

課題研究レポートによる授業と教材開発

—数学的な見方や考え方を育てる授業モデル(Ⅱ)—

入川 義克

身近で起こる現象について生徒が興味・関心を懐き、それを考察しながら処理していく過程で、数学的な課題を見出し、具体的に考えたり、工夫して考えて記号化・数式化・一般化しながら公式や定理を発見し数学を創っていく授業モデルと授業実践の報告である。

研究紀要第41巻では、数学的な見方や考え方を育てる授業モデルとして関数ソフト「Grapes」
《Graph Presentation & Experiment System》を使って実施した関数の授業モデルと図形の授業モデルおよびそれらの授業実践を紹介したが、ここでは、生徒一人ひとりが与えられた課題についてまとめた研究レポートを使った授業モデルとその授業実践を紹介する。生徒と一緒に数学を創っていきながら数学の面白さが実感できる授業を目指した。

1. 研究レポートによる授業モデル(中学数学1)

数学の学習が既習の知識や技能を駆使して問題を解くことや解法をパターン化して覚えることだけでは、数学ができるようになって数学の面白さがわかったとはいえない。数学の面白さは、結果としての知識の中にあるのではなく、数学的に物事を処理しながら数学を創っていく数学的活動のプロセスの中にあると考えているからである。身近な事柄の中に数学を見出し、試行錯誤しながらいろいろな切り口からその問題の解決に迫り、具体化・抽象化・一般化しながら見通しを立てて数学を創っていくところに数学の学習の面白さがある。この授業は、夏休みの宿題である課題研究レポートに時間を掛けて取り組む所から始まる。

(1) オリジナル問題の作成

身近な遊びの中から数学を見つけて数学的な見方や考え方の面白さを体験させたいと考え、ここではビリヤードをイメージした問題を与え、これを基本問題として、オリジナルな問題を作成させた。

『オリジナルな問題を作成しよう』

球を長方形の辺に1回だけはね返らせて、他方の球にあてる。どのようにはね返らせればよいか？

ただし、はね返るときの入射角と反射角は等しいものとする。また、この問題をもとにして、オリジナルな問題を作ってみよう。

(2) 課題研究レポートに挑戦

生徒が作成した問題の中から、次の問題を夏休みの課題研究レポートとした。

『考察したことをレポートにしよう』

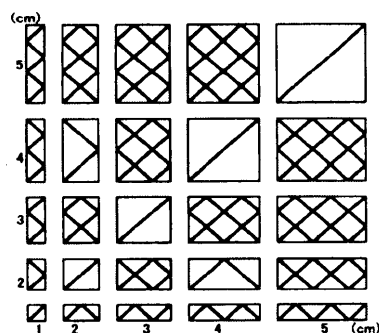
よことたての長さが正の整数の長方形がある。この長方形の左下の隅から 45° の方向で打ち出した球は、長方形の辺に 45° の角度で当たったときは、同じ角度ではね返り、隅にいけば止まるとする。いろいろな長方形で考えてみて、球が何回はね返るか考えてみよう。

例えば、よこ2cm、たて3cmの長方形であれば、はね返る回数は3回である。

この課題に対して、生徒は次のような発想でレポートを完成させていく。

① 具体的に考えて予想する

長方形のよこの長ささとたての長さを決めてはね返る回数を求め、その規則性を調べる。



《1、2、3、4、6、10、18、19、20、21、23、24、25、26、27、28、29、32、33、34、37、38、39、40》

はじめは、ランダムな長方形についてはね返る回数を調べていくが、次第に規則性を考えていくようになる。まとめでは、上記のようにしたものが多かった。次の表と対応させて考えている。

② 工夫して考えて表にする

はね返る回数を求めて表にし、その表から特徴を見つけていく。

7	6	7	8	9	10	11	0
6	5	2	1	3	9	0	11
5	4	5	6	7	0	9	10
4	3	1	5	0	7	3	9
3	2	3	0	5	6	1	8
2	1	0	3	1	5	2	7
1	0	1	2	3	4	5	6
縦横	1	2	3	4	5	6	7

《4、5、7、8、9、10、11、12、13、14、15、16、20、21、22、24、25、26、27、28、29、30、31、32、33、34、35、36、37、39、40》

☆横の長さと同じ縦の長さの場合、球のはね返る回数は0回であること。

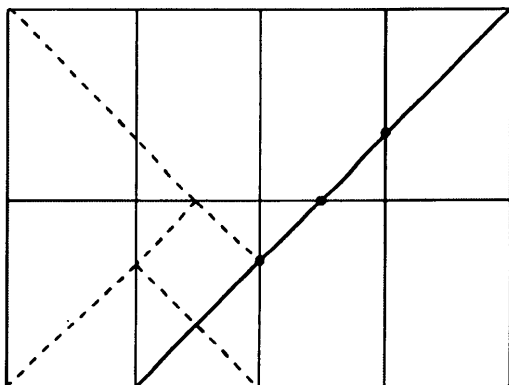
☆横の長さと同じ縦の長さの比が同じ長方形の場合、球のはね返る回数は同じであること。

☆横の長さと同じ縦の長さを入れ替えた長方形の場合、球のはね返る回数は同じであること。

など、表にして初めて気づくことがある。

③ 線対称な図形を考え折れ線を直線に置き換える

もし、はね返らなければ球はどのように進むか考えて、はね返りの問題を線対称な図形を使って直線と長方形の辺の交点の数が、はね返る回数になることを示したレポートもある。



《15、17、32》

はじめは、一つずつはね返り回数を調べていたが、すべてに通用する法則を見つけたレポートもある。

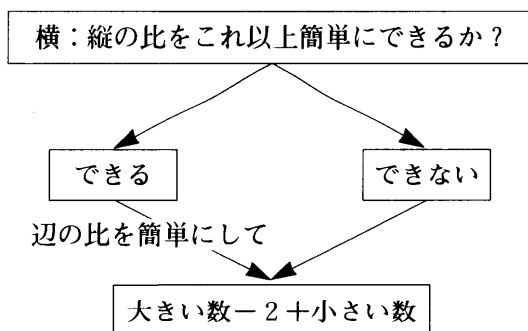
不完全ではあるが、横Mcm、縦Ncmの長方形の場合にはね返る回数は、 $(M-1)+(N-1)$ すなわち $M+N-2$ になる。

具体例とこの結果を比較すれば、正の整数MとNが互いに素である場合に、このことが正しいことに気づいていく。

したがって、 $M:N=2:4$ $M:N=4:6$ のような時には、辺の比を簡単にして、それからはね返る回数は $M+N-2$ と気づくことになる。

④ 一般化することを考えて公式化する

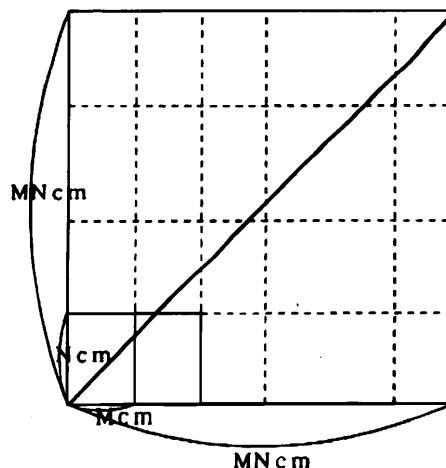
☆②の表から気づいたことを流れ図にして一般化している。



この段階では、横の長さと同じ縦の長さを入れ替えた長方形のはね返る回数と同じであることには気づいていないと思われる。

☆③の発想で一般化した式の説明をしている。

横Mcm、縦Ncmの長方形の場合、MとNが互いに素である時には、この長方形を何枚か使って正方形を作ると、1辺の長さがMNcmの正方形ができる。この時、正方形の対角線と長方形の辺の交点の数が、はね返る回数になるから、求める回数は $(M-1)+(N-1)$ すなわち $M+N-2$ である。



☆横と縦の長さをいろいろ変えて、一般化したものに次のようなレポートがある。

横の長さMcm、縦の長さNcmの長方形の場合にはね返る回数をZ回として、MとNの公約数で類別してはね返る回数を表にする。

(M)		(1)	(2)
N-Z		1-0	
(MとNの公約数)		2-1	2-0
		3-2	
		4-3	4-1
		5-4	
		6-5	6-2
		7-6	
		8-7	8-3
		9-8	
		10-9	10-4
		(1)	(2)

(2)	
1-2	
2-3	
	3-0
4-5	
5-6	
	6-1
7-8	
8-9	
	9-2
10-11	
11-12	
	12-3
13-14	
15-16	
	15-4
(1)	(3)

このような表を工夫して作り出す発想の柔軟さには驚かされる。

MとNの公約数ではね返る回数を類別する

☆MとNの公約数が1の時
 $Z = M - 1 + N - 1$

☆MとNの公約数が2の時
 $Z = M/2 - 1 + N/2 - 1$

☆MとNの公約数が3の時
 $Z = M/3 - 1 + N/3 - 1$

☆MとNの公約数がkの時
 $Z = M/k - 1 + N/k - 1$

《2、4、5、6、7、9、10、11、12、17、22、25、26、29、30、31、32、36、39、40》

以上、中学1年生が夏休みの課題としてまとめた内容の一部である。

《 》内の番号は、そのレポートをまとめた生徒の出席番号である。

これらのレポートを類似した考え方で分類して、生徒がどのような発想でレポートしているかをまとめたものを生徒に返しながら授業を実施した。

生徒がまとめたものを発表させて自己評価と相互評価をさせながら授業を展開していった。

2. 授業の指導案

1年A組40名(男子20名、女子20名)に対して実施した授業の指導案である。

(1) 単元のねらい

ある条件を満たす点の集まりとして図形をとらえ、定規やコンパスを使ってその図形が作図できるようにする。また、合同の意味を理解し、図形の大きさや形を変えない移動として平行移動・回転移動・対称移動を扱い、操作的な活動を通してそれらの性質を確認しながら、平面図形の基本事項に習熟させることにして授業計画を立てた。

(2) 単元計画

- ① 点の集まりと基本の図形 3時間
- ② 点の集まりと作図 5時間
(本時は、その1時間目)
- ③ 図形の移動 5時間
- ④ 問題演習 3時間

(3) 本時の主題

「反射」の中の数学

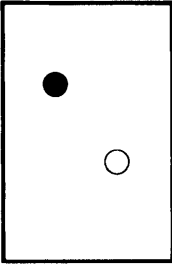
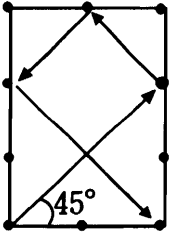
(4) 本時の主題

身近な生活や遊びの中から数学を見出し、それらを数学の問題として考察し、生徒自身が作成したオリジナルな問題を試行錯誤を繰り返しながら解決していく授業を展開することは、数学への興味・関心を高め、意欲的かつ主体的に数学に取り組む生徒を育てることになる。

ここでは、「ビリヤード」や「光の反射」をイメージさせながら、対称な図形の問題を扱うときの基本的な考え方を理解させたり、オリジナルな問題を作成する手法を示したり、球のはね返り回数に着目してまとめたレポートを利用して、記号化・具体化・一般化の考え方に習熟させることをめざす。

基本になる作図を問題の中に設定することで、作図の必要性を実感させ、図形の証明に繋げるようにしたいというねらいがある。

3. 授業展開過程

時間	学習内容及び活動	指導上の留意点
<p>導入 はね返りの問題の基本になる解法を理解する</p>	<ul style="list-style-type: none"> 基本になる問題を提示し、はね返りの問題の解法のポイントを理解させる。 <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>【基本になる問題】 球を長方形の辺に1回だけ はね返らせて、他方の球に あてる。どのようにはね返 らせればよいか？</p> </div>  <p>※はね返るときの入射角と反射角は等しいものとする</p>	<ul style="list-style-type: none"> 長方形の枠を印刷したプリントを生徒に配布させる。 正確な作図をすることは要求しない。 【基本になる問題】の解法のポイントを押さえる。
<p>展開Ⅰ (10分) 問題作成の手法を理解する</p>	<ul style="list-style-type: none"> 生徒が作った問題をまとめながら、問題を作成するときの考え方を整理する。 <p>【生徒が作成するであろうと予想される問題】</p> <ol style="list-style-type: none"> ① はね返る回数を変える問題。 ② 球の個数を変える問題。 ③ 球の位置を指定する問題。 ④ 長方形の枠を他の形に変える問題。 ⑤ 球の道筋の最短距離に着目する問題。 ⑥ はね返る回数を調べる問題 	<ul style="list-style-type: none"> 【基本になる問題】の構成要素を分析して、問題を作成するときの手法を示す。 ここでは、生徒に色々な問題を作らせることに重点をおく。
<p>展開Ⅱ (20分) 発展した問題に挑戦する</p>	<ul style="list-style-type: none"> 夏休みの課題としてレポートした問題を提示し、生徒が考えたことを確認していく。 <div style="border: 1px dashed black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>【夏休みの課題としてレポートした問題】 長方形の左下すみから45°の角度で打ち出した球は長方形のすみに行けば止まるとする。何回はね返って止まるか。長方形の大きさをいろいろと変えて考えてみよう。</p> </div> <p>[例] たて3cm、よこ2cmの長方形の場合</p>  <p>※始めとすみに入った終わりは、はね返る回数には数えないから、はね返える回数は3回である。 (コンピュータを使ってはね返り回数を確認)</p> <ul style="list-style-type: none"> 数学的な考え方を取り入れながら具体例から発展的な考察をさせていく。 	<ul style="list-style-type: none"> 生徒のレポートを分類してまとめ、考え方を全員に示す。 (まとめは自己評価であり相互評価でもある) 格子点状に点を打ったワークシートと表を利用して作業させながら考えさせていく。 よこMcm、たてNcmの長方形、2つの数MとNの最小公倍数、最大公約数を記号化するような誘導をする。
<p>まとめ (5分)</p>	<ul style="list-style-type: none"> 学習内容をまとめ、要点を確認する。 	<ul style="list-style-type: none"> 生徒の発想を大切にしながらまとめていく。

4. 授業展開上の留意点

「はね返りの数学」と題して実施した授業である。基本となる問題を提示して、はね返りの問題の解法のポイントをキーワードで印象つけて“垂線を引く”“線対称な図形”という用語でまとめながら、生徒の作成したオリジナル問題を発表させることから導入していった。

☆白球を長方形の辺に1回だけはね返らせて黒球にあて、その黒球をいずれかの角に入れるためには黒球をどこに置けばよいか？

☆白球を長方形の辺に2回はね返らせて、黒球に当てるにはどのような方法があるか？

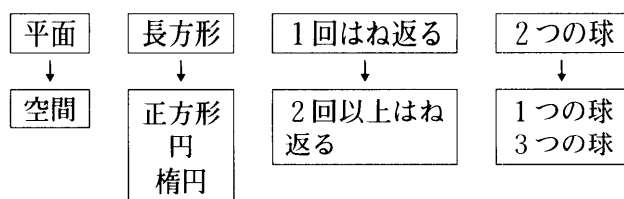
また、何通りの方法があるか？

☆白球を1回はね返らせて黒球にあてる、この黒球を1回はね返らせて白球が初めにあった位置に戻すことができるか？ 等々。

生徒は、いろいろな発想で問題を作成し、その解法に挑戦していた。

授業では、基本となる問題の構成要素を分析してその要素を変えていく方法で新しい問題を作成する手法を紹介した。

具体的には、



生徒が考えたことを数学的に表現していった、数学を創っていくことが、この授業の主題でもあった。

x 、 y を正の整数として、横 x cm、縦 y cmの長方形ではね返る回数を $[x, y]$ で定義した。

$$\star [x, x] = 0$$

$$\star [x, y] = [y, x]$$

$$\star [x, y] = [x/p, y/p]$$

ただし、 p は x と y の公約数、

$$\star [x, y] = [x/G, y/G]$$

ただし、 G は x と y の最大公約数

$$\star [x, y] = x/G + y/G - 2$$

ただし、 G は x と y の最大公約数

$$\star [x, y] = L/x + L/y - 2$$

ただし、 L は x と y の最小公倍数

生徒は、これらの等式のほとんどもに気づき授業でも発表することができた。

数学を学習していく過程で生徒は教師の想像を越える素晴らしい発想で授業を創造していく。

第3回国際数学・理科教育調査の結果によると、日本の児童・生徒の算数・数学における学習の到達度は、国際的にみてトップクラスにある。ところが、「算数が好き」「数学が好き」と答えた児童・生徒の割合が最も少ないのが日本であった。

この現状は、生徒が授業を受身で捉えている限り、変わらないと考える。数学を生徒と一緒に楽しみながら、お互いが切磋琢磨していく主体的な学習集団に高めていくことが大切だと考えている。

〈参考文献〉

1. 拙稿；関数ソフト「Grapes」を使った教材開発—数学的な見方考え方を育てる授業モデル—、広島大学附属福山中・高等学校中等教育研究紀要 第41巻
2. 第3回国際数学・理科教育調査 (TIMSS-R)
文部科学省調査統計企画課