

π の 近 似 値 の 計 算

河 野 芳 文

円周率 π は我々にとって身近な数であり、小学生でもその近似値が 3.14 であることは知っている。しかし、その近似値 3.14 の求め方となると案外知られていない。最近、円周率 π に関する本も何冊か目にするが、多くの高校生が読んでいるかどうかは疑問であるし、小学生、中学生、高校生では扱い方も異なるであろう。ここでは、高校生が考えられる、あるいは理解できる π の近似値の求め方について、生徒とともに考えた方法を述べる。そのうち、最も効率のよい求め方は、ニュートンのアイデアによる二項展開を利用する方法であろう。

1. は じ め に

私達は、小学校以来円周率 π に親しんでおり、その値が 3.14159……であることも周知の事実である。この円周率の値を小数第何位まで求められるか、国内外の研究者が競い合っているという話も耳に新しいが、 π についての数学書や啓蒙書も最近何冊か出版されている。

これ程身近にある数でありながら、 π の近似値を求める方法となるとあまり知られておらず、その求め方を尋ねられると途端に首をかしげ、困惑してしまうのが我々の現実である。

小学生であれば、直径 50 cm の厚紙の円をつくり、その周囲の長さを実測させたり、均一な材質でできた鉄板からできた半径 1 m の円板をつくり、1 辺の長さが 1 m の正方形の鉄板の重さを比較させて、 π の近似値を求める方法も考えられる。このような方法は予備知識を余り持たない小、中学生にとっては優れた方法であるが、高校で学んだ数学の知識が生かしていない恨みがある。

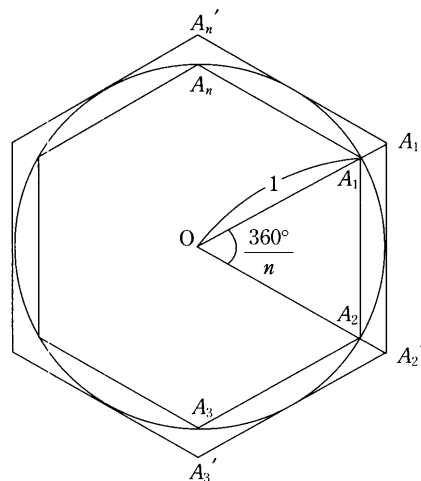
そこで、高校生の知識を利用する方法について考えてみると、円に内接する正多角形と円の面積を比較する方法や定積分を利用する方法等を思いつく。

まず、これらの方法によって円周率 π の近似値を求めることを試み、その求め方のよさや問題点について考察を加えた後、ニュートンの二項展開を利用する π の近似値の求め方を実施することにする。

2. 円周率 π の近似値の求め方について

まずは、円に内接する多角形、円に外接する多角形を利用する方法について述べる。

① 正多角形の面積と比較する方法



半径 1 の円 O に内接する正 n 角形を $A_1A_2\cdots A_n$ 、外接する正 n 角形を $A'_1A'_2\cdots A'_n$ とし、それらの面積をそれぞれ S_n, S'_n とすれば、

$$S_n < \pi \times 1^2 < S'_n$$

が成り立つ。

ここで、

$$S_n = n \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$$

$$S'_n = n \times 1 \times \tan \frac{180^\circ}{n}$$

であるから、

$$\frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} < \pi < n \tan \frac{180^\circ}{n} \quad \text{--- ①}$$

あるいは、

$$\begin{aligned}\tan \frac{180^\circ}{n} &= \frac{\sin \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}} \\ &= \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{1 + \cos \frac{360^\circ}{n}}\end{aligned}$$

と変形して、

$$\frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} < \pi < n \times \frac{\sin \frac{360^\circ}{n}}{1 + \cos \frac{360^\circ}{n}} \quad \text{--- ①'}$$

を得る。

$n = 6$ とおけば、①より、

$$3 \sin 60^\circ < \pi < 6 \tan 30^\circ$$

$$\therefore \frac{3}{2} \sqrt{3} < \pi < 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

$1.732 < \sqrt{3} < 1.733$ であるから、

$$2.598 < \pi < 3.446$$

また、 $n = 12$ とおけば、①'より

$$6 \sin 30^\circ < \pi < 12 \times \frac{\sin 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}$$

$$\therefore 3 < \pi < \frac{6}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} = 12(2 - \sqrt{3})$$

$1.732 < \sqrt{3}$ であるから、

$$3 < \pi < 12(2 - 1.732) = 3.216$$

更に、 $n = 24$ とおけば、①'より

$$12 \sin 15^\circ < \pi < 24 \times \frac{\sin 15^\circ}{1 + \cos 15^\circ}$$

ここで、加法定理より、

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)\end{aligned}$$

であるから、

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) < \pi < 24 \times \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1}$$

すなわち、

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) < \pi < 24(\sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2)$$

ここで、

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$

$$1.732 < \sqrt{3} < 1.733$$

$$2.449 < \sqrt{6} < 2.450$$

であるから、

$$3 \times 1.414 \times 0.732 < \pi < 24(2.450 - 1.732 + 1.415 - 2)$$

$$\therefore 3.0744 < \pi < 3.192$$

筆算で評価できるのは、このあたりまでである。

n がもっと大きい場合には、小さい角に対する三角関数の値を知らねばならないであろう。そうなる、三角関数の値の近似値を求める問題とも関わることになる。

② 定積分を利用する方法

$-1 < x < 1$ において、

$$\begin{aligned}T_n &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} \\ &= \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} = \frac{1 - (-1)^n x^{2n}}{1 + x^2}\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1 - (-x^2)^n}{1 + x^2} dx &= \left[x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{5} x^5 - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} x^{2n-1} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\end{aligned}$$

であるから、これを S_n とおくと、

$$\begin{aligned}\left| \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - S_n \right| &= \left| \int_0^1 \frac{(-x^2)^n}{1+x^2} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 x^{2n} dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

一方、この右辺は $x = \tan \theta$ と置換して、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = [\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\pi &= 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]\end{aligned}$$

したがって、 π の近似値を得るには、 $4S_n$ 、すなわち、

$$4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right]$$

で n の値を大きくすればよい。

ところが、上の不等式の評価では、

$$\left| 4 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} - 4S_n \right| \leq \frac{4}{2n+1}$$

であり、したがって、 $n=2000$ のときでも右辺は

$$\frac{4}{2 \times 2000 + 1} < \frac{1}{1000}$$

となり、近似は小数第3位までしか正しさが保障できないことになる。

しかも、 $4S_n$ の計算では、 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \dots$ の加減が続くから、多くの誤差が生じる危険性も生じかねない。

このように考えると、第2の方法は理論的には正しいが、数値計算上の手法としては極めて問題の多いものであることが分かる。

したがって、円周率 π の近似値を求めるには、もっと違った方法、あるいは工夫が必要であることが分かる。

その1つを、次節以下で述べる。

3. 二項式展開——二項定理の一般化——

我々は、個数の処理の学習を通して、次の二項定理の公式が成り立つことを知っている。

定理1 n が自然数であるとき、

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n \\ &= a^n + \frac{n}{1!} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1) \dots 2}{(n-1)!} a b^{n-1} + \frac{n!}{n!} b^n \end{aligned}$$

が成り立つ。

⊙ $(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r} b^r$ の係数は、 $a+b$ の n 個のかっこの中のどの r 個から b を取り、どの $n-r$ 個のかっこから a をとるかで決まるから、

$${}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

である。

$$\begin{aligned} \text{例1) } (1+x)^n &= {}_n C_0 \cdot 1 + {}_n C_1 \cdot x + {}_n C_2 \cdot x^2 + \dots \\ &\quad \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n \\ &= 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n(n-1) \dots 2}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{n!}{n!} x^n \end{aligned}$$

この例から分かるように、 x^k の係数は、分母が $k!$ 、分子が $n(n-1) \dots (n-k+1)$ の分数となっている。

今、 $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ も無限に続く x の多項式のようなものであるとして、

$$\sqrt{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

とおくと、 $(\sqrt{1+x})^2 = 1+x$ であるから、

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots) \\ = 1 + x \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned} \therefore a_0^2 + (a_0 a_1 + a_1 a_0) x + (a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0) x^2 + \dots \\ = 1 + x \end{aligned}$$

$a_0^2 = 1$ であるから、 $a_0 = 1$ とおくと、

$$2a_1 = 1, a_1^2 + 2a_2 = 0, 2a_3 + 2a_1 a_2 = 0, \dots$$

これより、

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = -\frac{1}{8}, a_3 = \frac{1}{16}, \dots$$

したがって、

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^3 - \frac{5}{128} x^4 + \dots$$

と表すことができる。なお、 $\sqrt{1+x}$ は x の多項式ではないから、項は無限に続くと考えられる。

なお、注意してみれば、

$$\begin{aligned} \sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{16} x^4 - \frac{5}{128} x^5 + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2!} x + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) x^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) x^3 \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \left(\frac{1}{2} - 3 \right) x^4 + \dots \end{aligned}$$

となっており、例1) の n に $n = \frac{1}{2}$ を代入した形であると予想される。

もう1つ、 $\frac{1}{1+x}$ について調べてみよう。

$$\frac{1}{1+x} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

と表されるとすれば

$$(1+x) \cdot \frac{1}{1+x} = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) &= 1 \\ \therefore a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + (a_2 + a_3)x^3 + \dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

恒等式の考えにより、

$$a_0 = 1, a_0 + a_1 = 0, a_1 + a_2 = 0, a_2 + a_3 = 0, \dots$$

したがって、

$$a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, \dots, a_n = (-1)^n, \dots$$

これより、次の等式が成り立つと予想される。

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

(これは、 $-1 < x < 1$ の下での無限等比級数の和の公式そのものである。)

この場合についても

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} \\ &= 1 + \frac{-1}{1!}x + \frac{-1(-1-1)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{3!}x^3 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

が成り立つと予想される。

以上のような考察から、 x についての何らかの制限の下で、次の定理が成り立つと考えられる (ニュートン)。

定理 2 α が実数の定数であるとき、 $-1 < x < 1$ で次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

(α が負でない整数ならば、右辺は有限項の和となり、 x の多項式になる。)

ニュートンは、この公式をペストが流行した1665年に発見したようであり、オイラーも「無限小解析入門」(1748)で使っている。この事実を両者とも明らかな事と考えていたようであるが、 $|x| < 1$ の条件の下でこの定理が成り立つことの証明の必要性を意識したのは、アーベル (1826) であった。

まず、補題として、ロルの定理を証明する。

補題 1 (ロルの定理) 関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続、区間 (a, b) で微分可能で $f(a) = f(b)$ をみたすならば、

$$f'(c) = 0 \quad (a < c < b)$$

をみたす c が存在する。

⊙ $f(x)$ が定数関数ならば、 $a < c < b$ をみたす任意の c で、 $f'(c) = 0$ となる。そこで、 $f(x)$ が定数関数でないとする。このとき、 $f(x) > f(a)$ あるいは $f(x) < f(a)$ をみたす $x (a < x < b)$ が存在するが、いずれでも同様であるから、 $f(x) > f(a)$ をみたす x が存在するとする。 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ の点 c で最大値をとるとすれば、 $a < c < b$ で、

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{かつ}$$

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$$

が成り立つ。したがって、 $f'(c) = 0$ 、 $f(x) < f(a)$ をみたす x があるときも、区間 $[a, b]$ での $f(x)$ の

最小値を考えて同様に証明できる。

次に、テイラーの定理を証明しよう。

補題 2 (テイラーの定理) a を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき、任意の自然数 l に対し、

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{l \cdot (n-1)!} (1-\theta)^{n-l} \cdot (x-a)^n$$

をみたす $R_n(x)$ 、 $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在する。

⊙ $x = a$ のときは明らかであるから、 $x (x \neq a)$ および l を固定して、 t の関数

$$F(t) = f(x) - \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k + A(x-t)^l \right\}$$

が $F(a) = 0$ をみたすように定数 A をとる。すると、 $F(t)$ は微分可能で、 $F(x) = 0$ をみたすから、ロルの定理より、 $F'(c) = 0$ をみたす $c = a + \theta(x-a)$ ($0 < \theta < 1$) が存在する。

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} \cdot (x-t)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x-t)^{k-1} \\ &\quad + Al(x-t)^{l-1} \\ &= - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} \cdot (x-t)^{n-1} + Al(x-t)^{l-1} \end{aligned}$$

であるから、 $F'(c) = 0$ より、

$$\begin{aligned} A &= \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{l \cdot (n-1)!} \cdot (x-a - \theta(x-a))^{n-l} \\ &= \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{l \cdot (n-1)!} \cdot (1-\theta)^{n-l} (x-a)^{n-l} \end{aligned}$$

また、 $F(a) = 0$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a + \theta(x-a))}{l \cdot (n-1)!} (1-\theta)^{n-l} (x-a)^{n-l} \end{aligned} \quad (\text{証明終})$$

補題 2 で、 $f(x) = (1+x)^\alpha$ とすれば、

$$f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

であるから、区間 $I = (-1, 1)$ 、 $a = 0$ として、

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{l \cdot (n-1)!} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-n} \cdot (1-\theta)^{n-l} \cdot x^n \end{aligned}$$

を得る。

[定理の証明]

$f(x) = (1+x)^\alpha$ について、補題2の $R_n(x)$ は、

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{l \cdot (n-1)!} (1+\theta x)^{\alpha-n} \cdot (1-\theta)^{n-l} \cdot x^n$$

の形であるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

を示せばよい。

1) 無限級数 $1 + \left| \frac{\alpha}{1!} x \right| + \left| \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 \right| + \cdots + \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \right| + \cdots$ は収束する。したがって、第 $n+1$ 項を a_n とおけば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left| \frac{(\alpha-n)x}{n+1} \right| \rightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $|x| < \lambda < 1$ をみたく λ をとれば、ある n_0 があって、 $n \geq n_0$ のとき、

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda \quad \therefore a_{n+1} \leq \lambda a_n$$

したがって、

$$a_n \leq \lambda^{n-n_0} a_{n_0}$$

これより、

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \lambda^{-n_0} \sum_{k=n_0}^{\infty} \lambda^k a_{n_0} = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_k + \frac{a_{n_0}}{1-\lambda}$$

(正の定数)

$a_k \geq 0$ であるから、部分和 $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ のつくる数列 $\{S_n\}$ は増加列であり、上からある正の定数で押さえられる。したがって、数列 $\{S_n\}$ は収束する。よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \right| = 0$$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$

$$\begin{aligned} \therefore |R_n(x)| &= \left| \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^n \cdot \frac{1}{l} (1+\theta x)^{\alpha-n} \cdot (1-\theta)^{n-l} \right| \\ &= \left| \frac{\alpha x}{l} \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \cdot (1+\theta x)^{\alpha-l} \cdot \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^{n-l} \right| \end{aligned}$$

ここで、

$$\alpha \geq l \text{ のとき、} |(1+\theta x)^{\alpha-l}| \leq (1+|x|)^{\alpha-l}$$

$$\alpha < l \text{ のとき、} |(1+\theta x)^{\alpha-l}| \leq (1-|x|)^{\alpha-l}$$

であり、1) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} = 0 \quad \text{--- (*)}$$

さらに、

$$0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

であるから、 n を十分大きくとれば、

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \left| \frac{\alpha x}{l} \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} \times \right. \\ &\quad \left. \left\{ (1+|x|)^{\alpha-l} + (1-|x|)^{\alpha-l} \right\} \right| \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、(*) より、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n(x)| = 0$$

したがって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

(証明終)

(例2) $\sqrt{1-x} = (1+(-x))^{\frac{1}{2}}$ であるから、 $|x| < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x} &= 1 + \frac{1}{2}(-x) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \frac{(-x)^2}{2!} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \frac{(-x)^3}{3!} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} (\sqrt{1-x})^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots \right)^2 \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right)x + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)x^2 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \right)x^3 \\ &\quad + \left(-\frac{5}{128} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} - \frac{5}{128} \right)x^4 - \cdots \\ &= 1 - x + 0x^2 + 0x^3 + 0x^4 - \cdots \end{aligned}$$

であるから、 $\sqrt{1-x}$ の展開は、

$$(\sqrt{1-x})^2 = 1 - x$$

をみたく考えられる。

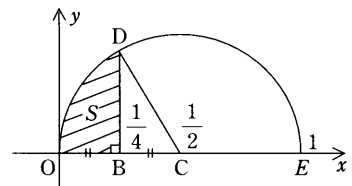
4. π の近似値の計算

右の図のように、

半円 $y = \sqrt{x-x^2}$ と x

軸および直線 $x = \frac{1}{4}$

で囲まれる図形の面



積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \text{扇形 COD の面積} - \triangle BCD \text{ の面積} \\ &= \frac{1}{6} \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} \sqrt{x-x^2} &= x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}} \\ &= x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \frac{7}{256}x^5 \right. \\ &\quad \left. - \frac{21}{1024}x^6 - \frac{33}{2048}x^7 - \frac{429}{32768}x^8 - \dots \right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \frac{5}{128}x^{\frac{9}{2}} \\ &\quad - \frac{7}{256}x^{\frac{11}{2}} - \frac{21}{1024}x^{\frac{13}{2}} - \frac{33}{2048}x^{\frac{15}{2}} \\ &\quad - \frac{429}{32768}x^{\frac{17}{2}} - \frac{6435}{524288}x^{\frac{19}{2}} - \dots \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2} dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} \right. \\ &\quad - \frac{1}{72}x^{\frac{9}{2}} - \frac{5}{704}x^{\frac{11}{2}} - \frac{7}{1664}x^{\frac{13}{2}} - \frac{7}{2560}x^{\frac{15}{2}} \\ &\quad \left. - \frac{33}{17408}x^{\frac{17}{2}} - \frac{429}{311296}x^{\frac{19}{2}} - \frac{2145}{1835008}x^{\frac{21}{2}} - \dots \right]_0^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

と考えられる。ここで、 $\sqrt{x-x^2}$ の展開式における $x^{\frac{2n+1}{2}}$ の係数を a_n とおくと、 $a_0=1$ で

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \cdot (-1)^n \\ &= \frac{\left(\frac{3-n}{2}\right)}{n} \cdot a_{n-1} \cdot (-1) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

が成り立つ。 $\sqrt{x-x^2}$ の定積分で得られる各項については、 $n \geq 1$ の下で、

$$\begin{aligned} \frac{2}{2n+3} \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} &= \frac{2n-3}{n(2n+3)} \cdot a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} \\ &= \frac{(2n-3)(2n+1)}{8n(2n+3)} \cdot \frac{2}{2n+1} \\ &\quad \cdot a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \end{aligned}$$

が成り立つから、

$$\left| \frac{2}{2n+3} \cdot a_n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3} \right| \leq \frac{1}{4} \left| \frac{2}{2n+1} \cdot a_{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} \right|$$

したがって、定積分の計算式での第10項以降の和の絶対値について、

$$\begin{aligned} &\left| \frac{2}{21} a_9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \frac{2}{23} a_{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{23} + \dots \right| \\ &< \frac{2145}{1835008} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) \\ &= \frac{2145}{1835008} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{715}{917504} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \doteq 7.431870992 \times 10^{-10} \\ \frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{32} = S &= \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x-x^2} dx \text{ であるから,} \\ &\left| \pi - \frac{3}{4}\sqrt{3} - 24 \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{429}{311296} \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \right\} \right| \\ &= \left| 24S - 24 \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{429}{311296} \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \right\} \right| \\ &\leq 24 \left| \frac{2}{21} a_9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} + \frac{2}{23} a_{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{23} + \dots \right| \\ &\leq 24 \cdot \frac{715}{917504} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \doteq 1.783649038 \times 10^{-8} \end{aligned}$$

したがって、精しい近似値 $\sqrt{3} \doteq 1.732050808$ を用いることにより、

$$\frac{3}{4}\sqrt{3} + 24 \left\{ \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \dots - \frac{429}{311296} \left(\frac{1}{2}\right)^{19} \right\}$$

が、 π の小数第7位までの正しい近似値を与えることが分かる。

実際に計算すれば、

$$\pi \doteq 3.141592668$$

を得る。

5. 終わりに

π は我々にとって身近な数でありながら、それが無理数であることのみならず、その近似値

$$\pi \doteq 3.14159\dots$$

の求め方を尋ねられても返答に困る。

2節で述べた2つの方法のうち、円に内接あるいは外接する正多角形を用いる方法は、 θ が小さい場合の $\sin \theta$ や $\tan \theta$ の近似に帰着するから、それら

の級数展開を利用すれば、近似値計算ができる。それは、 $\sin \theta$ のマクローリン展開の収束が比較的是やいことによる。

しかし、積分を用いる第2の方法では、級数の収束が極めて緩慢であるから、理論的に正しくても実際計算には適さない。

最後の $(1+x)^a$ の2項展開を利用する方法は、級数展開の第9項までの部分和で小数第7位までの正しい近似ができるという点で、巧妙だが優れた方法といえるであろう。 e の級数展開を利用した近似計算の方法を想起させるものである。

ただ、9項までの部分和が小数第7位までの正しい近似を与えることの論証はかなり面倒であり、生徒達は、二項展開の可能性およびこの近似の精度の評価の理解に苦しんでいた。しかし、こうした作業

を通して、理論的な正しさと数値計算上の手法の良さは必ずしも一致しないこと、 π の近似値を計算するにも数学的な深い考察があることを納得してくれたように思う。

その意味で、現在最先端で π の近似値の桁数を競い合っている記事の背後で多くの数学者が深い数学的考察を行っていることに敬意を払いたいと思う。

参 考 文 献

1. E. ハイラー, G. ワナー著 (蟹江幸博訳)「解析教程 上, 下」シュプリンガー東京, 1997
2. 杉浦光夫著「解析入門 I, II」東京大学出版会, 1980, 1985
3. 溝畑茂著「数学解析上, 下」朝倉書店, 1973
4. 高木貞治著「解析概論」岩波書店, 1976
5. 笠原皓司著「微分積分学」サイエンス社, 昭和52