

構造変化とボラティリティの持続性*

得 津 康 義

1. はじめに

証券市場にショックが生じた場合に、その影響が株価収益率の分散にしばらく続くことがあり、これをボラティリティの持続性という。過去の分散が現在の分散に影響を及ぼすモデルとしてARCHモデル(Autoregressive Conditional Heteroskedasticity)¹、ならびに、それを発展させたGARCHモデル(Generalized ARCH)²がある。これらのモデルの金融時系列データへの適用がBollerslev, Chou and Kroner (1992)によって示され、金融時系列データのボラティリティの構造に関する研究は盛んに行われてきている。

株価収益率を代表とする金融時系列データのボラティリティは、時間とともに変動し、持続性が観察されることは良く知られている。GARCHモデルによりボラティリティの構造をモデル化し、ボラティリティに持続性があるかどうかは、分散過程のパラメーターが単位根であるかどうかで評価する。株価収益率にGARCHモデルを当てはめた場合、ボラティリティの持続性の目安となる分散過程のパラメーターの合計が1に近づきやすい³。つまり推定されたパラメーターから遠い過去の影響が現在の分散に影響していることになる。

この原因を探るために、1. 分散過程の説明変数が欠落しているという方向⁴と2. 分散過程に構造変化が生じているという方向⁵の2通りの研究がなされている。分散過程に構造変化が生じているにもかかわらず、それを無視してGARCHモデルを推定した場合に、その結果はボラティリティに持続性があることを示す傾向があるという、いわゆる想定誤差の問題は、Diebold (1986)によって提起され、その後も様々な研究がなされている。近年の代表的な論文にLamourex and Lastrapes (1990b)がある。彼らは、長期の株価データにGARCHをあてはめた場合、無条件分散がシフトしたにもかかわらず、分析者がこれらのシフトをモデルに含めなかったためボラティリティは持続性を示す、という現象について制約付きの分散方程式と制約なしの分散方程式を使って分析を行っている。さらに無条件分散が複数回シフトした場合について、モンテカルロ・シミュレーションを行っている。結果として、GARCHモデルで見た場合のボラティリティの持続性は、モデルの想定誤差に影響されやすいとしている。

本稿では、次節において、分散過程に構造変化が生じているモデルについてモンテカルロ・シミュレーションを行っている。先行研究がGARCHモデルについて、1つのモデルに対して特定のパラメーターしか採用してないのに対して、2通りのモデルについて、様々なGARCHパラメーターについて分析を行った。第3節において、第2節でのモデルの状況に近い例として、日経平均株価を用いて構造変化が生じていると考えられる期間と生じていないと考えられる期間においてGARCHパラメーターの推計し結果の比較を行った。第4節においては、本稿のまとめと今後の研究方向について述べている。

*本稿を作成するにあたり、広島大学の前川功一教授にご指導を受けた。ここに記して深く感謝したい。

1 Engel (1982)

2 Bollerslev (1986)

3 Takabayashi, Pinto DosSantos, and Maekawa (1997)

4 Omran and Mckenzie (2000), 鈴木・得津 (2002)

5 Simonato (1992), Fong (1997)

2. モンテカルロ・シミュレーション

本稿でのモデルのデータ生成プロセスは、以下に示す2つのモデルである。

モデル 1

$$y_t = 0.95 + \xi_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \quad (t=1, 2, \dots, T) \quad (1)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \times \xi_t \quad \xi_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (2)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (3)$$

$$\alpha = 0.1 \sim 0.8, \beta = 0.1 \sim 0.8$$

$$\omega = \begin{cases} 0.5 & t \leq \frac{T}{2} \\ 1.5 & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

モデル 2

$$y_t = 0.95y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \quad (t=1, 2, \dots, T) \quad (4)$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \times \xi_t \quad \xi_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (5)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (6)$$

$$\alpha = 0.1 \sim 0.8, \beta = 0.1 \sim 0.8$$

$$\omega = \begin{cases} 0.5 & t \leq \frac{T}{2} \\ 1.5 & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

上記の様に分散過程のパラメーターであるについて、期間の中間点でジャンプがあると想定の下でデータを発生させた。これらのモデルの想定は、GRACHモデルでの無条件分散が $V[\varepsilon_t] = \frac{\omega}{1 - (\alpha + \beta)}$ であるので、標本期間の途中において無条件分散がシフトしたことを意味する。本稿では、このように期間の途中で分散過程のパラメーターがシフトとすることを構造変化としている。

しばしばデータ分析者は、無条件分散がシフトしているにもかかわらず、得られたデータセットについてGARCHモデルを当てはめることが多い。そこで上記の構造変化を含むモデルで生成された y_t について、構造変化がないという想定の下でGARCHパラメーターを推定した場合、推定されたパラメーターにいかなるバイアスが生じるかを以下に示す。モデル1に関して言えば、構造変化を見落として以下の式を推定することになる。

推定するGARCHモデル

$$y_t = C + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \quad (7)$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \quad (8)$$

表2-1 推定されたGARCHパラメーター ($0.1 \leq \alpha \leq 0.3$)

$\alpha=0.1$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta=0.1$	0.95	0.01	0.95	0.04	0.99	0.20
$\beta=0.2$	0.95	0.01	0.94	0.05	0.99	0.30
$\beta=0.3$	0.95	0.02	0.94	0.05	0.99	0.40
$\beta=0.4$	0.95	0.02	0.94	0.05	0.99	0.50
$\beta=0.5$	0.95	0.03	0.93	0.06	0.99	0.60
$\beta=0.6$	0.95	0.05	0.92	0.06	0.99	0.70
$\beta=0.7$	0.95	0.09	0.90	0.08	0.98	0.80
$\beta=0.8$	0.95	0.18	0.89	0.10	0.98	0.90
$\alpha=0.2$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta=0.1$	0.95	0.03	0.90	0.08	0.98	0.30
$\beta=0.2$	0.95	0.05	0.88	0.09	0.97	0.40
$\beta=0.3$	0.95	0.07	0.87	0.10	0.97	0.50
$\beta=0.4$	0.95	0.10	0.84	0.13	0.96	0.60
$\beta=0.5$	0.95	0.15	0.81	0.15	0.96	0.70
$\beta=0.6$	0.95	0.25	0.77	0.19	0.96	0.80
$\beta=0.7$	0.95	0.37	0.77	0.20	0.97	0.90
$\alpha=0.3$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta=0.1$	0.95	0.18	0.70	0.20	0.90	0.40
$\beta=0.2$	0.95	0.22	0.68	0.22	0.90	0.50
$\beta=0.3$	0.95	0.27	0.65	0.26	0.90	0.60
$\beta=0.4$	0.95	0.34	0.63	0.28	0.91	0.70
$\beta=0.5$	0.95	0.40	0.64	0.29	0.93	0.80
$\beta=0.6$	0.95	0.49	0.66	0.31	0.97	0.90

表2-1は、真のパラメーター α が0.1以上0.3以下の場合について、系列の長さ(T)を1000、繰返しの回数を1000としたときの推定されたパラメーターの平均値である。(α が0.4以上の場合には付表1を参照。) 表2-1および付表1からすべての場合について、構造変化が生じているにもかかわらず、それを無視してGARCHモデルを推定した場合、平均方程式の定数項は真の値を推定する。しかし、 β の推定値は上方に偏りのある推定値が得られ、その結果ボラティリティは持続性を示す結果になった⁶。さらにデータ生成プロセスで、 α が小さい場合には、 α の推定値は下方に偏りが生じる結果となった。

6 Lumsdaine(1995)で指摘されているように、本稿で行っている構造変化がなくても、有限標本において α が小さい場合やパラメーターが境界付近の場合、 ω と β の推定値は区別できない。

そこで、構造変化が生じた後では1をとるダミー変数を分散過程に入れて推定をし直してみる。推定するGARCHモデルは以下の通りである。

ダミー変数を含めたGARCHモデル。

$$y_t = C + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \tag{9}$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} + \gamma DUM \tag{10}$$

$$DUM = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{T}{2} \\ 1 & \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases}$$

表2-2 ダミー変数を含めた場合のパラメーターの推定値 (0.1 ≤ α ≤ 0.3)

α=0.1	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
β=0.1	0.95	0.39	0.28	0.09	0.79	0.37	0.20
β=0.2	0.95	0.42	0.32	0.09	0.84	0.41	0.30
β=0.3	0.95	0.45	0.37	0.09	0.91	0.45	0.40
β=0.4	0.95	0.48	0.42	0.09	0.97	0.51	0.50
β=0.5	0.95	0.54	0.47	0.10	1.06	0.57	0.60
β=0.6	0.95	0.57	0.56	0.10	1.16	0.65	0.70
β=0.7	0.95	0.63	0.64	0.10	1.26	0.75	0.80
β=0.8	0.95	0.66	0.76	0.10	1.34	0.86	0.90
α=0.2	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
β=0.1	0.95	0.47	0.15	0.19	0.94	0.35	0.30
β=0.2	0.95	0.49	0.22	0.19	0.98	0.41	0.40
β=0.3	0.95	0.50	0.31	0.19	1.01	0.50	0.50
β=0.4	0.95	0.52	0.38	0.20	1.05	0.58	0.60
β=0.5	0.95	0.53	0.48	0.20	1.07	0.68	0.70
β=0.6	0.95	0.55	0.58	0.20	1.10	0.78	0.80
β=0.7	0.95	0.56	0.68	0.20	1.16	0.88	0.90
α=0.3	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
β=0.1	0.95	0.48	0.13	0.29	0.97	0.42	0.40
β=0.2	0.95	0.51	0.20	0.29	1.01	0.49	0.50
β=0.3	0.95	0.51	0.29	0.29	1.04	0.59	0.60
β=0.4	0.95	0.52	0.38	0.30	1.04	0.68	0.70
β=0.5	0.95	0.52	0.49	0.30	1.04	0.79	0.80
β=0.6	0.95	0.54	0.58	0.30	1.09	0.89	0.90

表2-2および付表2より、ダミー変数を分散過程に含めることにより、推定されたパラメータは真の値に近い値を得られることが示された。このことから金融時系列データにGARCHモデルを当てはめたときにIGARCH($\alpha + \beta = 1$)になりやすい要因の一つとして分散過程の想定誤差を挙げることができる。さらに上記で定義したモデル2に関しても、 y_{t-1} の係数が単位根に近い値にもかかわらず、同様の結果が得られた。

3. 日経平均株価での分析

本節では、日経平均株価を用いて実証分析を行う。周知の通り2000年4月に日経平均株価の構成銘柄が大幅に組替えられた。本稿では、この大幅な組換えは分散過程に構造変化をもたらし、その結果、それを無視してGARCHモデルを推定した場合にはIGARCHになりやすいという予想の下で分析を行っている。

本稿でのデータ期間は、1988年1月4日から2000年12月29日とし、以下に定義した日次収益率を用いて分析を行っている。

$$r_t = \log(P_t/P_{t-1}) \times 100 \quad P_t \text{は } t \text{ 日の日経平均株価の終値}$$

分散過程に構造変化が生じているかどうかを見るために、以下に定義する累積無条件分散推定量 (UVE: Unconditional Variance Estimator) とCusum square Test (Inca'n and Tio (1994)) を利用した。彼らはCusum square Testにおける検定統計量 $\sqrt{T/2} |D_k|$ は、分散が均一分散であるという帰無仮説の下で、漸近的にStandard Brownian Bridgeに従うことを示した。

Cusum square Test

$$D_k = \frac{C_k}{C_n} - \frac{k}{n} \quad C_k = \sum_{i=1}^k a_i^2 \quad a_i \sim i.i.d.N(0, \sigma_i^2)$$

$$\sqrt{T/2} D_k \xrightarrow{d} W^0$$

ここで W^0 はStandard Brownian Bridge

累積無条件分散推定量: S_t

$$S_t = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T \left(y_i - \frac{1}{T} \sum_{j=1}^T y_j \right)^2$$

利用可能な全期間 (1988年1月4日~2000年12月29日) における累積無条件分散推定量のグラフを以下に図示する。この図では、垂直方向へのジャンプが構造変化点を表している。

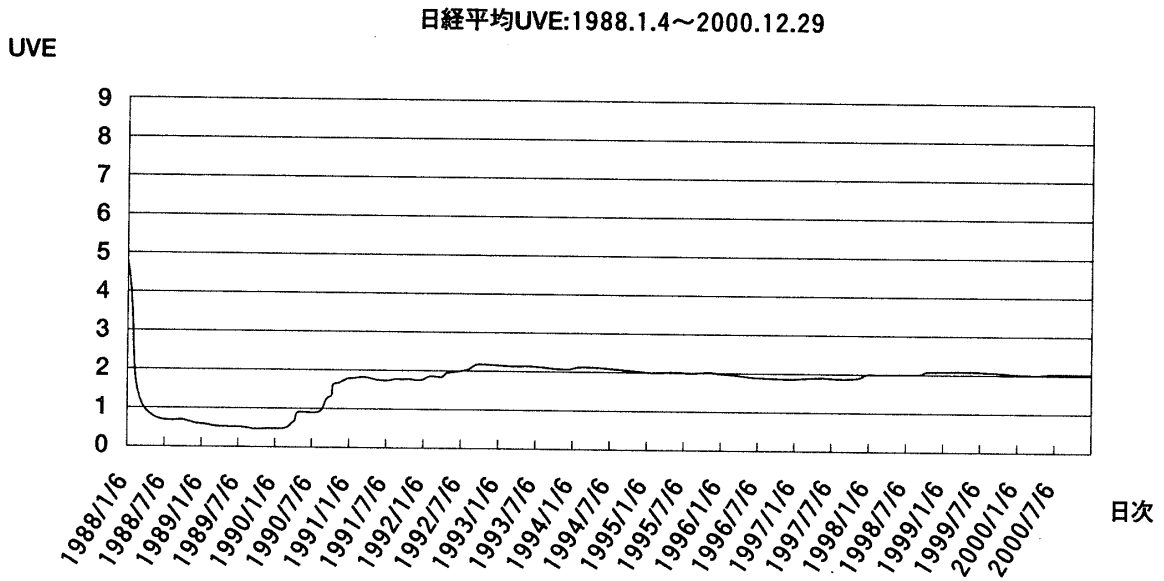


図3-1 全期間でのUVE

全期間での分散過程の構造変化は様々な要因を受けており、上記のグラフはそれらを表している。本稿では、2000年4月における日経平均株価の構成銘柄の大幅組換えを焦点に当てているため、1999年1月4日から2000年12月29日までのUVEを再度計算し、2000年1月4日から2000年12月29日のUVEを以下に示す。

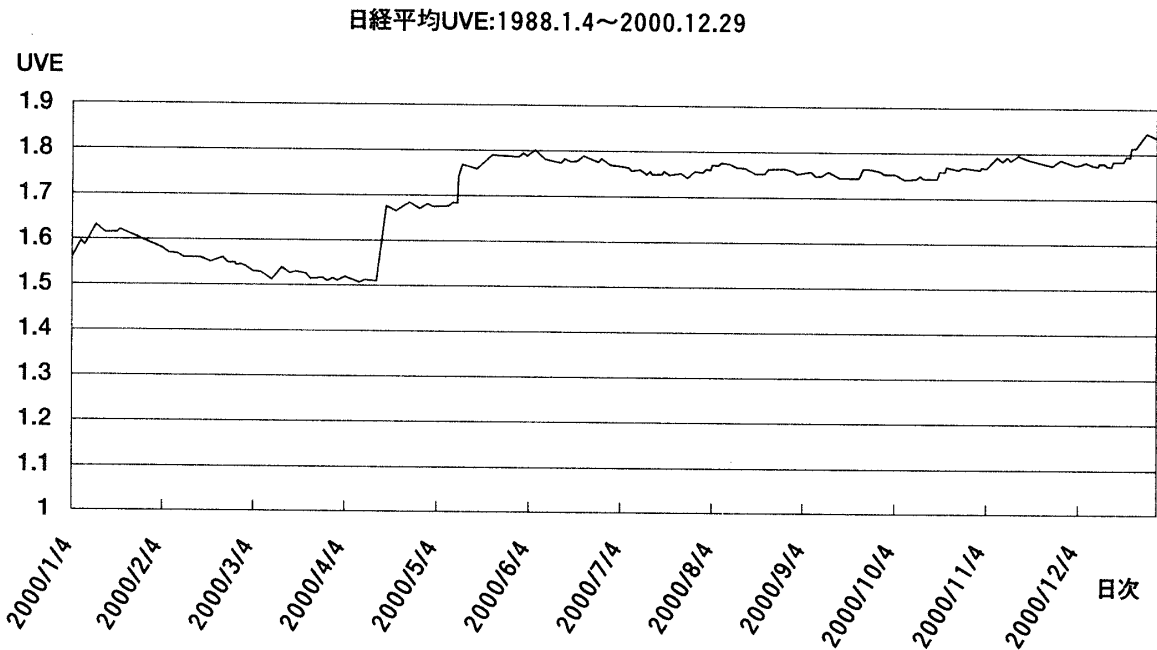


図3-2 抽出期間でのUVE

上記の図から2000年4月14日頃から推定値が上方にシフトし始めていることが示され、この期間に構造変化が生じていることが分かる。次に1999年1月4日から2000年12月29日までのCusum square Testの結果をグラフに表すと以下のようなになる。

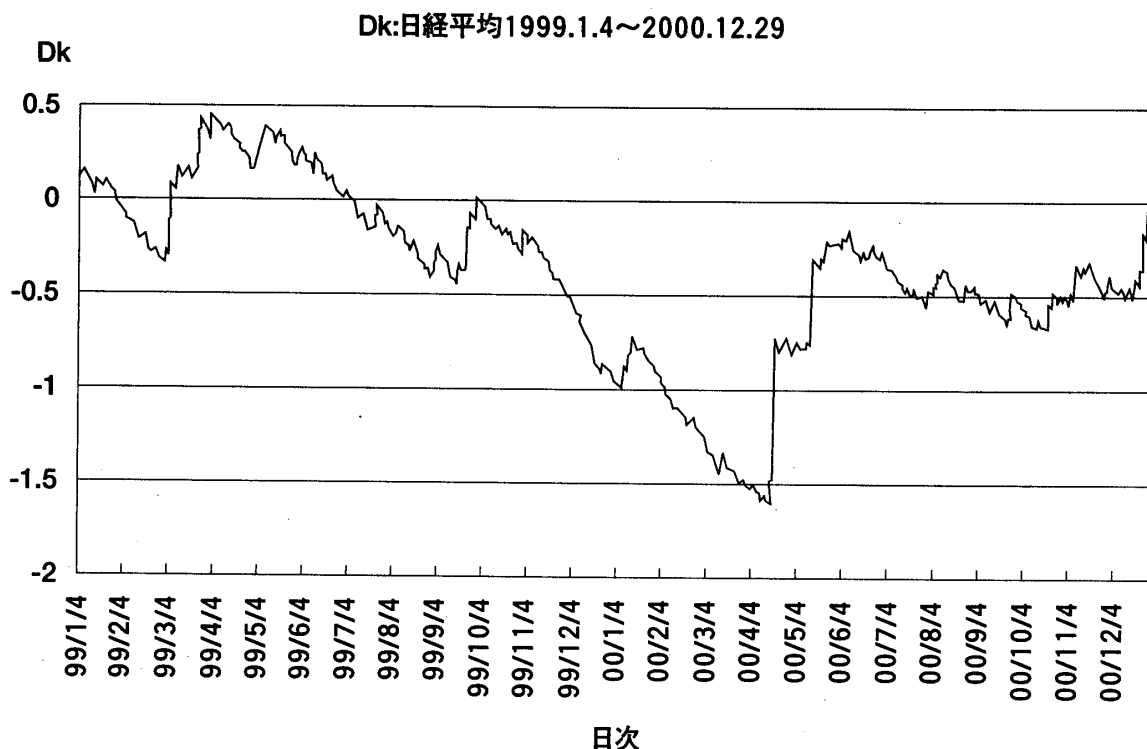


図3-3 抽出期間での D_k

検定統計量 $\sqrt{T/2} |D_k|$ は Standard Brownian Bridge の 5% の臨界値 1.358 を超えた場合 5% の有意水準で帰無仮説を棄却することになる⁷。図3-3 から $\sqrt{T/2} |D_k|$ が臨界値を超えピークに達している点は、2000年4月14日であり、この時期に構造変化が生じたことを捉えている。

以上の2通りの分析から、2000年4月14日頃から日経平均株価収益率の分散過程に構造変化が生じた可能性があると考えることが出来る。実際に組入れ銘柄が変更されたのは、2000年4月24日であるが、発表されたのが同年の4月15日であるため、これらの結果は市場参加者が情報に反応したためだと考えられる。

そこで、上記のように分散過程に構造変化があるにもかかわらず、それを無視して GARCH パラメーターを推定してみるとボラティリティのショックに対する持続性の目安である $(\alpha + \beta)$ は 1 に近い値をとるかどうかなを見てみる。推定する式は以下の通りである。

$$r_t = C + \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim N(0, h_t) \tag{11}$$

$$\varepsilon_t = \sqrt{h_t} \times \zeta_t \quad \zeta_t \sim i.i.d. N(0, 1) \tag{12}$$

$$h_t = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta h_{t-1} \tag{13}$$

1999年1月4日から2000年12月29日までの推定されたパラメーターは以下のようになる。

7 Inca'n and Tio(1994), pp. 914 Table 1

表3-1 推定されたパラメーター

\hat{C}	0.02
$\hat{\omega}$	0.16
$\hat{\alpha}$	0.02
$\hat{\beta}$	0.89
$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	0.91

この表から、ボラティリティのショックに対する持続性を示すパラメーター $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ は0.91となる。分散過程の構造変化を無視することにより、推定されたパラメーターがボラティリティのショックに対する持続性を示す結果になったのかどうかを調べるために、分散過程に構造変化が生じていないと考えられる期間でのパラメーターの推定値を見る必要がある。考えられる期間としては、Cusum square testの結果から1998年11月25日から2000年4月13日とした。この期間でのGARCHパラメーターの推定値は以下の表になる。

表3-2 推定されたパラメーター

\hat{C}	0.10
$\hat{\omega}$	0.50
$\hat{\alpha}$	0.04
$\hat{\beta}$	0.64
$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	0.68

表3-2から分散過程に構造変化が生じていない期間におけるパラメーターの推定値の合計 ($\alpha + \beta$) は、構造変化が生じている期間のパラメーターより小さい値を推定する。

以上の結果から2000年4月における日経平均株価の銘柄組換えは分散に構造変化をもたらし、その結果、それを無視してGARCH推定を行った場合には、ボラティリティの持続性を示す結果となった。

4. おわりに

本稿では、金融時系列にGRACHモデルを当てはめた場合に、推定された結果はIGARCHになりやすいという現象は、分散過程に構造変化が生じているにもかかわらず、それを無視して推定を行ったためではないか問題意識の下、シミュレーションを行った。さらに、そのような状況に近い例として日経平均株価を用いて実証分析を行った。

モンテカルロ・シミュレーションの結果、データ生成プロセスにおいて分散過程のパラメーターである ω をサンプル期間の途中で変化させた場合、推定結果は β が上方に偏りのある推定値が得られ、その結果ボラティリティのショックに対する持続性を示すことになった。

実証分析の結果、日経平均株価の大幅な組換えは分散過程に構造変化をもたらし、それを考慮に入れずGARCHモデルを推定した場合には、構造変化がないと考えられる期間よりボラティリティが持続するという結果が得られた。

今後の研究課題としては、まず、このような現象が生じる原因を解析的に明らかにすることである。これについては、Hamilton (1994) のアイデア⁸が有効的であると考えられる。

次に、本稿では分散過程に構造変化が生じているかどうかを調べるために、累積無条件分散推定量とCusum square Testのみを用いた。これらは視覚的な判断をするものであるため、得られたGARCHパラメーターから構造変化を発見できる検定統計量を導き出すことである⁹。

8 Hamilton(1994), pp.449-450.

9 これについてはKim, Cho, and Lee, (2000)によって検定統計量が導き出しているが、その統計量には改善の余地が残されている。

付表1 推計されたGARCHパラメーター ($\alpha \geq 0.4$)

$\alpha = 0.4$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.44	0.42	0.38	0.80	0.50
$\beta = 0.2$	0.95	0.45	0.45	0.39	0.84	0.60
$\beta = 0.3$	0.95	0.47	0.48	0.40	0.88	0.70
$\beta = 0.4$	0.95	0.50	0.52	0.40	0.92	0.80
$\beta = 0.5$	0.95	0.56	0.56	0.40	0.96	0.90
$\alpha = 0.5$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.58	0.28	0.52	0.79	0.60
$\beta = 0.2$	0.95	0.57	0.34	0.51	0.86	0.70
$\beta = 0.3$	0.95	0.59	0.40	0.51	0.91	0.80
$\beta = 0.4$	0.95	0.61	0.46	0.50	0.96	0.90
$\alpha = 0.6$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.66	0.21	0.63	0.84	0.70
$\beta = 0.2$	0.95	0.65	0.29	0.62	0.90	0.80
$\beta = 0.3$	0.95	0.66	0.36	0.60	0.96	0.90
$\alpha = 0.7$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.71	0.17	0.73	0.90	0.80
$\beta = 0.2$	0.95	0.70	0.26	0.70	0.96	0.90
$\alpha = 0.8$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.75	0.15	0.80	0.95	0.90

付表2 推計されたGARCHパラメーター ($\alpha \geq 0.4$)

$\alpha = 0.4$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.50	0.10	0.39	1.00	0.50	0.50
$\beta = 0.2$	0.95	0.51	0.20	0.39	1.02	0.59	0.60
$\beta = 0.3$	0.95	0.51	0.30	0.39	1.02	0.69	0.70
$\beta = 0.4$	0.95	0.52	0.39	0.40	1.04	0.79	0.80
$\beta = 0.5$	0.95	0.53	0.49	0.40	1.06	0.89	0.90
$\alpha = 0.5$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.50	0.10	0.49	1.01	0.60	0.60
$\beta = 0.2$	0.95	0.50	0.20	0.49	1.01	0.70	0.70
$\beta = 0.3$	0.95	0.51	0.29	0.50	1.04	0.79	0.80
$\beta = 0.4$	0.95	0.52	0.39	0.50	1.04	0.89	0.90
$\alpha = 0.6$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.50	0.11	0.59	1.01	0.70	0.70
$\beta = 0.2$	0.95	0.51	0.20	0.59	1.01	0.79	0.80
$\beta = 0.3$	0.95	0.51	0.29	0.60	1.03	0.89	0.90
$\alpha = 0.7$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.50	0.10	0.69	1.01	0.80	0.80
$\beta = 0.2$	0.95	0.50	0.20	0.69	1.01	0.89	0.90
$\alpha = 0.8$	\hat{C}	$\hat{\omega}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$	$\alpha + \beta$
$\beta = 0.1$	0.95	0.50	0.10	0.78	1.01	0.89	0.90

参考文献

- [1] Bollerslev, T. (1986) "Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity," *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [2] Bollerslev, T., Chou, R. Y. and Kroner, K. F. (1992) "ARCH modeling in finance: A review of theory and empirical evidence," *Journal of Econometrics*, 52, 5-59.
- [3] Diebold, F. X. (1986) "Modeling the persistence of conditional variance: A comment," *Econometric Review*, 5, 51-56.
- [4] Engel, R. F. (1982) "Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the United Kingdom inflation," *Econometrica*, 50, 987-1007.
- [5] Gourieroux, C. (1997) *ARCH Models and Financial Applications*, Springer, New York.
- [6] Hamilton, J. D. (1994) *Time Series Analysis*, Princeton University press, New Jersey.
- [7] Hamilton, J. D., Susmel, R., (1994) "Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime," *Journal of Econometrics*, 64, 307-333.
- [8] Inca'n, C., Tiao, G. (1994) "Use of cumulative sums of square for retrospective detection of changes of variance," *Journal of the American Statistical Association*, 89, 913-923.
- [9] Kim, S., Cho, S. and Lee, S., (2000) "On the cusum test for parameter changes in GARCH (1,1) models," *Communications in statistics. Theory and methods*, 29, 445-462.
- [10] Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D. (1990a) "Heteroskedasticity in stock returns data: volume versus GARCH effects," *Journal of Finance*, 45, 221-9.
- [11] Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D. (1990b) "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model," *Journal of Business & Economic Statistics*, 8(2), 225-34.
- [12] Lamoureux, C. G., Lastrapes, W. D. (1994) "Endogenous Trading Volume and Momentum in Stock-Return Volatility," *Journal of Business & Economic Statistics*, 12, 253-60.
- [13] Lumsdaine, R. L. (1995) "Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation," *Journal of Business & Economic Statistics*, 13, 1-10.
- [14] Omran, M. F., Mckenzie, E. (2000) "Heteroskedasticity in stock returns data revisited: volume versus GARCH effects," *Applied Financial Economics*, 10, 553-560.
- [15] Simonato, J. G, (1992) "Estimation of GARCH process in the presence of structural change," *Economics Letters*, 155-158.
- [16] Takabayashi, K, Pinto DosSantos, J. M. and Maekawa, K. (1997) "Effects of Stock Price Volatility on Consumption: A Comparison between Japan and the UK," 広島大学経済研究双書, 11, 273-294
- [17] Fong, W. M. (1997) "Volatility Persistence and Switching ARCH in Japanese Stock Returns," *Financial Engineering and the Japanese Markets*, 4, 37-57.
- [18] 鈴木喜久・得津康義(2002)「トレンドがある下での株価変動と売買高との関係」, 『広島大学経済論叢』第26巻第1・2号.
- [19] 渡部敏明(2000)『ボラティリティ変動モデル』朝倉書店.