

不確定な非線形動的システムの安定性を保証する新たな 状態フィードバック制御則

呉 漢生・水上孝一

広島大学総合科学部情報行動基礎研究講座

A New Class of Stabilizing State Feedback Controllers for Uncertain Nonlinear Dynamical Systems

Hansheng WU and Koichi MIZUKAMI

*Department of Information and Behavioral Sciences Faculty of Integrated Arts and Sciences
Hiroshima University, Higashi-Hiroshima 724, Japan*

Abstract : The paper is mainly concerned with the problem of robust stabilization for a class of uncertain nonlinear dynamical systems. Based on the stabilizability of the nominal system (i.e. the system in the absence of uncertainty), a class of stabilizing state feedback controllers for this class of uncertain nonlinear dynamical systems are proposed. There exists a given feedback gain function in the state feedback controllers proposed in this paper. By appropriately choosing this gain function, the uniform ultimate boundedness and uniform asymptotic stability of uncertain nonlinear dynamical systems can respectively be guaranteed. In addition, the state feedback controllers proposed here are continuous, and with a rather simpler form than those reported in the literature. Therefore, the state feedback controllers developed by our approach can easily be implemented in some practical problems of robust stabilization for uncertain nonlinear dynamical systems.

In this paper, we first discuss the problem of state feedback synthesis for uncertain nonlinear dynamical systems. Then, as a special case, we investigate the robust control problem of the uncertain dynamical systems whose nominal part is linear. Finally, several numerical examples are given to demonstrate the utilization of the approach developed in this paper. It is shown from the simulation results of these examples that by using the state feedback controller developed in this paper, the resulting closed-loop dynamical systems have rather good transient behavior, and no chattering will appear in implementation for the control.

Keywords : Robust stabilization, state feedback controller synthesis, uniform ultimate

boundedness, uniform asymptotic stability, nonlinear dynamical systems, uncertainty, Lyapunov function

1. ま え が き

実際の制御問題において、制御対象に関する知識の不足や外部環境の変動や制御系を設計するための簡略化などより、制御対象を表すモデルがほとんど不確かさをもっているから、不確かさをもつ動的システムのロバスト制御設計に関する研究は、現代制御理論における重要な分野の一つであり、これまで多くの解法が開発されてきた [1]–[7]。特に最近数年間に、リアプノフ安定性理論に基づいて、不確かさをもつ非線形動的システムを安定させる状態フィードバック制御則の設計に関する研究がますます注目されている。これまで、そのような制御則がいくつか提案された [8]–[14]。

リアプノフ安定性理論に基づく方法は、主として次のような考え方に基づいている。不確かさを含んでいないノミナルシステム (nominal system) は一般に安定化することができるとする。この安定化できるノミナルシステムに対するリアプノフ関数を、不確かさをもつシステムに対するリアプノフ関数の候補とする。そして、不確かさをもつシステムのすべての解に対して、このリアプノフ候補関数が減少するような制御則を設計する。この方法を用いて、異なった形式の安定性を保証する状態フィードバック制御則 (すなわち、ロバスト制御則) をいくつか提案した。例えば、Gutman [8] は、不確かさをもつ非線形動的システムの一様漸近安定性 (uniform asymptotic stability) を保証できる非連続的なロバスト制御則を提案した。Corless ら [9] は、不確かさをもつ非線形システムに対して一様終局有界性 (uniform ultimate boundedness) を保証できる連続状態フィードバック制御則を提案した。Barmish ら [10] は、リアプノフ関数に関する理論を用いて、不確かさをもつ線形あるいは非線形システムを安定させる制御を設計した。Kravaris ら [15] は、ロバスト制御設計に関する手法を、微分幾何学的な制御理論と結びつけて、不確かさをもつ非線形システムを安定させる制御を構成した。Qu [11] は、等価的調和不確かさ (equivalently matched uncertainty) という概念を導入することにより、このような不確かさをもつ非線形システムに対する大域的漸近安定性を議論した。さらに、Dawson ら [16] は、同様なシステムに対して、状態観測器の設計に関する研究を行った。Wu ら [14] は、不確かさをもつ非線形システムに対して、新たな制御則を提案した。

本論文では、不確かさをもつ非線形動的システムに対するロバスト制御問題を議論する。そのような動的システムに対して、われわれは、あるゲイン関数をもつ状態フィードバック制御則を提案する。本論文で提案されている制御則は、ゲイン関数の選び方によって、不確かさをもつ動的システムの一様終局有界性または一様漸近安定性を保証することができる。更に、この制御則は連続で、かつより簡単な構造をもっている。本論文で提案されている状態フィードバック制御則を数値例に適用している。これらから、本論文で提案する方法が不確かさをもつような、ある実際のロバスト制御問題に対して有効かつ実用であると思う。

以下では、まず第2章で不確かさをもつ動的システムに関する安定性問題の定式化を行い、標準的仮定を与え、予備知識を補題の形で導入する。続いて第3章で本論文の主要結果を与える。第4章では、本論文で提案する方法の有効性を例証するために、二数値例を挙げ、シミュレーションを行う。第5章で、得られた結果について議論し、結言とする。

2. 問題の設定と仮定

2.1. 問題の設定

次の微分方程式で記述される不確かさをもつ非線形動的システムを考えよう。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x, t) + G(x, t) [\xi(x, t) + u(t)] \quad (1a)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (1b)$$

ここに、 $t \in R^+$ は時刻である。 $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^m$ は制御ベクトルである。また、ベクトル関数 $\xi(x, t)$ はシステムの不確かさを表す。 $\xi(x, t)$ はその大きさについて有界であると仮定する。従って、システム(1)に関するノミナルシステム (nominal system) は次のように記述できる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x, t) + G(x, t) u(t) \quad (2a)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (2b)$$

ここで、 $F(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ と $G(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^{n \times m}$ はそれぞれベクトルと行列関数で、既知である。更に、システム(1)に関する非強制ノミナルシステム (unforced nominal system) は次のように表される。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x, t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (3)$$

すべての状態 $x(t) \in R^n$ が利用できるとすると、一般的に状態フィードバック制御則は次のような非線形関数で表すことができる。つまり、

$$u(t) = \gamma(x, t) \quad (4)$$

ここで、 $\gamma(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^m$ はベクトル関数である。

従って、本論文で議論するロバスト制御問題は次のように述べることができる。

不確かな $\xi(\cdot, \cdot)$ が存在しても、非線形動的システム(1)が安定化できることを保証するある状態フィードバック制御 $u(t)$ を構成することである。一般的に、そのような制御則をロバスト制御則とも呼ぶ。

2.2. 基本的仮定

このような状態フィードバック制御 $u(t)$ を構成する前に、非線形動的システム(1)に対して、いくつかの標準的仮定を与える。

【仮定2.1】 既知関数 $F(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^n$ と $G(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^{n \times m}$ および未知関数 $\xi(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^m$ は、時刻に対して連続かつ一様有界であり、状態に対して局所的一様有界である。さらに、 $\xi(\cdot, \cdot) \in \Omega_\xi$ 。ここに Ω_ξ はある与えられた有界集合である。

【仮定2.2】 不確かさ $\xi(\cdot, \cdot)$ はユークリッドのノルムの意味で有界である。つまり、ある非負の連続関数 $\rho(\cdot, \cdot) : R^n \times R \rightarrow R^+$ が存在し、かつすべての対 $(x, t) \in R^n \times R^+$ に対して、次の不等式を満足する。

$$\|\xi(x, t)\| \leq \rho(x, t) \quad (5)$$

ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドのノルムを表す。

【仮定2.3】 非強制ノミナルシステム(3)に対して、原点 $x = 0$ をこのシステムの一様漸近安定平衡点 (uniformly asymptotically stable equilibrium) とする。リアプノフ安定性理論によって、それは次のことを意味する。つまり、次の関係を満たすような C^1 関数 $V(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ と連続かつ狭義に増加のスカラ関数 $\gamma_i(\cdot) : R^+ \rightarrow R^+$, $i = 1, 2$ および連続かつ狭義に増加の正定値スカラ関数 $\gamma_3(\cdot) : R^+ \rightarrow R^+$ が存在する。すなわち、すべての $(x, t) \in R^n \times R^+$ に対して、

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (6a)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \Delta_x^T V(x, t) F(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (6b)$$

ただし、

$$\gamma_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (6c)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \gamma_i(r) = \infty, \quad i = 1, 2 \quad (6d)$$

ここで、仮定 2.1 は、数学的に微分方程式(1)で表される動的システムの解が存在するということを保証するためのものである。仮定 2.2 は、不確かさの限界を与える。仮定 2.3 より非強制ノミナルシステム(3)が安定であることが分かった。いままで、不確かさをもつ非線形システムのロバスト制御に関する研究は、ノミナルシステムが必ず安定化できるシステムであるということが必要としている[9]—[11]。確かに、もしノミナルシステムが安定化不可能であれば、外乱がシステムに入れば、当然ロバスト制御則が存在しないことになる。即ち、不確かさをもつシステムは安定化されることができないことを意味する。従って、仮定 2.3 は、不確かさをもつ非線形動的システムのロバスト制御に関する研究に対して、標準的な仮定である。ちなみに、ノミナルシステムは線形的である場合に仮定 2.3 は、この線形システムが完全可制御であることを意味する。

2.3. 数学的準備

ここで、次章で用いられる補題を述べる。

【補題2.1】 ある C^1 関数 $V(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+ \rightarrow R^+$ を次の与えられた連続動的システムのリアプノフ関数の候補とする。

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t), \quad x(t_0) = x^0 \quad (7)$$

さらに、 $V(x, t)$ は次の性質をもっている。

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (8a)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \nabla_x^T V(x, t) f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) \quad (8b)$$

ここで、 $\gamma_1(\cdot)$ と $\gamma_2(\cdot)$ および $\gamma_3(\cdot)$ は仮定 2.3 で定義されたものである。

このとき、もしパラメータ ε が次の不等式を満足すれば、

$$2\varepsilon < \liminf_{r \rightarrow \infty} \gamma_3(r) := \ell \quad (9)$$

動的システム (7) の任意な解 $x(t; t_0, x^0)$ は一様有界 (uniformly bounded) かつ一様終局有界 (uniformly ultimately bounded) である。より詳細に、次のような結論がある。

(i) 一様有界性: $x(\cdot) : [t_0, t_1] \rightarrow R^n$, $x(t_0) = x^0$ が動的システム (7) の解であるとする、次のことが成り立つ。

$$\|x(t_0)\| \leq r \Rightarrow \|x(t)\| \leq d(r), \quad \forall t \in [t_0, t_1]$$

ここで、

$$d(r) = \begin{cases} (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R), & \text{if } r \leq \bar{R} \\ (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R), & \text{if } r > \bar{R} \end{cases}$$

ただし

$$R = \gamma_3^{-1}(2\varepsilon)$$

(ii) 一様終局有界性: $x(\cdot) : [t_0, \infty] \rightarrow R^n$, $x(t_0) = x^0$ が動的システム (7) の解であるとする、次のことが成り立つ。このとき、与えられた定数 $\bar{d} > (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)(R)$ に対して

$$\|x(t)\| < \bar{d}, \quad \forall t \geq t_0 + T(\bar{d}, r)$$

ここで、

$$T(\bar{d}, r) = \begin{cases} 0, & \text{if } r \leq \bar{R} \\ \frac{\gamma_2(r) - \gamma_1(\bar{R})}{\gamma_3(\bar{R}) - 2\varepsilon}, & \text{if } r > \bar{R} \end{cases}$$

ただし

$$\bar{R} = (\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1)(\bar{d})$$

上に述べた補題 2.1 は、文献 [9] で与えられた定理の簡潔な形で、証明がその文献で与えられた。

[補題 2.2] ある C^1 関数 $V(\cdot, \cdot) : R^n \times R^+$ を式 (7) で与えられた連続動的システムのリアプノフ関数の候補とする。さらに、 $V(x, t)$ は次の不等式を満たすとする。

$$\gamma_1(\|x\|) < V(x, t) \leq \gamma_2(\|x\|) \quad (10a)$$

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \nabla_x^T V(x, t) f(x, t) \leq -\gamma_3(\|x\|) + \psi(t) \quad (10b)$$

ここで、 $\gamma_1(\cdot)$ と $\gamma_2(\cdot)$ および $\gamma_3(\cdot)$ は仮定 2.3 で定義されたもので、 $\psi(t)$ は次式を満足するある連続関数である。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau = \bar{\psi} < \infty \quad (11)$$

ただし、 $\bar{\psi}$ はある定数である。

このとき、動的システム(7)の任意解は一様漸近安定である。つまり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (12)$$

が成り立つ。

(証明) 動的システムは連続であるから、任意な解 $x(t; t_0, x^0)$ が連続であることは明かである。任意な時刻 t に対して式(10)から次の不等式を得ることができる。

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma_1(\|x(t)\|) \\ &\leq V(x(t), t) \\ &= V(x^0, t_0) + \int_{t_0}^t \dot{V}(x(\tau), \tau) d\tau \\ &\leq \gamma_2(\|x^0\|) - \int_{t_0}^t \gamma_3(\|x(\tau)\|) d\tau + \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)から、両辺に極限值を求めると、次式を得ることができる。

$$0 \leq \gamma_2(\|x^0\|) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \gamma_3(\|x(\tau)\|) d\tau + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \quad (14)$$

式(11)を用いると、

$$0 \leq \gamma_2(\|x^0\|) - \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \gamma_3(\|x(\tau)\|) d\tau + \bar{\psi} \quad (15)$$

が得られた。式(15)を書き直すと、次式になる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \gamma_3(\|x(\tau)\|) d\tau \leq \gamma_2(\|x^0\|) + \bar{\psi} \quad (16)$$

一方、式(13)から、次式を求めることもできる。

$$0 \leq \gamma_1(\|x(t)\|) \leq \gamma_2(\|x^0\|) + \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \quad (17)$$

関数 $\psi(\cdot)$ が連続でかつ式(11)を満足するから、次式を定義することができる。

$$\Psi := \sup_{t \in [t_0, \infty]} \left| \int_{t_0}^t \psi(\tau) d\tau \right| \quad (18)$$

従って、式(17)と(18)より、次式を得ることができる。

$$0 \leq \gamma_1(\|x(t)\|) \leq \gamma_2(\|x^0\|) + \Psi \quad (19)$$

式(19)より、 $x(\cdot)$ が一様有界であることが分かった。さらに、 $x(\cdot)$ が連続であることによって、 $x(\cdot)$ が一様連続かつ有界でもある。従って、 $\gamma_3(\|x\|)$ も一様連続かつ有界であることは明らかになった。そうすると、式(16)に対して、Barbalat 補題[17]を用いることによって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_3(\|x\|) = 0 \quad (20)$$

が成り立つことが分かった。さらに、 $\gamma_3(\cdot)$ がある正定値関数であるから、式(20)より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

となる。つまり、動的システム(7)の任意解 $x(\cdot)$ は一様漸近安定である。

3. ロバスト制御則

本章では、式(1)で定義された非線形システムを考える。リアプノフ安定性理論に基づいて、われわれはシステムを安定化できる状態フィードバック制御則を次のように提案する。

$$u(t) = \gamma(x, t) \quad (21a)$$

ここで、

$$\gamma(x, t) = -k(t) \rho^2(x, t) G^T(x, t) \nabla_x V(x, t) \quad (21b)$$

ただし、 $k(t)$ は正値をとるある連続関数または定数である。

よく知られたように、いままで不確かさをもつ非線形動的システム(1)に対して、いろいろな形で表される状態フィードバック制御則が提案された。それらの制御則は動的システム(1)の安定性をいろいろな形で保証している。代表的な制御則は次のようになっている。例えば、文献[8]で、次のような状態フィードバック制御則を提案した。

$$\gamma_{FD1}(x, t) = \begin{cases} -\rho(x, t) \frac{\|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\|}{\|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\|}, & \text{if } (x, t) \notin N \\ \{u \in R^m : \|u\| \leq \rho(x, t)\}, & \text{if } (x, t) \in N \end{cases}$$

ただし、 N は次のように定義された集合である。

$$N := \{(x, t) : G^T(x, t) \nabla_x V(x, t) = 0\}$$

制御則 $\gamma_{FD1}(\cdot, \cdot)$ は、動的システム(1)の一様漸近安定性を保証することができる。しかし、制御則 $\gamma_{FD1}(\cdot, \cdot)$ が非連続で、実際的なロバスト制御問題に対して容易に実行できない。文献[9]で、その問題に対して、次のような連続フィードバック制御則を提案した。

$$\gamma_{FD2}(x, t) = \begin{cases} -\frac{\mu(x, t)}{\|\mu(x, t)\|} \rho(x, t), & \text{if } \|\mu(x, t)\| > \epsilon \\ -\frac{\mu(x, t)}{\epsilon} \rho(x, t), & \text{if } \|\mu(x, t)\| \leq \epsilon \end{cases}$$

ただし、 ϵ は任意な正定数で、 $\mu(\cdot, \cdot)$ は次のように定義されている。

$$\mu(x, t) := G^T(x, t) \nabla_x V(x, t) \rho(x, t)$$

制御則 $\gamma_{FD2}(\cdot, \cdot)$ は、動的システム(1)の一様終局有界性を保証することができる。さらに、最近に文献[11]で次のような連続フィードバック制御則を提案した。

$$\gamma_{FD3}(x, t) = \rho(x, t) \frac{\mu(x, t)}{\|\mu(x, t)\| + \epsilon e^{-\beta(t-t_0)}}$$

制御則 $\gamma_{FD3}(\cdot, \cdot)$ は、動的システム(1)の一様漸近安定性を保証することができる。制御則 $\gamma_{FD2}(\cdot, \cdot)$ は連続であるが、飽和の形をもっているから、原点 $x = 0$ において、システムはチャット

リング (chattering) という現象がしばしば発生する。ε と β の選択によって、制御則 $\gamma_{FD3}(\cdot, \cdot)$ も同じような欠点がある。さらに、制御則 $\gamma_{FDi}(\cdot, \cdot)$, $i = 1, 2, 3$, は、本論文で提案された制御則 (21) より複雑な構造をもっている。

本論文で提案されている制御則 (21) は連続で、かつゲイン関数 $k(t)$ によって、動的システム (1) の一様終局有界性または一様漸近安定性を保証することができる (次の定理を参照)。

《定理3.1》 不確かさをもつ動的システム (1) が考えられ、仮定2.1-2.3を満たすとする。このとき、(1) と (21) からなる閉ループ動的システムは次のような性質をもっている。

(i) ゲイン関数 $k(t)$ を、次の不等式を満たすような定数 k_0 とする。

$$\frac{1}{4k_0} := 2\varepsilon < \ell \quad (22)$$

ただし、定数 ℓ は式 (9) で定義されたようなものである。

このとき、式 (1) と (21) からなる閉ループ動的システムは一様終局有界である。

(ii) ゲイン関数 $k(t)$ が連続でかつ次式を満たすとする。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{1}{4k(\tau)} d\tau = \bar{k} < \infty \quad (23)$$

ただし、 \bar{k} がある定数である。

このとき、式 (1) と (21) からなる閉ループ動的システムは一様漸近安定である。

(証明) $x(t) := x(t; t_0, x^0)$ を式 (1) と (21) からなる閉ループ動的システムの解とする。さらに、仮定2.3を満たしている C^1 関数 $V(x, t)$ をその閉ループ動的システムのリアプノフ関数の候補とする。式 (1) と (6) より次の不等式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, t)}{dt} &= \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \nabla_x^T V(x, t) \{ F(x, t) + G(x, t) [\gamma(x, t) + \xi(x, t)] \} \\ &\leq -\gamma_3(\|x\|) + \nabla_x^T V(x, t) G(x, t) \gamma(x, t) \\ &\quad + \rho(x, t) \|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\| \\ &= -\gamma_3(\|x\|) - k(t) \rho^2(x, t) \|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\|^2 \\ &\quad + \rho(x, t) \|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\| \\ &= -\gamma_3(\|x\|) + \frac{1}{4k(t)} \\ &\quad - \left[\sqrt{k(t)} \rho(x, t) \|G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)\| - \frac{1}{2\sqrt{k(t)}} \right]^2 \\ &\leq -\gamma_3(\|x\|) + \frac{1}{4k(t)} \end{aligned} \quad (24)$$

式 (24) より、次の解析を行うことができる。

(i) ゲイン関数 $k(t)$ を正定数 k_0 とすると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dV(x, t)}{dt} &\leq \gamma_3(\|x\|) + \frac{1}{4k_0} \\ &\leq -\gamma_3(\|x\|) + 2\epsilon\end{aligned}\quad (25)$$

従って、式(25)と補題2.1とより、式(1)と(21)からなる閉ループ動的システムが一様終局有界となることは明かである。

(ii) ゲイン関数 $k(t)$ を、式(23)を満たす連続関数とすると、式(24)から次式を得ることができる。

$$\begin{aligned}\frac{dV(x, t)}{dt} &\leq \gamma_3(\|x\|) + \frac{1}{4k(t)} \\ &\leq -\gamma_3(\|x\|) + \hat{k}(t)\end{aligned}\quad (26a)$$

ただし、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \hat{k}(\tau) d\tau = \bar{k} < \infty \quad (26b)$$

従って、式(26)と補題2.2とより、式(1)と(21)からなる閉ループ動的システムが一様漸近安定となることは明かである。 ■

定理3.1より分かるように状態フィードバック制御則 $\gamma(x, t)$ におけるゲイン関数が重要な役割を演じる。異なったゲイン関数 $k(t)$ を選択することによって、われわれは、異なった形の安定性を保証することができる。

非線形システムに対して、ノミナルシステムに関するリアプノフ関数をさがすことは、一般的に困難である。しかし、ノミナルシステムは線形である場合に、われわれは、代数リカッチ方程式を用いて、そのような問題を解決することができる。本章以下は、そのような動的システムを考える。つまり、次のように記述されている不確かさをもつ動的システムを考え、このシステムの安定性を保証できる状態フィードバック制御則を提案する。

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + B[\xi(x, t) + u(t)] \quad (27a)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (27b)$$

ここに、 $A \in R^{n \times n}$ と $B \in R^{n \times m}$ は定数行列である。

式(27)によって、このシステムのノミナル部分は線形であることが明らかである。このような動的システムに対して、以下の標準的な仮定を与える。

【仮定3.1】 動的システム(27)で与えられた行列対 (A, B) が完全可制御であるとする。

【仮定3.2】 不確かさ $\xi(x, t)$ が仮定2.1と2.2で与えられた条件を満たすとする。

従って、仮定3.1より次のことが容易に分かる。すなわち、任意の与えられた正定値行列 $Q \in R^{n \times n}$ に対して、次の代数リカッチ方程式

$$A^T P + PA - PBB^T P = -2Q \quad (28)$$

には正定値行列でもある解 P が存在する。

ここでは、式(27)で記述されている不確かさをもつ動的システムに対して、次のような状態フィードバック制御則を提案する。

$$u(t) = p_1(x, t) + p_2(x, t) \quad (29a)$$

ただし、 $p_1(\cdot, \cdot)$ と $p_2(\cdot, \cdot)$ は次の形で表されている。

$$p_1(x, t) = -\frac{1}{2} B^T P x(t) \quad (29b)$$

$$p_2(x, t) = -k(t) \rho^2(x, t) B^T P x(t) \quad (29c)$$

ここに、 $k(t)$ はあるゲイン関数である。

式(29)で表示されたように、状態フィードバック制御則は、 $p_1(\cdot, \cdot)$ と $p_2(\cdot, \cdot)$ という二つの要素からなる。 $p_1(\cdot, \cdot)$ は線形で、線形ノミナルシステム

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \quad (30a)$$

$$x(t_0) = x^0 \quad (30b)$$

を安定させる制御則である。 $p_2(\cdot, \cdot)$ は、 $\rho(\cdot, \cdot)$ を含んでいるから、非線形で、動的システム(27)における不確かさを補償し、システムのロバスト安定性を保証しようとする制御則である。ここで、注意しなければならないことは、不確かさ $\xi(x, t)$ がある定数で有界である場合には、制御則 $p_2(\cdot, \cdot)$ も線形になる。このことは、文献[8]と[9]および[11]で提案された制御則らに比べることによって、本論文で提案される制御則はより簡単な構造をもっていることは明かである。

従って、式(29)で提案された制御則に対して、システム(27)を安定させることを示す定理は次のように述べることができる。

《定理3.2》 不確かさをもつ動的システム(27)が考えられ、仮定3.1と3.2を満たすとすると、このとき、式(27)と(29)からなる閉ループ動的システムは次のような性質をもっている。

(i) ゲイン関数 $k(t)$ を、ある正定数 k_0 とすると、閉ループ動的システム(27), (29)は一様終局有界である。さらに、

(ii) ゲイン関数 $k(t)$ が連続でかつ式(23)を満たすとすると、閉ループ動的システム(27), (29)は一様漸近安定である。

(証明) 状態フィードバック制御則(29)を動的システム(27)に用いると、

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A - \frac{1}{2} BB^T P \right) x(t) + B[p_2(x, t) + \xi(x, t)] \quad (31)$$

が得られる。システム(31)のノミナルシステム

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A - \frac{1}{2} BB^T P \right) x(t) \quad (32)$$

に対して、次のスカラー関数 $V(\cdot) : R^n \rightarrow R^+$ を定義する。

$$V(x) := x^T(t) P x(t)$$

ただし、 P は代数リカッチ方程式(28)の解である。さらに、 P は対称正定行列であるから、Rayleigh原理[18]を用いると、次のような不等式を得ることができる。

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2 \quad (33)$$

ここでは、 $\lambda_{\min}(\cdot)$ と $\lambda_{\max}(\cdot)$ はある行列 (\cdot) の最小と最大固有値をそれぞれ表す。

従って、ノミナルシステム(32)に対して、次の不等式が成り立つことは明かである。つまり、

$$\frac{dV(x)}{dt} = -x^T(t) Qx(t) \leq -\lambda_{\min}(Q)\|x(t)\|^2 \quad (34)$$

式(33)と(34)より、補題2.1と2.2で与えられたスカラー関数 $\gamma_i(\cdot)$, $i=1,2,3$, を次のように定義することができる。

$$\gamma_1(r) := \lambda_{\min}(P) r^2 \quad (35a)$$

$$\gamma_2(r) := \lambda_{\max}(P) r^2 \quad (35b)$$

$$\gamma_3(r) := \lambda_{\min}(P) r^2 \quad (35c)$$

ここで、次のことを注目すると、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \inf \gamma_3(r) = \infty$$

定理3.1の証明で使った方法を用い、本定理で与えられている結論(i)と(ii)を証明することが容易にできる。 ■

4. 数値例

前章までに述べた理論を検証するため、具体的な例題を挙げて、本論文で提案された状態フィードバック制御則を設計する手順をまとめて説明する。

[例題4.1] 次のような不確かさをもつ非線形動的システム[15]を考えよう。

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x) + G(x)[u(t) + \xi(x, t)] \quad (36a)$$

ここで、

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{-10x_1 - x_1x_2 + x_2}{10 + x_2} \\ \frac{x_1x_2}{10} \end{bmatrix} \quad (36b)$$

$$G(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (36c)$$

不確かさ $\xi(x, t)$ を、次の限界条件を満たすとする。

$$\|\xi(x, t)\| \leq \frac{1}{2} |x_1 x_2^2| := \rho(x, t) \quad (37)$$

非線形動的システム(36)のノミナルシステムが安定ではないから、次の状態フィードバック制御則をつくる。

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \quad (38a)$$

ただし、

$$u_1(t) = -\frac{1}{10} x_2(10 + x_2) - \frac{x_1 x_2}{10} \quad (38b)$$

$$u_2(t) = \gamma(x, t) \quad (38c)$$

ここでは、状態フィードバック制御則は $u_1(\cdot)$ と $u_2(\cdot)$ という二つの要素からなる。 $u_1(\cdot)$ はノミナルシステムを安定させる制御則で、 $u_2(\cdot)$ は定理3.1によって設計されるもので、システムにおける不確かさを補償し、システムの安定性を保証しようとする制御則である。従って、式(38)を式(36)に代入すると、次の閉ループ動的システムを得ることができる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x) + G(x) [\gamma(x, t) + \xi(x, t)] \quad (39a)$$

ここで、

$$f(x) = \begin{bmatrix} \frac{-10x_1 - x_1x_2 + x_2}{10 + x_2} \\ -\frac{1}{10}x_2(10 + x_2) \end{bmatrix} \quad (39b)$$

動的システム(39)に対して、状態フィードバック制御則を決めるために、次の正定値関数を考えよう。

$$V(x, t) = 2x_1^2 + \frac{2x_1x_2}{10 + x_2} + 3\left(\frac{x_2}{10 + x_2}\right)^2 \quad (40)$$

式(40)より、

$$\nabla_x V(x, t) = 2 \left[2x_1 + \frac{x_2}{10 + x_2} \quad \frac{10x_1}{(10 + x_2)^2} + \frac{30x_2}{(10 + x_2)^3} \right]^T \quad (41)$$

従って、

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \nabla_x^T V(x, t) F(x) = -4x_1^2 - 4\left(\frac{x_2}{10 + x_2}\right)^2 \quad (42)$$

が負定値関数であることは明かである。すなわち、式(40)で定義された正定値関数 $V(\cdot, \cdot)$ が動的

システム(39)のノミナルシステムに対するリアプノフ関数であることが分かった。

式(21)より、不確かさをもつ非線形動的システム(39)に対する状態フィードバック制御則を

$$\gamma(x, t) = -2k(t) \rho^2(x, t) \left[\frac{10x_1}{(10+x_2)^2} + \frac{30x_2}{(10+x_2)^3} \right] \quad (43)$$

と表すことができる。

定理3.1より、ゲイン関数 $k(t)$ に対して次の結果を得ることができる。

(i) 式(42)より、

$$\liminf_{\|x\| \rightarrow \infty} \gamma_3(\|x\|) = \infty$$

ということが容易に分かる。そうすると、 $k(\cdot)$ を任意な正定数 k_0 として選ぶことができる。ここで、 $k_0 = \frac{1}{4}$ とすると、式(43)より、システムの一様終局有界性を保証できる状態フィードバック制御則が

$$\gamma(x, t) = -\frac{1}{2} \rho^2(x, t) \left[\frac{10x_1}{(10+x_2)^2} + \frac{30x_2}{(10+x_2)^3} \right] \quad (44)$$

となる。このことを、以下のシミュレーションによって示す。ここでは、シミュレーションを実行するために、不確かさ $\xi(x, t)$ が次の形式で与えられるとき、

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} x_1 x_2^2 \quad (45a)$$

ただし、

$$\|\xi(x, t)\| \leq \rho(x, t) = \frac{1}{2} |x_1 x_2^2| \quad (45b)$$

状態ベクトル $x(t)$ と制御則 $u(t)$ は、それぞれ、Fig. 1 (a) と Fig. 1 (b) に示すようになる。

Fig. 1 から分かるように、不確かさをもつ非線形動的システムは、制御則から確かに一様終局有界である。さらに、制御則も連続であることが明らかになる。

Fig.1 (a)

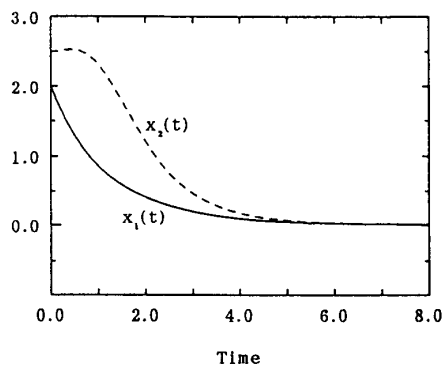


Fig.1 (b)

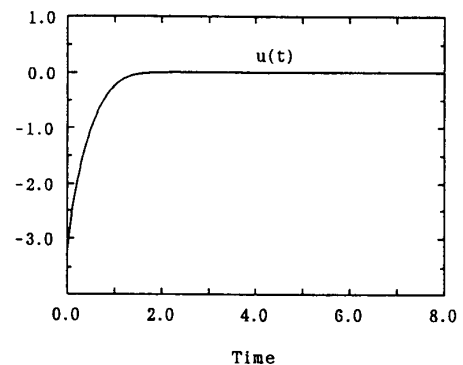


Fig. 1 (a) Responses of state variable $x(t)$ with $k_0 = \frac{1}{2}$ and initial state $x(0) = [2.0 \ 2.5]^T$.
 (b) Time response of state feedback control $u(t)$ with $k_0 = \frac{1}{2}$.

(ii) さらに、一様漸近安定性を保証するために、次のゲイン関数 $k(t)$ を選ぶことができる。

$$k(t) = \frac{1}{4} e^{\beta(t-t_0)} \quad (46)$$

ただし、 $\beta = 0.01$ である。式(46)で決められたゲイン関数が定理3.1で与えられた条件(23)を満たすことが容易に証明される。従って、システムの一様漸近安定性を保証できる状態フィードバック制御則が

$$\gamma(x, t) = -\frac{1}{2} e^{\beta(t-t_0)} \rho^2(x, t) \left[\frac{10x_1}{(10+x_2)^2} + \frac{30x_2}{(10+x_2)^3} \right] \quad (47)$$

となる。ここでは、注意しなければならないことは β の選び方である。つまり、 β の選択は、 $e^{\beta(t-t_0)}$ の発散率 (divergence rate) が $G^T(x, t) \nabla_x V(x, t)$ の零への収束率 (convergence rate) よりおそくようにしなければならない。そうではなければ、 $\gamma(x, t)$ は時刻によって無限大に行くことである。

閉ループシステム(39)と(47)に対して、式(45)を用いるシミュレーション結果は Fig. 2 (a) と Fig. 2 (b) に示されている。Fig. 2 から分かるように、この非線形動的システムは、制御則(47)から確かに一様漸近安定である。制御則も連続で、零へ収束していく。

Fig.2 (a)

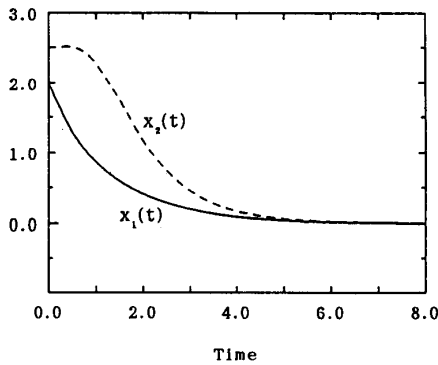


Fig.2 (b)

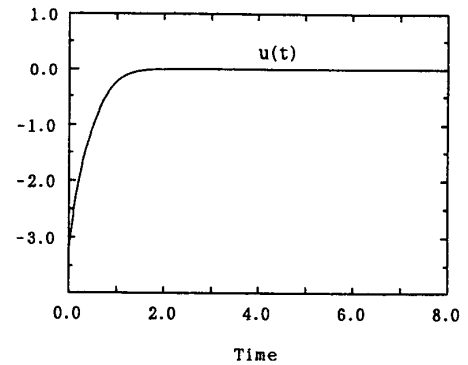


Fig. 2 (a) Responses of state variable $x(t)$ with $k(t) = e^{0.01t}$ and initial state $x(0) = [2.0 \ 2.5]^T$.
 (b) Time response of state feedback control $u(t)$ with $k(t) = e^{0.01t}$

[例題4.2] ここでは、システムのノミナル部分が線形である次のような不確かさをもつ動的システムを考えよう。

$$\frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} [\xi(x, t) + u(t)] \quad (48)$$

ただし、 $\xi(x, t)$ はシステムの不確かさである。

従って、定理3.2によって、状態フィードバック制御則は次のようにつくられる。

まず、 $Q = I$ とする。すなわち、式(28)から、正定行列 P が次式になる。

$$P = \begin{bmatrix} 1.56850 & 0.82306 \\ 0.82306 & 0.96644 \end{bmatrix} \quad (49)$$

次に、式(49)で表す正定行列 P を用いて、かつ $k(t) = k_0 = 1/20$ とすると、式(29)より状態フィードバック制御則は次式になる。

$$u(t) = p_1(x, t) + p_2(x, t) \quad (50a)$$

ただし、

$$p_1(x, t) = - \begin{bmatrix} 0.78425 & 0.41153 \\ 1.60731 & 1.37847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (50b)$$

$$p_2(x, t) = - \frac{\rho^2(x, t)}{10} \begin{bmatrix} 0.78425 & 0.41153 \\ 1.60731 & 1.37847 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (50c)$$

不確かさが次の形式で与えられるとき、

$$\xi(x, t) = \begin{bmatrix} -2 \sin(x_1) \\ -3 \sin(x_2) \end{bmatrix} \quad (51)$$

ただし、

$$\|\xi(x, t)\| \leq \rho(x, t) = \sqrt{4x_1^2 + 9x_2^2} \quad (52)$$

シミュレーションの結果は Fig. 3 (a) と Fig. 3 (b) で表される。Fig. 3 から分かるように、式(50)で与えられた状態フィードバック制御則は確かに不確かさ(51)をもつ動的システム(48)を一様終局有界的に安定させる。さらに、この制御則は連続である。

Fig.3 (a)

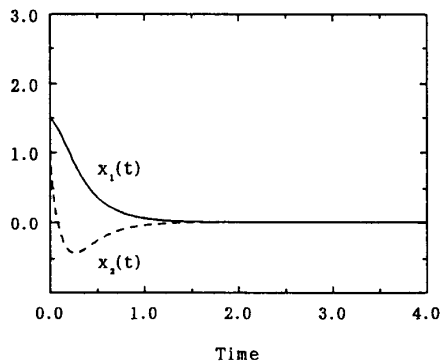


Fig.3 (b)

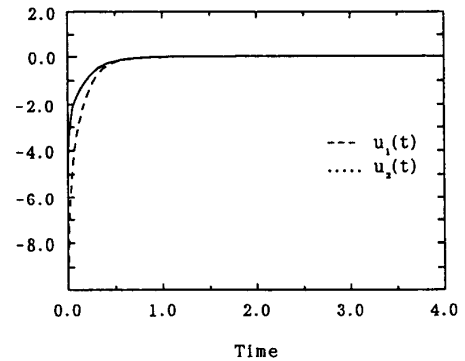


Fig. 3 (a) Response of state variable $x(t)$ in Example 4.2 with initial state $x(0) = [1.5 \ 1.0]^T$.
 (b) Time response of state feedback control $u(t)$ in Example 4.2.

5. おわりに

本論文では、不確かさをもつ非線形動的システムの安定性問題を考察した。この問題に対して、新しい状態フィードバック制御則を提案した。これらの制御則が連続で、ゲイン関数の選択によって、動的システムの異なった形の安定性を保証することができる。すなわち、ゲイン関数がある定数とすると、動的システムの一様終局有界性を保証する。さらに、ゲイン関数がある条件を満たす時間関数とすると、動的システムを一様漸近的に安定させることもできる。従来のロバスト制御則より、本論文で提案されている状態フィードバック制御則はもっと単純な構造をもっている。また、二数値例により検討を行い、ここに示した状態フィードバック制御則の設計・解析法の妥当性と有用性を明らかにした。

方法の導出ならびに数値例から、本論文で開発した方法は有効であり、かつ他の不確かさをもつ非線形動的システムに対し適用可能である。従って、本方法は実際的なロバスト制御問題に対し、新たな応用が期待できる。

参 考 文 献

- [1] 伊藤(編)：ロバスト制御の理論と応用、コンピュータール、13、コロナ社 (1986).
- [2] 計測自動制御学会ミニ特集：ロバスト制御、計測と制御、26-5 (1987).
- [3] 計測自動制御学会ミニ特集：ロバスト制御— H^∞ 制御を中心に、計測と制御、29-2 (1990).
- [4] 計測自動制御学会特集：実用期を迎えたロバスト制御、計測と制御、30-8 (1991).
- [5] P. Dorato (ed.) : Robust Control, IEEE Press, New York (1987).
- [6] P. Dorato and R. K. Yedavalli : Recent Advances in Robust Control, IEEE Press, New York (1990).
- [7] P. Dorato, R. Tempo, and G. Muscato : Bibliography on Robust Control, Automatica, 29 (1993), 201-213.
- [8] S. Gutman : Uncertain Dynamical Systems — A Lyapunov Min-Max Approach, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-24 (1979), 437-443.
- [9] M. J. Corless and G. Leitmann : Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, IEEE Trans. on Automatic Control, AC-26 (1981), 1139-1144.
- [10] B. R. Barmish, M. J. Corless and G. Leitmann : A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems, SIAM Journal on Control and Optimization, 21 (1983), 246-255.
- [11] Z. Qu : Global Stabilization of Nonlinear Systems with a Class of Unmatched Uncertainties, System & Control Letters, 18 (1992), 301-307.
- [12] Z. Qu and D. M. Dawson : Lyapunov Direct Design of Robust Tracking Control for Classes of Cascaded Nonlinear Uncertain Systems Without Matching Conditions, Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control, III (1991), 2521-2526.
- [13] Z. Qu and D. M. Dawson : Continuous Feedback Control Guaranteeing Exponential Stability for Uncertain Dynamical Systems, Proc. of 30th IEEE Conference on Decision and Control, III (1991), 2636-2638.

- [14] H. Wu and K. Mizukami : Exponential Stability of a Class of Nonlinear Dynamical Systems with Uncertainties, *Systems & Control Letters*, 21 (1993), 307-313.
- [15] C. Kravaris and S. Palanki : A Lyapunov Approach for Robust Nonlinear State Feedback Synthesis, *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC-33 (1988), 1188-1191.
- [16] D. M. Dawson, Z. Qu and J. C. Carroll : On the State Observation and Output Feedback Problems for Nonlinear Uncertain Dynamic Systems, *System & Control Letters*, 18 (1992), 217-222.
- [17] J. J. Slotine and W. Li : *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. (1991).
- [18] J. N. Franklin : *Matrix Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., (1968).