_L), \Delta_B\}\}$$

上の式で、第 2 項がボトルネック区間の存在によって拡張される長さを表し、ボトルネック区間より上流では図 2 からも明らかなように 0、下流では Δ_B になる。また、上の式から $y_i^{(t)}$ から実際の位置 $x_i^{(t)}$ への逆変換も求めることができ以下の式で表される。

$$x_i^{(t)} = y_i^{(t)} - \max\left\{0, \min\left\{\frac{(y_i^{(t)} - y_L)}{B - 1}, \Delta_B\right\}\right\}$$

上の式で、第 2 項がボトルネック区間の存在によって縮小される長さを表し、ボトルネック区間より上流では図 2 からも明らかなように 0、下流では Δ_B になる。

ラインの長さを仮想的に変換させることにより、 t サイクルの作業開始位置 $y_i^{(t)}$ が求められると、 $(t + 1)$ サイクルにおける作業員 i の作業開始位置 $y_i^{(t+1)}$ は (4) 式で表される。

$$\begin{cases} y_1^{(t+1)} = 0 \\ y_i^{(t+1)} = y_{i-1}^{(t)} + v_{i-1} \left(\frac{(1 + \Delta_B) - y_n^{(t)}}{v_n} \right) \end{cases} \quad (4) \quad (i = 2, \dots, n)$$

上の式は仮想的に拡張されたラインに対して、最後の作業員が作業時間だけ他の作業員も作業を行うことを示している。

3.2 戻り時間を考慮する場合

まず、戻り時間を考慮する場合の作業員の作業開始位置を図 3 の作業員 3 人 ($n = 3$) のタイムチャートで示す。この例は図 2 と同様な条件で、異なるのは $v_b = 10$ である。(a) は変換前のタイムチャート、(b) は (a) のラインに対して $\Delta_B = 0.2$ 拡張した後のタイムチャートである。図 3 において、(a) ではボトルネック区間で図 2 と同様に作業状態を表す直線の傾きが 2 倍になっている。しかし、戻り状態はボトルネック区間に影響しないことから傾きは全区間で変化しない。(b) においてはラインの長さを変換していることから処理量に変化する区間でも作業状態の傾きは変化しない。しかし、戻り状態はラインが拡張されるためにこの例では区間内の直線の傾きを 2 倍にしないと (a) の状態と同じにならない。この結果、(a) では作業状態を表す直線が区間によって傾きが異なり、(b) では戻り状態が区間によって傾きが異なる。従って、戻り時間を無視する場合と違って作業員の作業開始位置の定式化が容易ではない。

戻り時間を考慮する場合の作業員の作業開始位置は、ボトルネック区間が存在しない $B = 1$ の場合 [4] の作業終了位置 $x_{i,NB}^{(t)}$ とボトルネック区間による最後の作業員に対する位置の偏差 $x_{i,end}^{(t)}$ の和 $x_{i,tem}^{(t)}$ を基準として、その基準からの偏差 $\Delta_i^{(t)}$ から求められる。図 4 および 5 のタイムチャートを用いて説明する。

なお、作業員 1 に関してはどのサイクルでも作業開始位置はゼロ ($x_1^{(t)} = 0$) のため、作業員 2 から n までについて考え、 t サイクルの作業開始位置から $t + 1$ サイクルの作業開始位置を求める場合を考える。まず、基準となる作業開始位置 $x_{i,tem}^{(t)}$ を求める。これを求める上で、まず広谷ら [4] に示されている処理量が一定の場合における手法からボトルネック区間が存在しない $B = 1$ の場合 [4] の位置 $x_{i,NB}^{(t+1)}$ が求められ、以下の (5) 式で表される。

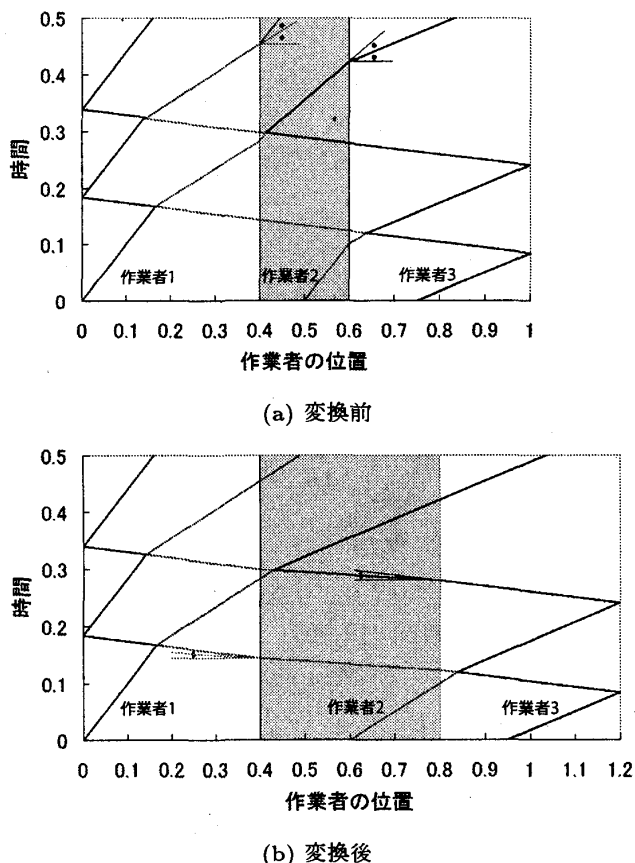


図3 戻る時間を考慮する場合のタイムチャート例 (n = 3)

$$x_{i,NB}^{(t+1)} = x_{i-1}^{(t)} + v_{i-1} \left[\frac{1 - x_n^{(t)}}{v_n} - \frac{x_n^{(t)} - x_{i-1}^{(t)}}{v_b} + \frac{1}{v_{i-1} + v_b} \cdot \left\{ 1 - \left(x_{i-1}^{(t)} + v_{i-1} \left(\frac{1 - x_n^{(t)}}{v_n} - \frac{x_n^{(t)} - x_{i-1}^{(t)}}{v_b} \right) \right) \right\} \right] \quad (5)$$

なお、次のサイクルにおける作業員 i の作業開始位置は作業員 $i-1$ の作業により影響されていることに注意する。次にボトルネック区間による最後の作業員の位置の偏差 $x_{i,end}^{(t)}$ は以下の (6) 式で表される。

$$x_{i,end}^{(t)} = \frac{v_b}{v_b + v_{i-1}} \frac{v_{i-1}}{v_n} (B - 1) \left[x_U - \min \{ x_U, \max \{ x_n^{(t)}, x_L \} \} \right] \quad (6)$$

これを考慮する理由として、最後の作業員の作業時間だけ他の作業員も作業を行っていることによる。これは最後の作業員のボトルネック区間による作業時間の増加を考慮することによって求められ、図4に示す。ここで、作業時間の増加は最後の作業員の作業開始位置 $x_n^{(t)}$ に影響する。その後、作業時間に作業速度 v_{i-1} を

かけることによってボトルネック区間による最後の作業員による位置の偏差が求められる。これらの和をとることによって基準とする位置 $x_{i,tem}^{(t)}$ が求められる。

次に、ボトルネック区間よりも下流では偏差 $\Delta_i^{(t)}$ は一定でかつ、最大になることに注目して、 $\Delta_i^{(t)}$ が最大になる作業員の位置で最も上流にある位置を表す $x_{i,max}^{(t)}$ を求める。これは、作業員 i の戻り状態を表す直線 $y_1 = -v_b t + b$ と基準となる作業員 $i-1$ の作業状態を表す直線 $y_2 = v_{i-1} t + x_L$ の連立方程式を解くことによって求められる (図5参照)。その際、 y 切片 b は位置 x_L から x_U に到達するまでに作業員 $i-1$ がかかる時間 t_1 を求め、 (y_1, t) に (x_U, t_1) を代入することによって b を求めることができるが、作業員 $i-1$ の作業開始位置 $x_{i-1}^{(t)}$ によってかかる時間は変化することに注意し、以下の式で求められる。

$$b = x_U + \frac{v_b}{v_{i-1}} \max \left\{ (x_U - x_L), \min \{ (x_{i-1}^{(t)} - x_L + B(x_U - x_{i-1}^{(t)})), B(x_U - x_L) \} \right\}$$

2つの直線 y_1, y_2 より、 $x_{i,max}^{(t)}$ つまり $y_1 = y_2$ の時刻 t_2 を求めることができ、この t_2 を t に代入し、 x_L を加えることによって $x_{i,max}^{(t)}$ を求めることができ、以下の (7) 式で表される。

$$x_{i,max}^{(t)} = \frac{v_{i-1}}{v_{i-1} + v_b} \left[x_U + \frac{v_b}{v_{i-1}} \max \left\{ (x_U - x_L), \min \{ (x_{i-1}^{(t)} - x_L + B(x_U - x_{i-1}^{(t)})), B(x_U - x_L) \} \right\} - x_L \right] + x_L \quad (7)$$

$x_{i,tem}^{(t)}, x_{i,max}^{(t)}$ を求めた後、これらの値を比較することにより、偏差 $\Delta_i^{(t)}$ を求める。 $x_{i,tem}^{(t)} < x_{i,max}^{(t)}$ の場合、 $x_{i,tem}^{(t)}$ を1つの頂点とした三角形 (図5の①) を基にして導出する。 $x_{i,tem}^{(t)} \geq x_{i,max}^{(t)}$ の場合、 $x_{i,max}^{(t)}$ より偏差 $\Delta_i^{(t)}$ が大きくなることはないため、 $x_{i,max}^{(t)}$ を1つの頂点とした三角形 (図5の②) を基にして導出する。基準とする三角形を決定した後、図5の(1)あるいは(2)で示している長さの比をとることによって偏差 $\Delta_i^{(t)}$ を求めることができる。ただし、 $x_{i,tem}^{(t)} < x_L$ ならば、偏差は存在しないことから $\Delta_i^{(t)} = 0$ になる。以上から、 $\Delta_i^{(t)}$ は以下の式で表される。

$$\Delta_i^{(t)} = \max \left\{ 0, \frac{v_b}{v_{i-1}/B + v_b} \left(1 - \frac{1}{B} \right) \cdot \min \{ x_{i,tem}^{(t)} - \min \{ x_U, \max \{ x_L, x_i^{(t)} \} \}, \right.$$

$$x_{i,max}^{(t)} = \min\{x_U, \max\{x_L, x_i^{(t)}\}\} \quad (8)$$

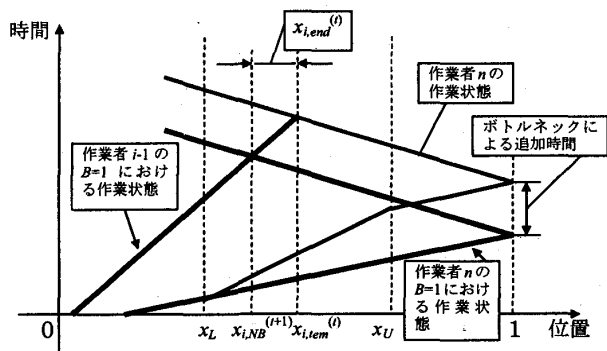


図4 戻る時間を考慮する場合における $x_{i,end}^{(t)}$ の導出過程

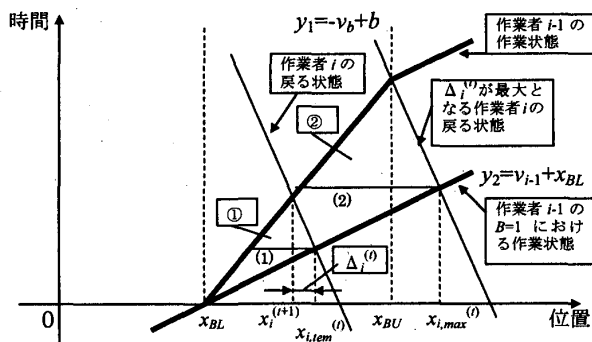


図5 戻る時間を考慮する場合における $\Delta_i^{(t)}$ の導出過程

以上より、 $x_{i,tem}^{(t)}$ を求め、そこからの偏差 $\Delta_i^{(t)}$ を求める手法で定式化をすることができ、 t サイクルの作業開始位置 $x_i^{(t)}$ が既知であるときに、 $t+1$ サイクルにおける作業員 i の作業開始位置 $x_i^{(t+1)}$ は (9) 式で表される。

$$\begin{cases} x_1^{(t+1)} = 0 \\ x_i^{(t+1)} = x_{i,tem}^{(t)} - \Delta_i^{(t)} \quad (i = 2, \dots, n) \end{cases} \quad (9)$$

ただし、 $x_{i,tem}^{(t)} = x_{i,NB}^{(t+1)} + x_{i,end}^{(t)}$ 、 $x_{i,NB}^{(t+1)}$ は (5) 式、 $x_{i,end}^{(t)}$ は (6) 式、 $x_{i,max}^{(t)}$ は (7) 式、 $\Delta_i^{(t)}$ は (8) 式で求められる。

4. バランスと収束の解析

ここでは、戻る時間を無視する場合と考慮する場合に分けて、それぞれにおいてバランスをとるための条件とバランス時の生産率を解析する。

4.1 戻る時間を無視する場合

戻る時間を無視する場合、バランス時の収束点や生産率はラインの長さを変換することによって容易に求

められる。収束点 y_i^* は従来研究 [1] を基にして下の (10) 式で求められる。

$$y_i^* = \frac{(1 + \Delta_B) \sum_{k=1}^{i-1} v_k}{\sum_{k=1}^n v_k} \quad (10)$$

(10) 式は、収束点が速度比に応じて決まることを意味している。(4) 式から $y_i^{(t+1)} = y_i^{(t)}$ にし、連立方程式を解くことによって収束点が求められ、収束する定常状態であることからサイクルタイム ((1) 式) から (2) 式を用いて生産率 PR を計算すると下のようなになる。

$$PR = \frac{1}{1 + \Delta_B} \sum_{k=1}^n v_k$$

これらの結果はいずれも $(1 + \Delta_B)$ を 1 に置き換えることによって従来研究 [1], [3] と一致する。また、収束条件は広谷ら [3] の結果と同じになり、以下の定理が成立する。

定理 1 収束条件 作業員 $i (i = 2, 3, \dots, n-1)$ に対して (11) 式が全て成立する場合には作業員の作業開始位置は 1 点に収束する。

$$\frac{\sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k-1} v_k}{v_n} < 1 \quad (11)$$

証明：

作業員の位置がある点に収束すると仮定してその収束点 $y = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)$ における最後の作業員の収束点からの作業員の位置の誤差を $\epsilon_i^{(t)}$ とし他の作業員に関しても (4) 式を展開していく。ここで $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ は (4) 式より次のような関係で表される。

$$y_i^* = y_{i-1}^* + v_{i-1} \left(\frac{1 + \Delta_B - y_n^*}{v_n} \right) \quad (12)$$

$$(i = 2, 3, \dots, n)$$

前提条件より $y_1^* = 0$ になることから、作業員 2 から考え、 $\epsilon_i^{(t)}$ の係数がどのように変化するかを各作業員に対して (4) 式を展開する。そのために (4) 式に $y_n^{(t)} = y_n^* + \epsilon_n^{(t)}$ を代入する。すると (4) 式は下のようになる。

$$y_2^{(t+1)} = v_1 \left(\frac{1 + \Delta_B - (y_n^* + \epsilon_n^{(t)})}{v_n} \right)$$

$$= v_1 \left(\frac{1 + \Delta_B - y_n^*}{v_n} \right) - \frac{v_1}{v_n} \epsilon_n^{(t)}$$

上の式において、右辺第1項は(12)式および $y_1^* = 0$ から y_2^* を表し、結果として第2項は作業員2による収束点からの誤差が $\frac{v_1}{v_n} \epsilon_n^{(t)}$ になることを示している。従って、これより

$$y_2^{(t)} = y_2^* + \frac{v_1}{v_n} \epsilon_n^{(t)}$$

と表せる。これは広谷ら[3]の結果と比較すると y を x に変えることで同じ結果になる。以下、広谷ら[3]と同様の手法で作業員 n まで(4)式の展開を続けると、 $\epsilon_n^{(t)}$ を変数とした各作業員における誤差の係数が求まり、これも広谷ら[3]と同じ結果になる。この時、サイクルを重ねるに従って、誤差項が小さくなれば収束することから、 $\epsilon_n^{(t)}$ の係数が1未満であれば収束することにより(11)式が導出され、結果も広谷ら[3]と同じになる。(終)

4.2 戻る時間を考慮する場合

前節では、解析的に収束点や収束条件を求めたが、戻る時間を考慮する場合には、収束点や収束条件を解析的に求めることは困難である。従って、作業員3人のシミュレーションを用いることによって解析を行う。作業員3人で行うのは従来研究[4]で作業量が全ての区間で一定の場合の収束点や収束条件が明確に求められ、比較が可能のためである。シミュレーションは作業員3の作業速度、戻る速度をそれぞれ $v_3 = 5, v_b = 10$ に固定したうえで、作業員1及び2の作業速度を0.05から10までそれぞれ0.05刻みで10000サイクルのシミュレーションをプログラムC言語により行った。解析をする上で、影響する要因をまとめ、以下に挙げる。

- ボトルネック区間の単位長さあたりの処理量(B)
- ボトルネック区間の上限, 下限(x_U, x_L)
- ボトルネック区間の長さ($x_U - x_L$)

影響する要因別にシミュレーションで求めた収束条件を示し、処理量 B に対して図6、上限, 下限(x_U, x_L)に対して図7、長さ($x_U - x_L$)に対して図8にそれぞれ示す。各要因別に2つずつの結果を示し、収束領域に関し1つは網掛け、1つは斜線の領域で示している。なお、シミュレーション結果とあわせて、従来研究[4]で求められた $B = 1$ における収束条件もあわせて示している。また、ボトルネック区間の上限, 下限 x_U, x_L が収束点 x_2^*, x_3^* と重なる点を結んだ線をそれぞれの要因別に1つは太線、1つは破線で示し、さらに領域(a)から(f)および数式(14)から(23)も後述の説明のために加えている。

シミュレーション結果を基に収束条件の境界を調べると、作業員3人の場合について作業員の作業開始位置が \hat{x}_i に収束すると仮定した場合の収束のため

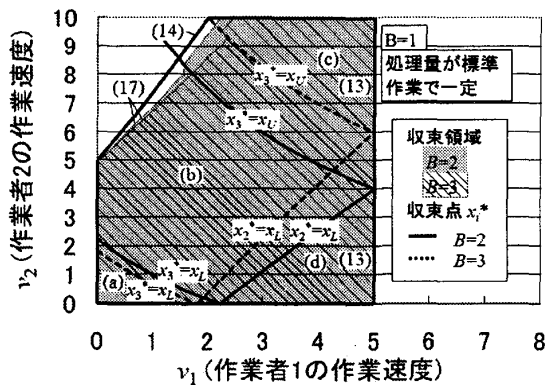


図6 区間の単位あたりの処理量 B が収束条件および収束点に与える影響 $x_L = 0.4, x_U = 0.6$

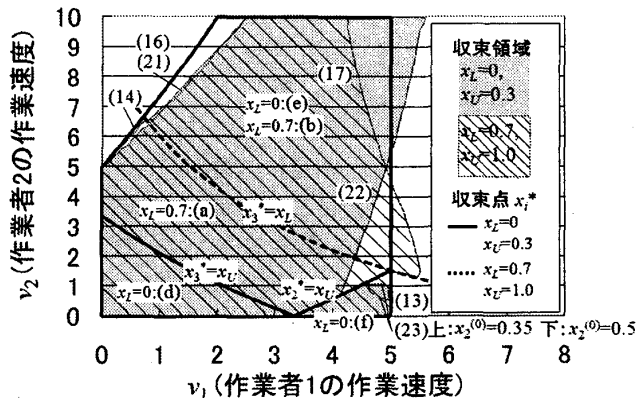


図7 区間の上限, 下限(x_L, x_U)が収束条件および収束点に与える影響 $B = 2, \text{長さ} = 0.3$

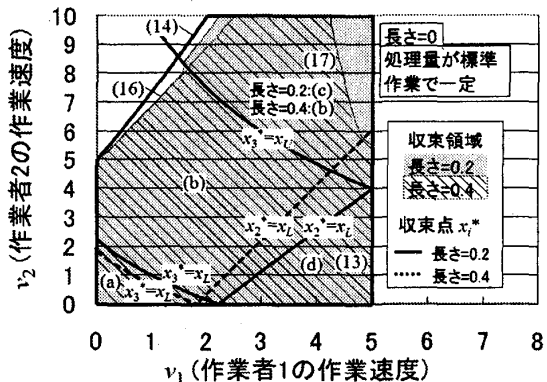


図8 区間の長さ($x_U - x_L$)が収束条件および収束点に与える影響 $B = 2, x_L = 0.4$

の必要条件のいくつかが求められることが分かった。 \hat{x}_i はボトルネック区間により以下の6つの場合を考える。(a) $\hat{x}_2, \hat{x}_3 < x_L$, (b) $\hat{x}_2 < x_L \leq \hat{x}_3 \leq x_U$, (c) $\hat{x}_2 < x_L, \hat{x}_3 > x_U$, (d) $x_L \leq \hat{x}_2, \hat{x}_3 \leq x_U$, (e) $x_L \leq \hat{x}_2 \leq x_U < \hat{x}_3$, (f) $x_U < \hat{x}_2, \hat{x}_3$ 。以下、各領域について考察する。なお、 \hat{x}_i は(a)から(f)それぞれの場合を仮定することにより、min, maxの存在しない線形式になることから作業員 n 人に関して $n - 1$ 次の連立方程式を解くことによって求められる。

- (a) $\hat{x}_2, \hat{x}_3 < x_L$ の場合
ラインの下流にボトルネック区間が存在する場

合のみ考える必要がある。この場合における収束条件を求める上で作業員 i に対する収束点からの誤差 $\epsilon_i^{(t)}$ を用いる。前節と同様の手法によって、 $\epsilon_2^{(t+1)}$, $\epsilon_3^{(t+1)}$ は以下のように求められる。

$$\epsilon_2^{(t+1)} = \frac{v_1(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + v_b)} \epsilon_n^{(t)}$$

$$\epsilon_3^{(t+1)} = -\frac{(v_1 - v_2)v_b(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + v_b)(v_2 + v_b)} \epsilon_n^{(t)}$$

従って、誤差の係数が 1 未満になればよいことから、

$$\frac{v_1(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + v_b)} < 1 \quad (13)$$

$$-\frac{(v_1 - v_2)v_b(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + v_b)(v_2 + v_b)} < 1 \quad (14)$$

であれば、収束すると考えられる。これを解くと、従来研究 [4] と完全に一致し、(13) 式は展開すると $v_1 < v_3$ となる。しかし、図 7 において、収束領域と (14) 式が完全には一致しない。作業員の作業開始位置が他の領域 (b) から (f) を移行することにより、他の領域では収束しない作業員の並びにあたる領域にあたるために収束領域が減少することが原因である。

(b) $\hat{x}_2 < x_L \leq \hat{x}_3 \leq x_U$ の場合

この場合における収束条件を求める上でも前述の $\epsilon_2^{(t+1)}$, $\epsilon_3^{(t+1)}$ から以下の式が導出される。

$$\frac{v_1(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_1 + v_b)} < 1 \quad (15)$$

$$-\frac{(v_1 - v_2)v_b(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_1 + v_b)(v_2 + Bv_b)} < 1 \quad (16)$$

(16) 式は収束領域と一致し、 B が増加するにつれ収束領域は減少する。しかし、(15) 式は一致しない。従って、他の条件が考えられる。 $\epsilon_i^{(t+1)}$ は以下の式で示すこともできる。

$$\epsilon_2^{(t+1)} = \alpha \epsilon_3^{(t)}$$

$$\epsilon_3^{(t+1)} = \beta \epsilon_3^{(t)} - \gamma \epsilon_2^{(t)}$$

ただし、 α, β, γ はこの場合以下のようになる。

$$\alpha = \frac{v_1(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_1 + v_b)}, \quad \beta = \frac{v_2(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_2 + Bv_b)}$$

$$\gamma = \frac{v_2 + v_b}{v_2 + Bv_b}$$

この漸化式に関して誤差 $\epsilon_i^{(t+1)}$ がゼロに近づく条件は $\alpha\gamma < 1$ となり、この条件に上の数値を代入することにより、下の式が求められる。

$$\frac{Bv_3v_b + v_1((B-1)v_3 - Bv_b)}{Bv_1 - v_3} < v_2 \quad (17)$$

(17) 式と図 7 とは完全には一致しない。これはシミュレーション回数の問題であり回数以内に収束しなかったことと、ブロッキングを起こすことによって収束できなくなり、従来研究 [5] で示した $v_1 = v_3$ の場合と同様に周期的な作業開始位置になっていることによる。

(c) $\hat{x}_2 < x_L, \hat{x}_3 > x_U$ の場合

この場合における収束条件を求める上でも前述の $\epsilon_2^{(t+1)}$, $\epsilon_3^{(t+1)}$ から導出すると (a) の (13), (14) 式と完全に一致する。しかし、図 6,8 において、収束領域が (13), (14) 式と完全に一致しない。(a) と同様に作業員の作業開始位置が他の領域を移行することにより、収束領域が減少することが原因である。この場合、作業員は周期 2 で領域を移動していたことから、2 サイクル分の誤差を求めることによって収束領域が求まる。

(d) $x_L \leq \hat{x}_2, \hat{x}_3 \leq x_U$ の場合

この場合における収束条件を求める上でも前述の $\epsilon_2^{(t+1)}$, $\epsilon_3^{(t+1)}$ から以下の式が導出される。

$$\frac{v_1(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_1 + Bv_b)} < 1 \quad (18)$$

$$-\frac{B(v_1 - v_2)v_b(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + Bv_b)(v_2 + v_b)} < 1 \quad (19)$$

(18) 式を展開すると $v_1 < v_3$ となる。(19) 式は B が増加するにつれ収束領域は減少する。

(e) $x_L \leq \hat{x}_2 \leq x_U < \hat{x}_3$ の場合

これはボトルネック区間が上流にあるときのみ現れる。この場合における収束条件を求める上でも前述の $\epsilon_2^{(t+1)}$, $\epsilon_3^{(t+1)}$ から以下の式が導出される。

$$\frac{v_1(v_3 + v_b)}{v_3(v_1 + Bv_b)} < 1 \quad (20)$$

$$-\frac{(Bv_1 - v_2)v_b(v_3 + Bv_b)}{v_3(v_1 + v_b)(v_2 + Bv_b)} < 1 \quad (21)$$

(21) 式は収束領域と一致し、 B が増加するにつれ収束領域は減少する傾向にある。しかし、(20) 式は図 7 と完全には一致しない。従って、他の条件が考えられ、(b) と同様な手法で求めることができ、下の式で表される。

$$\frac{Bv_3v_b + v_1(v_3 - B(v_3 + v_b))}{v_1 - Bv_3} < v_2 \quad (22)$$

この曲線と図 7 とは完全には一致しない。(b) と同様に、シミュレーション回数的问题とブロッキングによって収束できなくなったことが原因である。

(f) $x_U < \hat{x}_2, \hat{x}_3$ の場合

ラインの上流にボトルネック区間が存在する場合のみ考える必要がある。この場合における収束条件を求める上でも前述の $\epsilon_2^{(t+1)}, \epsilon_3^{(t+1)}$ から導出すると (a) の (13), (14) 式と完全に一致する。しかし、図 7 において、収束領域が完全に一致しない。これは、作業開始位置が (e) の領域に入ることにより、下の (23) 式に示されているように、 $\epsilon_3^{(t+1)}$ が $\epsilon_2^{(t)}$ により増加する可能性があるからである。つまり、 $x_2^{(0)}$ に影響し、 $x_2^{(0)}$ が収束点に近いほど収束領域が広がる。

$$\epsilon_3^{(t+1)} = \frac{v_2 + Bv_b}{v_2 + v_b} \epsilon_2^{(t)} - \frac{v_2(v_3 + v_b)}{v_3(v_2 + v_b)} \epsilon_3^{(t)} \quad (23)$$

以上をまとめると、要因ごとの影響は次のようになる。

- 区間の単位長さあたりの処理量 B が増加するに従って、収束点がボトルネック区間の範囲内である (b) や (d) の領域が増加する。それに従って、収束領域も B が大きくなるに従って減少する。
- 区間の上限、下限 (x_L, x_U) が変化するにつれて領域の大きさが異なってくる。それに従って、上で述べた領域ごとの収束領域によって領域が変化する。
- 区間の長さ ($x_U - x_L$) が増加するに従って、 B と同様に収束点がボトルネック区間の範囲内である (b) や (d) の領域が増加する。それに従って、収束領域も長さが大きくなるに従って減少する。

次に、収束時の生産率も影響する要因別に示し、処理量 B に対して図 9、上限、下限 (x_U, x_L) に対して図 10、長さ ($x_U - x_L$) に対して図 11 にそれぞれ示す。これらの図は作業員 3 人 ($n = 3$) で、作業員 3 の作業速度を 5 に固定し、残り 2 人の作業速度を $v_2 = 5 - v_1$ とし v_1 を変化させ、生産率が最大となる v_1 の値を示している。なお、戻り速度 $v_b = 10$ とし、 $B = 1$ は従来研究 [4] で求められたボトルネック区間が存在しない場合の生産率を示している。戻り時間を考慮する場合、生産率は従来研究 [1] で述べられているような各作業員の作業速度の和でなく、並びによって生産率は変化し、これは従来研究 [4] で述べられている。

この結果、図 9 では B が増加するにつれて、図 11 では区間の長さが長くなるにつれて生産率は減少している。この理由として、実質的にラインの長さが長くなることにより、作業時間が増加することによる。また、最大になる点が従来研究 [4] で求められた $v_1 = 2.5$ よりも減少している。この理由として、図 3 でも示しているように、ボトルネック区間の存在によって区内では作業時間は増加するが戻り時間は増加しない、つまり作業時間と戻り時間は比例せず、従って従来研究 [4] と同じ結果にはならないからである。加えて上の例では、多くのボトルネック区間を作業員 2 が作業

をすることになり、ゆえに作業員 2 の速度が作業員 1 より速いとバランスがとれ高い生産率が確保できる。

図 10 では、位置によって最大になる点や形が変化しているが生産率の変動があまりない。この理由としては、ラインの拡張量が 0.3 と全ての条件で同じだからであり、従って、前節と同様に収束点や生産率もあまり変化しない。一般的に、3.1 節で述べた Δ_B が同じならばブロッキングを起こさない限り各作業員の作業量はほとんど変わらないことから、収束時の生産率はほとんど変わらない。

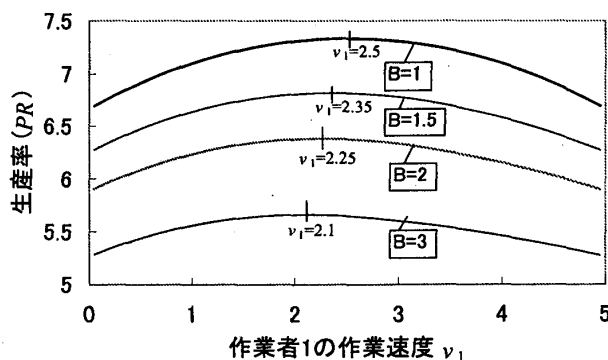


図 9 区間の単位あたりの処理量 B による生産率 (PR) の推移 $x_L = 0.4, x_U = 0.6$

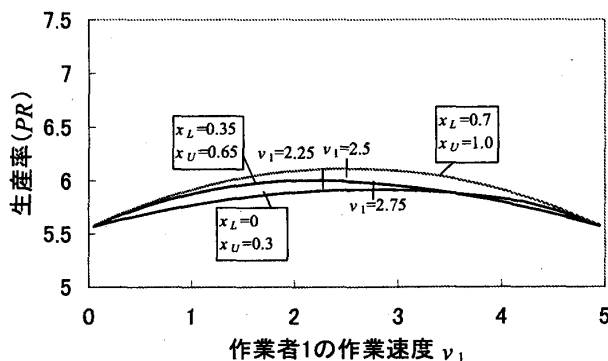


図 10 区間の上限、下限 (x_L, x_U) による生産率 (PR) の推移 $B = 2, \text{長さ} = 0.3$

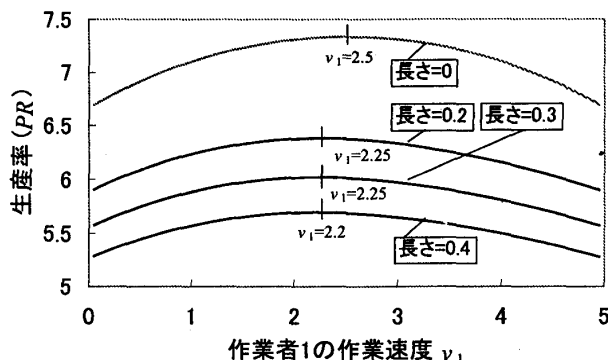


図 11 区間の長さ ($x_U - x_L$) による生産率 (PR) の推移 $B = 2, x_L = 0.4$

5. 終わりに

本研究では、自己バラン斯拉インにおいて、ボトルネック区間が存在する場合の解析を行った。まず、戻る時間を無視する場合と考慮する場合の両方に対して作業者の作業開始位置を定式化し、ラインがバランスする条件やそのときの生産率について解析した。その結果、戻る時間を無視する場合は、ボトルネック区間に対してラインの長さを仮想的に拡張することによって従来研究と同様に解析が可能になり、その結果、収束点や生産率が影響されるが、収束条件は変化しないことを明らかにした。また、戻る時間を考慮する場合には、作業者の各サイクルにおける作業開始位置が複雑な式で表され、それによって収束領域や最適な生産率も従来研究と比較して変化することが分かった。

本研究ではボトルネック区間が1つのラインを考えている。区間がいくつか存在し、その区間内で処理量が増えるラインの解析は今後の課題といえる。

参考文献

- [1] Bartholdi, J. J. and Eisenstein, D. D.: "A Production Line That Balances Itself", *Oper. Res.*, Vol. 44, No. 1, pp. 21-34 (1996)
- [2] Bartholdi, J. J. and Bunimovich, L. A.: "Dynamics of Two- and Three-worker "Bucket Brigade" Production Lines", *Oper. Res.*, Vol. 47, No. 3, pp. 488-491 (1999)
- [3] 広谷大助, 森川克己, 高橋勝彦: "自己バランス機能を備えた生産ラインの解析", 日本経営工学会論文誌, Vol. 56, No. 3, pp. 155-163 (2005)
- [4] 広谷大助, 森川克己, 高橋勝彦: "戻る時間を考慮した自己バラン斯拉インの解析", 日本経営工学会論文誌, Vol. 57, No. 5, pp. 338-344 (2006)
- [5] Hirotani D., Myreshka, Morikawa K., and Takahashi K.: "Analysis and Design of Self-balancing Production Line", *Comput. & Indust. Eng.*, Vol. 50, No. 4, pp. 488-502 (2006)