繰り返し囚人のジレンマゲームにおけるオストラシズムの役割*

野　村　良　一[†]
岡　村　　　誠[‡]

1. はじめに

囚人のジレンマ的状況において、いかにして協力が実現するのかという問題に関しては、繰り返しゲームを用いた諸研究がある。例えば、Kandori（1992）は、囚人のジレンマ的状況におけるランダムマッチングの繰り返しゲームを用いて、ある社会規範によって効率的な結果（"contagious" equilibrium）がもたらされることを、加えて、取引相手の履歴の識別が可能ならば頑健性のある帰結がもたらされることを示している。また、Okuno-Fujiwara and Postlewaite（1995）は、共通知識を想定できないような大規模な社会においても、社会規範と行動基準によって協力的な均衡が実現しうることを示している。さらに、青木（2001）やSpagnolo（1999）はlinked gameの枠組みを用いて、他の協力的な社会関係が存在する場合には、単独では実現しない協力的な均衡が実現しうることを指摘している。

無限繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて、各プレイヤーが十分に将来を重視するとき、トリガー戦略によって協力的な均衡が実現することはよく知られている。それは非協力者に対して、次回以降協力しないという脅しによってもたらされるものであるが、現実社会には、単に将来協力しないというだけでなく、逸脱者を社会から実質的に排除するという脅し（ostracism）が多くみられる。例えばギリシャにおける陶片追放や日本の村八分のような、非協力者を社会から排除するというシステムによって、社会における協力が維持されるケースである。トリガー戦略が逸脱者には非協力を採り続けるのに対して、オストラシズムは逸脱者を社会から排除するより強い懲罰である。またオストラシズムは、逸脱者をゲームそのものから排除する点において、トリガー戦略とは大きく異なるといえる。

繰り返しゲームの枠組みで、オストラシズムを取り扱ったものはあまり見られないが、例外としてHirshleifer and Rasmusen（1989）を挙げることができる。彼らは、多人数繰り返し囚人のジレンマゲームを用いて、たとえ有限繰り返しゲームでも、逸脱者に対するオストラシズムによって、協力が実現することを示している。[1]

ところで、オストラシズムによる逸脱者の排除は、その社会の縮小をもたらすことによって、追放する側にもコストのかかるものである。このことは、社会的ジレンマの状況が現実に多く見られ、それらがオストラシズムによって必ずしも解決されていないことからも明らかである。Hirshleifer and Rasmusenでは、非協力者の存在は常に協力者にとって不利益になると仮定されているが、そこには逸脱者をオストラサイズするにはコストがかかるという側面が必ずしもモデルに反映されていない。オストラシズムの費用を考慮すると、非協力者の存在が常に協力者にとって不利益になるとは限らないといえる。

本稿の目的は、Hirshleifer and Rasmusen（1989）のモデルに基づきつつ、こうした観点から効用関数を特定化したうえで、囚人のジレンマ的状況における協力の実現に対してオストラシズムが機能する条件を考察することである。

まず2節において、Hirshleifer and Rasmusen（1989）を概観し、その意義と問題点を確認する。3節では、効用関数を特定化したうえで、囚人の

*本稿の作成にあたり、立命館大学の大川隆夫助教授より有益なコメントを頂きました。ここに記して感謝いたします。
[†]立命館大学大学院経済学研究科
[‡]広島大学経済学部
[1]青木（2001）も、オストラシズムがあることで協力が実現しうることを指摘しているが、オストラシズムは仮定されているだけで、具体的なメカニズムの考察はなされていない。

ジレンマ的状況においてオストラシズムが協力の実現に機能する条件を検討する。4節でまとめと今後の課題について述べる。

2. Hirshleifer and Rasmusen (1989) の分析概要

この節では、Hirshleifer and Rasmusen (1989) のモデルの基本的構造を述べる。そこでは、多人数有限繰り返し囚人のジレンマゲームにおいて、オストラシズムが協力の促進に有効であることが示されている。

ある財を協力して生産しているグループを想定する[2]。そこでは非協力的な行為に及んだプレイヤーは、社会から1期限り排除される。オストラサイズされていないプレイヤーをメンバーと呼び、メンバーのみで囚人のジレンマゲームをプレイし、社会的便益をメンバー間で等分配する。またグループ内にいること自体で一定の効用（ゼロと基準化）を得るため、オストラシズムはバニッシュメントとなる。オストラシズムは各メンバーの投票 (blackball) からなり、1人のメンバーだけによる投票でも社会ゲームから排除される。また各メンバーは何人に対してでも投票できる。

そこでは、(a) Free Rider Problem、(b) Aggregation Economies、(c) No Aggregation Economies without Cooperation、(d) Excludability of Resources from Non - Members、(e) Costless Enforcementの5つの仮定が置かれている。(p. 90)

ここでメンバー1人当たりの利得を$f(m,n)$で表し、mを協力者数、nをメンバー数、Xを協力戦略を選択したときにかかるコストとすると、(a)は$f(m,n)-X<f(m-1,n)$、(b)は$f(m-1,n-1)<f(m,n)$、(c)は$f(0,n)=0$と表される。

さらに、非協力を選択するメンバーの増加は、1人当たり利得を上昇させないという想定から、

$$f(m,n-1)\geqq f(m,n)$$

が仮定される。ただし、フリーライドの観点から通常は等号を含まないと想定されている。

また、各期においてオストラサイズされることによるペナルティ(Y)は、協力者を裏切ることによる便益を上回るので、

$$Y>X$$

と仮定される。

1つのstage gameは、2つのフェーズから構成される。まずオストラシズムフェーズから始まり、そこでオストラサイズされなかったプレイヤー（メンバー）のみで囚人のジレンマゲームがプレイされる。オストラサイズされたプレイヤーは、再びオストラサイズされない限り、次の期のジレンマフェーズからメンバーに復帰できる。

このような仮定のもと、彼らは、すべてのプレイヤーが以下に示される*Banishment*と呼ばれる戦略を採用している時の、対称的な完全均衡を検討している。

Banishment strategy (p.93-94)

Dilemma phase

最終期の前までは、直前のオストラシズムフェーズにおいて*Banishment*から逸脱していない限り協力し、逸脱した場合は非協力を採る。最終期では非協力を選択する。

Ostracism phase

直前のジレンマフェーズもしくはオストラシズムフェーズで*Banishment*から逸脱したプレイヤーに投票する。それ以外のプレイヤーには投票しない。

ここから以下の結果が導かれる。

結果 (Hirshleifer and Rasmusen (1989)の命題1、p.94)
将来をほとんど割り引かないならば、T期間の有限繰り返しゲームにおいて、T−1期までは協力し続けるという均衡が存在する。

ここでは、すべてのプレイヤーが*Banishment strategy*に従っているとき、最終期に至るまではすべてのプレイヤーが協力し続けるという帰結が部分ゲーム完全均衡での均衡パスとなる。そのためには、すべての部分ゲームにおいていかなるプレイヤーもその均衡から逸脱するインセンティブを持たないことを示す必要がある。以下では、簡単

[2]青木 (2001) は、この財を社会財としている。

化のために３期間モデルに限定してみていく。なお、$\delta \in [0,1]$ はすべてのプレイヤーに共通の割引因子である。

３期のジレンマフェーズ（3^{pd}）では、*Banishment* に従っているプレイヤーは非協力を選択する。仮定より以下の条件が成立するため、どのプレイヤーも逸脱のインセンティブを持たない。

$$f(1,n)-X<f(0,n)=0$$

３期のオストラシズムフェーズ（3^{os}）における逸脱は、*Banishment* に従っているプレイヤーに投票することである。3^{pd} ではすべてのプレイヤーが非協力を選択するので、そのときの利得はメンバー数に関係なくゼロであるが、3^{os} で逸脱した場合、そのプレイヤーはオストラサイズされるため、3^{pd} における利得は $-Y$ となる。したがって、逸脱するインセンティブはない。

2^{pd} において、(a) もし 2^{os} で逸脱していないのであれば、以下の式が成立すれば逸脱するインセンティブは存在しない。

$$f(m,n)-X+\delta\cdot 0>f(m-1,n)+\delta(-Y)$$

(b) もし 2^{os} で逸脱しているならば、

$$-Y+\delta\cdot 0>-Y+\delta(-Y)$$

が成立するので、逸脱のインセンティブはない。

2^{os} では、(a) オストラサイズされることがわかっている場合、

$$0+\delta\cdot 0>0+\delta(-Y)$$

が成立するので逸脱のインセンティブはない。

(b) オストラサイズされない場合、このときの逸脱は、*Banishment* に従っているプレイヤーに投票することである。ここで b 人（$b<n$）に投票したとすると、

$$f(m,n)-X+\delta\cdot 0>f(m-b-1,n-b)+\delta(-Y)$$

が成立すれば、逸脱のインセンティブは存在しない。[3]

1^{pd} および 1^{os} では、

$$f(m,n)-X+\delta(f(m,n)-X)>f(m-1,n)+\delta(-Y)$$

が成立すれば、逸脱のインセンティブは存在しない。

以上より、すべてのプレイヤーが *Banishment* に従っているとき、δ が十分に大きければ、つまり各プレイヤーが十分に将来を重視するならば、最終期に至るまで協力が維持され、最終期のみ非協力が選択されることがわかる。[4]

無限繰り返し囚人のジレンマゲームでは、完全協力も均衡の１つになるが、有限繰り返し囚人のジレンマゲームにおいては、各期において非協力がプレイされ、協力が実現しないことはよく知られている。しかしHirshleifer and Rasmusenは、たとえ有限繰り返しゲームでも、オストラシズムが機能することで非協力がプレイされるのは最終期のみになり、ある条件のもとで、それまでは協力が維持されることを示している。有限繰り返しゲームでも協力が実現するということから、オストラシズムが囚人のジレンマ的状況における協力の促進に対して強力に機能するといえる。

このようにHirshleifer and Rasmusenは、オストラシズムが協力の促進に非常に効果的であることを示しているが、現実社会において彼らが想定するような１期限りのオストラシズムが数多く見られるわけではないし、あらゆる状況でオストラシズムが機能しているわけではない。したがって、彼らの想定する状況と現実には何らかの齟齬があることが考えられる。

オストラシズムによって非協力者を社会から排除することは、通常協力者にとって費用がかかるものである。なぜなら、もし費用がかからないならば社会的ジレンマは容易に解消されるからである。彼らも指摘しているように（p.89）、逸脱者の排除は間接的に残りのすべての協力者にも不利益を与えると考えられる。しかし彼らのモデルでは、逸脱者の排除は常に協力者にとって利益になると仮定されており、オストラシズムがメンバーにとって費用のかかるものであるという側面が明

[3] 残りのメンバー全員に投票するという逸脱の方法もあるが、この場合は逸脱のインセンティブは存在しない。詳細はHirshleifer and Rasmusen (1989), p.96。

[4] T期間のケースおよび厳密な証明は、Hirshleifer and Rasmusen (1989), pp.94-97。

示的に取り扱われていないといえる。なぜなら、そうした観点からは、非協力を選択するメンバーの増加は1人当たり利得を減少させるという想定が常に成り立つとはいえないからである。

次節では、こうした観点からHirshleifer and Rasmusenの仮定に変更を加えたうえで、オストラシズムが機能する条件を検討する。

3. 考　察

彼らのモデルでは、非協力を選択するメンバーの増加は、メンバー1人当たりの利得を増加させず、たいていの場合は減少させる、すなわち、

$$f(m,n-1) \geqq f(m,n)$$

と仮定されている。

しかし、メンバーの増加には、ネットワークの外部性などによって効用を増加させる側面と、混雑現象などが生じることによって効用を減少させる側面があると考えられる。したがって、上述の仮定は、常に成立するとは限らない。

こうした観点から、ここでは社会全体の効用を以下のように特定化する。

$$F(m,n) = mn^2 - an^3 \quad (a > 0)$$

したがって、メンバー1人当たりの効用は、

$$f(m,n) = mn - an^2$$

となる。

効用関数の右辺の第1項は、メンバーの数の増加によって効用が増加する側面を示している。第2項は、メンバー数の増加によって引き起こされる効用の減少を示している。

以下では、メンバーの増加による第1項の限界的な増加分をネットワーク外部性、第2項の限界的な減少分を混雑現象と呼ぶ。したがって、メンバーの増加は、効用を増加させることもあれば、減少させることもある。つまり混雑現象がネットワーク外部性を上回れば、

$$\frac{\partial f(m,n)}{\partial n} < 0$$

が成立し、逆にネットワーク外部性が混雑現象を上回れば、

$$\frac{\partial f(m,n)}{\partial n} > 0$$

が成立する。

以下では、基本的にはHirshleifer and Rasmusenのモデルに基づいて、このような効用関数の特定化のもとでオストラシズムが機能する条件を検討していく。なお、ここではオストラサイズされたプレイヤーは永久に追放されると仮定し、無限繰り返しゲームの枠組みで考察する。

3. 1　仮定とパラメータの範囲

このモデルにおいて、次の3つの仮定を置く。これらは、Hirshleifer and Rasmusenの仮定と同様である。

仮定1　$f(m,n) - X < f(m-1,n)$
仮定2　$Y > X$
仮定3　$f(n,n) - X > 0$

仮定1は、逸脱のインセンティブが存在することを示している。ここから、

$$X > n \tag{1}$$

が導かれる。

仮定2は、オストラサイズされることによる1期あたりのペナルティ(Y)は、協力者を裏切ることによる便益を上回ることを示している。

仮定3は、完全協力の状態は、すべてのプレイヤーが非協力を選択したときよりも望ましいことを表している。ここから混雑現象を表すパラメータaの範囲は、

$$0 < a < 1 - \frac{X}{n^2} \tag{2}$$

となる。また、協力の費用(X)の上限は、

$$X < (1-a)n^2 \tag{3}$$

となる。(1)(2)式より、$(1-a)n^2 > n$、すなわち$(1-a)n > 1$が成立しなければならない。

3. 2　協力維持の条件

以下では、完全協力が維持される条件について見ていく。協力が維持されるには、協力を選択しているどのプレイヤーも非協力を選択するインセ

ンティブを持たなければよい。したがって、もしオストラシズムが存在せずトリガー戦略が採られるなら、

$$\frac{f(m,n)}{1-\delta} > f(m-1,n) + \frac{\delta}{1-\delta}\cdot 0$$

が成立すればよい。ここから、協力が維持されるために必要な割引因子の条件は

$$\delta > \frac{X-n}{-n+\left(\frac{m}{n}-a\right)n^2} \tag{3}$$

となる。ここでは、完全協力を前提とするので、(3)式は、

$$\delta > \frac{X-n}{-n+(1-a)n^2}$$

となる。

一方、オストラシズムが存在する場合は、

$$\frac{f(m,n)-X}{1-\delta} > f(m-1,n) - \frac{\delta}{1-\delta}\cdot Y \tag{4}$$

となるので、

$$\delta > \frac{X-n}{Y-n+\left(\frac{m}{n}-a\right)n^2} \tag{5}$$

が満たされることが、協力が維持されるために必要となる。したがって完全協力が維持されるためには、

$$\delta > \frac{X-n}{Y-n+(1-a)n^2} \tag{6}$$

が成立すればよいことになる。

ただし、(4)式が成立するためには、$\frac{1}{2} < a < 1-\frac{X}{n^2}$の場合、

$$n > \frac{1}{1-a} \tag{7}$$

が満たされる必要がある。(1)(2)式より、この不等式は成立している。

(3)式と(5)式より、オストラシズムが存在することで協力が維持されやすくなることがわかる。

また、仮定2および(1)(2)式より

$$0 < \frac{X-n}{Y-n+(1-a)n^2} < 1$$

は常に成立する。

ここから、次の結果を得る。

補題

完全協力の維持に必要な割引因子の閾値（δ^*）は、[0,1] 区間に必ず存在する。

3．3　オストラシズムが機能する条件

次に、完全協力時にオストラシズムが機能する条件を検討する。オストラシズムが機能するためには、逸脱したプレイヤーを排除することが他のメンバーにとって利益になる、つまり

$$f(n-1,n-1) > f(n-1,n) \tag{8}$$

が満たされる必要がある。

仮定2と(1)(2)式より、$\frac{n-1}{2n-1} < a < \frac{1}{2}$のときは、$n < \frac{a-1}{2a-1}$が満たされれば(8)式は成立する。$\frac{1}{2} \leqq a < 1-\frac{X}{n^2}$のときは$n > \frac{1}{1-a}$が満たされているので、(8)式は成立する。

ここから次の結果が導出される。

命題1

混雑現象の効果があまり大きくなければ、オストラシズムは完全協力の維持に機能しない。逆に混雑現象が大きければオストラシズムは機能する。

つまり、混雑現象があまり大きくないとき$\left(a < \frac{1}{2}\right)$は、あるプレイヤーが非協力を選択することによってもたらされるネットワーク外部性が混雑現象を上回るため、逸脱者をオストラサイズすることは、残りのメンバーの利益にならない、つまりオストラシズムは完全協力の維持に機能しない。逆に、混雑現象が大きいとき$\left(\frac{1}{2} < a\right)$は、混雑現象がネットワーク外部性を上回るため、オストラシズムが機能するといえる。

本稿のモデルでは、メンバー数の増加によるネットワーク外部性と混雑現象を考慮することで、オストラシズムが機能しないケースがあることが明らかになった。混雑現象があまり大きくない時は、オストラシズムが機能しないという結果

は、メンバー数に依存せずオストラシズムによって完全協力が維持されるというHirshleifer and Rasmusenの結果とは大きく異なるものである。彼らは、オストラシズムの費用面を指摘しているものの、明示的に取り扱っていない。また、囚人のジレンマ的状況における協力の促進に対して、オストラシズムが強力に機能することが示されているが、現実社会においてオストラシズムが機能している事象が数多くみられるわけではない。これに対して、本稿のモデルは、ネットワーク外部性と混雑現象、およびオストラシズムの費用面を考慮することで、オストラシズムが機能する条件を明らかにするとともに、混雑現象があまり大きくない場合にはオストラシズムが必ずしも機能しないということを理論的に示すものである。

3．4　比較静学

以下では、完全協力均衡の下で、各パラメータについて比較静学を行う。(5)式と補題より次のように計算できる。

(a)パラメータX(協力に要する費用)の変化

協力の維持に必要な割引因子の閾値(δ^*)をXについて偏微分すると、

$$\left.\frac{\partial \delta^*}{\partial X}\right|_{m=n}=\frac{1}{Y-n+(1-a)n^2}>0$$

であることがわかる。ここから協力に要する費用が増加した場合、協力が維持しにくくなることがわかる。

(b)パラメータY(オストラサイズによるペナルティ)の変化

$$\left.\frac{\partial \delta^*}{\partial Y}\right|_{m=n}=-\frac{X-n}{(Y-n+(1-a)n^2)^2}<0$$

したがって、オストラシズムのペナルティが大きくなると、協力が維持しやすくなることがわかる。

(c)パラメータa(混雑現象)の変化

$$\left.\frac{\partial \delta^*}{\partial a}\right|_{m=n}=\frac{(X-n)\,n^2}{(Y-n+(1-a)n^2)^2}>0$$

ここから、混雑現象が大きくなれば、協力は維持されにくくなるといえる。

(d)パラメータm(協力者の数)の変化

$$\left.\frac{\partial \delta^*}{\partial m}\right|_{m=n}=-\frac{(X-n)\,n}{(Y-n+(1-a)n^2)^2}<0$$

したがって、協力者が増加した場合、協力の維持に必要な割引因子の閾値は低下し、協力は維持しやすくなる。

(e)パラメータn(メンバー数)の変化

$$\left.\frac{\partial \delta^*}{\partial n}\right|_{m=n}=\frac{-an^2+2anX+X-Y-nX}{(Y-n+(1-a)n^2)^2} \tag{9}$$

(9)式より、メンバー数の増加が協力の維持に必要な割引因子の閾値に与える影響は一意には決まらないことがわかる。そこで、(9)式の正負を判別するために、

$$g(n)=-an^2+(2a-1)Xn-(Y-X) \tag{10}$$

と置く。(10)式が負になれば、メンバー数が増加した場合に協力の維持が容易になるといえる。

仮定2より、$0<a<\frac{1}{2}$のとき、(10)式が負になることは明らかである。

次に、$\frac{1}{2}<a<1-\frac{X}{n^2}$の場合についてみていく。ここで、

$$bX=Y-X \tag{11}$$

とおくと、以下の条件が満たされれば、(10)式は負となる。

$$D=[(2a-1)X]^2-4abX<0$$

この式を展開して整理すると、

$$X<\frac{4a}{(2a-1)^2}b \tag{12}$$

となる。$\frac{4a}{(2a-1)^2}$は、$\frac{1}{2}<a<1-\frac{X}{n^2}$の範囲で4を下回ることはないので、少なくとも$X<4b$が満たされれば、(12)式は成立する。この式は、(11)式を用いると、

$$Y>X+\frac{X^2}{4}$$

となる。

この条件が成立しているとき、(10)式は負となる。つまりオストラシズムのペナルティが協力に要する費用に比して十分に大きいならば、メンバー数が増加したときに協力が促進されるといえる。

以上の結果は、次の命題にまとめることができる。

命題2

(i) 協力のためのコストの増加は、完全協力の維持を困難にする。

(ii) オストラシズムによるペナルティが大きくなると、完全協力の維持は容易になる。

(iii) 混雑現象が増大すれば、完全協力は困難になる。

(iv) 協力者の増加は、完全協力の維持を促進する。

(v) 非協力者の増加は、混雑現象の効果があまり大きくないとき、あるいは混雑現象の効果が大きくてもオストラシズムのペナルティが協力のためのコストに比して十分に大きいとき、協力の維持を容易にする。

命題2の含意は以下の通りである。協力のためのコストの増加は、その分だけ協力者の便益を低下させるために、また混雑現象の増大は、メンバー全員の便益を低下させるために、完全協力の維持に必要な割引因子の閾値 (δ^*) は上昇し、協力は維持しにくくなる。逆に、オストラシズムのペナルティの増大は、逸脱に対するパニッシュメントを強めるために、また協力者の増加はメンバーの便益の増加をもたらすために、完全協力の維持に必要な割引因子の閾値 (δ^*) は低下し、協力は維持されやすくなる。したがって、命題2の(i)から(iv)は直感に沿う結果といえる。

また、混雑現象の効果があまり大きくないとき、非協力者の増加によってもたらされるネットワーク外部性が混雑現象を上回るために協力者の便益も上昇するので、協力は維持されやすくなる。さらに、たとえ混雑現象の効果が大きくても、オストラシズムのペナルティが協力のためのコストに比して十分に大きいならば、完全協力の維持に必要な割引因子の閾値 (δ^*) は低下し、協力は維持されやすくなる。したがって、(v)は、非協力者の増加が必ずしも協力の維持を阻害しないことを示している。

4. おわりに

本稿では、Hirshleifer and Rasmusen (1989)の枠組みに基づいて、非協力者の存在が協力者にとって必ずしも不利益にはならないという観点から効用関数を特定化した上で、繰り返し囚人のジレンマ的状況における協力の促進に対してオストラシズムが機能する条件を検討した。混雑現象の大きさによって、オストラシズムが機能する条件が大きく変わること、またそうした効果が小さい場合にはオストラシズムは機能しないことが明らかになった。

今後の研究の方向性として次のようなことが考えられる。第一に、Hirshleifer and Rasmusen (1989)の仮定の下で効用関数を特定化したうえで、オストラシズムが機能する条件を詳細に検討することである。第2に、完全協力の場合と同様に、m人協力の場合にオストラシズムが機能する条件を検討することである。

参考文献

青木昌彦 (2001)、『比較制度分析に向けて』、瀧澤弘和・谷口和弘訳、NTT出版。

Hirshleifer, D. and Rasmusen, E. (1989), "Cooperation in a Repeated Prisoners' Dilemma with Ostracism", *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol.12, pp.87-106.

Kandori, M. (1992), "Social Norms and Community Enforcement", *Review of Economic Studies*, vol.59, pp.63-80.

Okuno - Fujiwara, M. and Postlewaite, A. (1995), "Social Norms and Random Matching Games", *Games and Economic Behavior*, vol. 9, pp.79-109.

Spagnolo, D. (1999), "Social Relations and Cooperation in Organizations", *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol. 38, pp.1-25.