

2023 年度 博士論文

因果性に基づく減衰モデルの 3 次元  
有限要素モデルによる RC 非線形地震応答解析  
への適用に関する研究

(Study on Application of Causality-Based Damping Model to Nonlinear  
Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures Using  
3-Dimensional Finite Element Model)

学位取得年月 2024 年 3 月

広島大学大学院 先進理工系科学研究科 建築学プログラム

D221773

太田 成



# 目次

第 1 章 緒言.....	1
1.1 本研究の背景と目的.....	1
1.2 本論文の構成.....	3
第 2 章 時刻歴応答解析の減衰モデル.....	7
2.1 初期減衰について.....	7
2.2 運動方程式.....	8
2.3 従来の減衰モデル.....	9
2.3.1 Rayleigh 減衰.....	9
2.3.2 モード減衰.....	9
2.4 近年の減衰モデル.....	10
2.4.1 因果的履歴減衰.....	10
2.4.1.1 概要と虚部変換法.....	10
2.4.1.2 定式化.....	12
2.4.1.3 減衰比と共振振動数の精度.....	14
2.4.2 拡張 Rayleigh 減衰.....	15
2.4.2.1 定式化.....	16
2.4.2.2 減衰比と共振振動数の精度.....	17
2.4.3 Uniform 減衰.....	18

2.4.3.1	定式化 .....	18
2.4.3.2	減衰比と共振振動数の精度 .....	19
2.5	簡易モデルによる数値解析の検証 .....	21
2.5.1	線形モデル .....	21
2.5.1.1	モデルの概要 .....	21
2.5.1.2	結果と考察 .....	23
2.5.2	非線形モデル .....	27
2.5.2.1	モデルの概要 .....	27
2.5.2.2	結果と考察 .....	29
2.5.2.3	計算時間の比較 .....	33
2.5.3	解析プログラムの検証 .....	34
2.6	2章のまとめ .....	37
第3章	鉄筋コンクリート材料を対象とした非線形 3DFE 解析 .....	41
3.1	有限要素を対象とした鉄筋コンクリートの非線形構成則 .....	41
3.1.1	有限要素 .....	41
3.1.2	コンクリート .....	42
3.1.2.1	ひび割れモデル .....	42
3.1.2.2	破壊規準 .....	44
3.1.2.3	圧縮特性 .....	44
3.1.2.4	引張特性 .....	45
3.1.2.5	ひび割れ後のせん断伝達特性 .....	47
3.1.2.6	ひび割れ後の圧縮強度劣化特性 .....	48
3.1.3	鉄筋 .....	49
3.2	動的加振試験の再現解析と検証 .....	50
3.2.1	実験の概要 .....	50
3.2.2	解析モデル .....	51

3.2.3 解析条件 .....	53
3.2.4 解析結果 .....	54
3.3 3章のまとめ .....	65
<b>第4章 実規模モデルを対象とした線形問題の3方向同時入力による 地震応答解析 .....</b>	<b>69</b>
4.1 日本の原子力発電所施設について .....	69
4.2 解析モデルの概要 .....	71
4.2.1 解析モデル .....	71
4.2.2 モデルの固有振動数と固有モード .....	75
4.3 解析条件 .....	77
4.4 解析結果 .....	79
4.4.1 結果と考察 .....	79
4.4.2 計算時間 .....	85
4.5 4章のまとめ .....	86
<b>第5章 実規模モデルを対象とした非線形問題の3方向同時入力による 地震応答解析 .....</b>	<b>89</b>
5.1 解析モデルの概要 .....	89
5.1.1 解析モデル .....	89
5.1.2 モデルの固有振動数と固有モード .....	92
5.2 解析条件 .....	94
5.3 解析結果 .....	95
5.3.1 結果と考察 .....	95
5.3.2 各減衰モデルの計算時間 .....	121
5.3.3 瞬間型と初期型の応答の違い .....	122
5.4 領域分割法と反復法による並列計算の計算速度 .....	124

5.5 5章のまとめ .....	126
第6章 結論.....	129
付録（動的陽解法） .....	135
研究実績 .....	163
謝辞 .....	165

# 第1章 緒言

## 1.1 本研究の背景と目的

従来の建築分野における地震応答解析では、コンピュータの性能の制約により、簡易的な多質点系モデルによる時刻歴応答解析が行われてきた。しかし最近では、計算機の性能向上に伴い、高度な検討が要求される建物の安全性検証のために、詳細な3次元骨組や有限要素(3DFE)で構成される大規模なモデルが用いられるようになってきた。さらに、大地震時の安全性の検証に、非線形材料を適用した時刻歴応答解析も実施されている。特に原子力分野では、鉄筋コンクリート構造物を対象とした、3DFEモデルによる非線形解析が行われている。

時刻歴の運動方程式では、慣性力 $M\ddot{\mathbf{u}}$ 、減衰力 $C\dot{\mathbf{u}}$ 及び復元力 $K\mathbf{u}$ で構成されており、一般的に式(1.1)のように表される。

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

ここに、 $M$ : 質量マトリクス、 $C$ : 質量マトリクス、 $K$ : 剛性マトリクス、 $\ddot{\mathbf{u}}$ : 加速度ベクトル、 $\dot{\mathbf{u}}$ : 速度ベクトル及び $\mathbf{u}$ : 変位ベクトルである。

減衰項は、材料内部及び接合部等の摩擦による減衰を等価な粘性減衰として表現したものであり、初期減衰と呼ばれ弾性時から塑性時まで生じるものとしてモデル化される。塑性時は、これに加えて材料の塑性化に伴う減衰が弾塑性部材のモデル化によって明示的に考慮されることになる。

所で、実際の構造物の初期減衰は、構造物の2次、3次モードの減衰比が、1次モードの減衰比と同程度か若干大きい程度と計測されており<sup>1-1)</sup>、振動数よりも振幅に依存性が観察されている。また、原子力施設の評価では、JEAG(電気技術指針)<sup>1-2)</sup>に示されているように、各部材のひずみエネルギーに基づき各モードの減衰比を一定とするひずみエネルギー比例型のモード減衰を用いて検討されている。このように、数値シミュレーションでは振動数非依存性が重要となることから、工学的には、複数の主要なモードに対して過大ある

いは過少とならないような、減衰モデルが望まれている。

ところが、大規模モデルでモード減衰を用いると $\mathbf{C}$ が密行列となることで解析負荷が大きくなり、計算に膨大な時間を要してしまう。一方で、Rayleigh 減衰を用いれば疎行列で解けるので計算負荷はかからないが、考慮したい振動数域の幅が広い場合には減衰比が振動数に依存してしまう恐れがある。

これらの問題点を克服するために、新たな減衰モデルが提案されている。

茂木らは、従来の剛性比例型減衰に減衰力の上限值を設けた、振動数に依存しないような改良型キャップ減衰<sup>1-3),1-4)</sup>を提案している。この減衰モデルは、元々、Hall が提案したキャップ減衰であるが、減衰力の上限值の設定に課題が残っており、茂木らによって時々刻々と得られる復元力の振幅量を用いることで、高次モードの減衰力が増加せずに、振動数に依存しないような工夫がなされている。

Luo と五十子は、負の剛性要素と並列のマクスウェル要素に接続されたモデルである分数次導関数モデル<sup>1-5)</sup>を提案している。従来の因果的な減衰モデルである、Biot モデル (Keivan モデル)、Makris モデル、Tuned Maxwell-Wiechert(TMW)モデルと比較し、提案されたモデルが統一したモデルあることを確認している。質点系モデルの仮想階に RILD 要素を配置することで、振動数に依存しないようなモデルを実現している。

中村が提案した、因果性に基づく減衰モデル (因果的履歴減衰及び拡張 Rayleigh 減衰)がある<sup>1-6),1-7)</sup>。規模の大きな 3DFE モデルに対して現実的な解析時間で検討可能<sup>1-8),1-9)</sup>である。さらに、非線形問題に対しても、中村は Bi-Linear 型や Tri-Linear 型の非線形特性を有する質点系モデル<sup>1-10)</sup>により、また、茂木ら<sup>1-11)</sup>は材端弾塑性のフレームモデルによって適用できることを確認している。動的陰解法をベースに開発されていたが、筆者らは動的陽解法にも適用できることを確認<sup>1-12)</sup>した。また、Rayleigh 減衰と同様に振動数領域で定量的に減衰比を把握することが可能である。

Huang らが提案されたモデル<sup>1-13)</sup>として Uniform 減衰 (Arup 減衰<sup>1-14)</sup>とも呼ばれている)がある。この減衰は、動的陽解法には極めて有効で、かなり幅広い振動数域で減衰比を一定とすることができるものやや剛性を高く評価する傾向があることが指摘されている。

ここでは、将来的な大規模 3DFE モデルへの拡張性の観点から、因果性に基づく減衰モデルと Uniform 減衰が、今後期待される有力なモデルであると判断し取り上げている。

ただし、取り上げた減衰モデルについては、近年提案されたモデルのため、検討が十分ではなく、非線形問題における振動性状や、ランダム振動下での減衰モデルの影響について明確になっておらず、特に 3DFE モデルにおいては検討がなされていない。今後、ますます材料非線形による詳細な大規模モデルで、時刻歴応答解析が実施されることが予測されることから、これに対応できる新たな減衰モデルの必要性が高まるものと予見される。

そこで本論では、今後期待される減衰モデルについて簡易なモデルにより、微小変形レベル下での、線形と非線形の振動性状について比較検討した。特に有用である因果性に基づく減衰モデルについて、鉄筋コンクリートの材料非線形を与えた 3DFE モデルの適用性に

について、過去に実施された実験結果のシミュレーション解析を実施して新たに確認した。さらに実機モデルを想定した仮想原子力発電所の大規模 3DFE モデルを対象に、線形問題から非線形問題に対して地震応答解析を実施し、鉄筋コンクリートの動的な非線形解析における因果性に基づく減衰モデルの適用性と有用性について明らかにする。

## 1.2 本論文の構成

本論文は、本章「緒言」を含めて、全 6 章によって構成される。以下に 2 章以降の概要について述べる。

第 2 章の「時刻歴応答解析の減衰モデル」では、初めに、時刻歴応答解析で用いられる従来の減衰モデルと、近年提案された減衰モデルである因果性に基づく減衰モデルと Uniform 減衰モデルを対象に概要を説明している。これらの減衰モデルの基本性状を把握するために、簡易なモデルを用いて比較検討している。線形問題では、減衰比や固有振動数の変化を確認し、非線形問題では、バイリニア型の復元力特性を有するモデルを対象に、最大塑性率や最大加速度応答を定量的に分析している。ここでは、非線形モード減衰を目標とする結果と位置づけ、その結果に対して、従来の減衰モデル及び近年の減衰モデルの結果を比較することで、減衰モデルとしての性能を明らかにしている。

第 3 章の「鉄筋コンクリート材料を対象とした非線形 3DFE 解析」では、壁式構造を対象とした FE モデルに適用可能な、鉄筋コンクリート材料の非線形構成則の概要を説明している。また、解析の妥当性を示す目的で、過去に実施された動的加振試験の再現解析を実施した。この実験は、試験体が線形弾性時の状態から、壁が破壊するまでの強非線形時の状態まで加振されている。ここで初めて、鉄筋コンクリート材料の非線形構成則を与えた 3DFE モデルに対して、因果性に基づく減衰モデルを適用し非線形解析を実施した。因果性に基づく減衰モデルの解析結果と実験結果と比較することで、減衰モデルの適用性と妥当性を示している。また、減衰マトリクスの作成時において剛性マトリクスを初期型と瞬間型と比較し、どの程度応答に影響を及ぼしているかを確認し、その結果について論じている。

第 4 章の「実規模モデルを対象とした線形問題の 3 方向同時入力による地震応答解析」では、仮想原子力発電所を模擬した、節点数が 2400 程度の FE モデルを作成し、地震動を 3 方向に入力し線形の動的解析を実施している。各減衰モデルであるモード減衰、因果性に基づく減衰及び Rayleigh 減衰を対象に、最大変位分布、最大加速度分布及び加速度応答スペクトルの結果を比較している。ここでも 2 章と同様に、モード減衰を目標とする結果とした。ここでは特に、因果性に基づく減衰が、従来の減衰に対して、規模の大きな 3DFE モデルを対象としても、減衰モデルの性能や計算時間に対して、十分な実用性を有していることを明らかにしている。

第5章の「実規模モデルを対象とした非線形問題の3方向同時入力による地震応答解析」では、鉄筋コンクリートの非線形解析で精度を有する結果を得るために、4章の3DFEモデルのメッシュを細かく分割し、節点数が21000程度の大規模FEモデルを作成し検討した。この規模では、モード減衰で検討できないので、目標とする結果が無く検証が困難であるが、2章から4章までに得られた結果を踏まえて、建屋の全体的な応答の傾向から、妥当な結果を判断し、因果性に基づく減衰が、従来のRayleigh減衰に比べて適切な減衰で評価できていることを明らかにしている。また、非線形解析時における計算時間についてもそれぞれの減衰モデルで比較を行っている。さらに因果性に基づく減衰においても、領域分割法による並列計算が何ら問題なく適用可能であることを確認し、得られた知見について論じている。

第6章「結論」では、本研究の総括的な結論が示されている。

## 1章の参考文献

- 1-1) AIJ: Damping and Vibration of Buildings, 2020  
日本建築学会：建築物の減衰と振動, 2020
- 1-2) 日本電気協会：原子力発電所耐震設計技術指針 JEAG4601-1991 追補版, 日本電気協会, 1991
- 1-3) Mogi, Y., Nakamura, N., Nabeshima, K., Ota, A.: Vibration Characteristics of Capped Viscous Damping Based on Frame Restoring-Force Amplitude, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 8, doi: 10.3389/fbuil.2022.858029, Accessed 2022.3
- 1-4) 茂木良宏, 中村尚弘, 鍋島国彦, 太田成: 最大応答復元力に基づいたキャップ減衰モデルの開発, *日本建築学会技術報告集*, 第 29 巻, 第 71 号, pp.115-120, 2023.2
- 1-5) Luo, H., Ikago, K.: Unifying causal model of rate-npendent linear dampingfor effectively reducing seismic response in low-frequency structures, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 50, pp.2355-2378, 2021.6
- 1-6) Nakamura, N.: A PRACTICAL METHOD FOR ESTIMATING CASUAL HYSTERETIC DAMPING, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 70, No. 596, pp. 33-39, 2005.10 (in Japanese)  
中村尚弘：因果的履歴減衰の実用的評価法, *日本建築学会構造系論文集*, 第 70 巻, 第 596 号, pp. 33-39, 2005.10
- 1-7) Nakamura, N.: STUDY ON UPGRADING OF RAYLEIGH DAMPING, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 79, No. 706, pp. 1751-1761, 2014.12 (in Japanese)  
中村尚弘：Rayleigh 減衰の高度化に関する研究, *日本建築学会構造系論文集*, 第 79 巻, 第 706 号, pp. 1751-1761, 2014.12
- 1-8) Mogi, Y., Nakamura, N., Ota, A.: APPLICATION OF EXTENDED RAYLEIGH DAMPING MODEL TO 3D FRAME ANALYSIS, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 86, No. 783, pp. 738-748, 2021.5 (in Japanese)  
茂木良宏, 中村尚弘, 太田成：拡張 Rayleigh 減衰モデルの 3 次元骨組解析への適用, *日本建築学会構造系論文集*, 第 86 巻, 第 783 号, pp. 738-748, 2021.5
- 1-9) Nakamura, N.: Earthquake Response Analyses of Large Scale FEM Model using Causal Hysteretic Damping Model, *The 58th National Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, [https://doi.org/ 10.11345/japanntam.58.0.90.0](https://doi.org/10.11345/japanntam.58.0.90.0), 2009  
中村尚弘：因果的履歴減衰モデルを用いた大規模 FEMモデルの地震応答解析, 第 58 回理論応用力学講演会, 2009
- 1-10) Nakamura, N.: APPLICATION OF CAUSAL HYSTERETIC DAMPING MODEL TO NONLINEAR SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF SUPER HIGH-RISE BUILDING, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 84, No. 759, pp.

597-607, 2019.5 (in Japanese)

中村尚弘：因果的履歴減衰モデルの超高層建物の非線形地震応答解析への適用，日本建築学会構造系論文集，第84巻，第759号，pp. 597-607, 2019.5

- 1-11) Mogi, Y., Nakamura, N., Nabeshima, K., Ota, A.: Performance of inherent damping models in inelastic seismic analysis for tall building subject to simultaneous horizontal and vertical seismic motion, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 52, pp.3746-3764, 2023.10
- 1-12) Ota, A., Nakamura, N., and Mogi, Y.: EXAMINATION OF APPLICABILITY OF CAUSALITY-BASED DAMPING MODEL TO DYNAMIC EXPLICIT METHOD, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 86, No. 786, pp. 1168-1179, 2021.8 (in Japanese)
- 太田成, 中村尚弘, 茂木良宏：因果性に基づく減衰モデルの動的陽解法への適用性検討，日本建築学会構造系論文集，第86巻，第786号，pp. 1168-1179, 2021.8
- 1-13) Huang, Y., Sturt, R., Willford, M.: A damping model for nonlinear dynamic analysis providing uniform damping over a frequency range, *Computers and Structures*, 2019
- 1-14) Hall, J. F.: Performance of Viscous Damping in Inelastic Seismic Analysis of Moment-Frame Buildings, PASADENA, CALIFORNIA, REPORT NO. EERL 2018-01, 2018

## 第2章

# 時刻歴応答解析の減衰モデル

### 2.1 初期減衰について

物理的派生要因による建築物に生じる減衰は、Table 2.1 のように整理<sup>2-1)</sup>されている。建築物内部に生じるものと、外部で生じるもので大きく分類されている。特に建築物内部に生じる減衰では、初期減衰として固体内や固体間に生じる摩擦によるもの、内部粘性抵抗によるものがあり、また、履歴減衰として部材等の塑性化によるものがある。

Table 2.1 Classification of damping by physical factors

分類	物理的要因	概要
建築物内部	固体内摩擦	<ul style="list-style-type: none"> <li>・固体内の内部摩擦によるエネルギー消費</li> <li>・分子間、結晶等の組織間のマイクロクラックの滑りに伴う摩擦</li> <li>・弾性的挙動であり、弾性ヒステリシス損失とも呼ばれる</li> </ul>
	固体間摩擦	<ul style="list-style-type: none"> <li>・物体間の摩擦によるエネルギー消費</li> <li>・滑り摩擦と転がり摩擦がある</li> <li>・建築物の例としては、高力ボルト接合部の摩擦がある</li> </ul>
	内部粘性抵抗	<ul style="list-style-type: none"> <li>・流体の内部粘性に起因するエネルギー消費</li> <li>・流体の分子粘性の効果により運動エネルギーが熱エネルギーに変換</li> <li>・他に乱流によるものもあるが建築物内部では関係しない</li> </ul>
	塑性化	<ul style="list-style-type: none"> <li>・塑性履歴によるエネルギー消費</li> <li>・結晶や組織の微細構造の変化による</li> <li>・弾性限界を超えて発生し、残留変位が残る場合もある</li> </ul>
建築物に付加	外部粘性抵抗	<ul style="list-style-type: none"> <li>・物体と粘性帯の相対的な移動に伴う抵抗によるエネルギー消費</li> <li>・建築物では、制振に用いられるオイルダンパーや粘性体ダンパー等</li> </ul>
建築物外部	エネルギー逸散	<ul style="list-style-type: none"> <li>・系の振動エネルギーが外部に伝播・逸散によるエネルギー消費</li> <li>・建築物の例としては、地盤との動的相互作用による波動として逸散</li> </ul>
	空力減衰	<ul style="list-style-type: none"> <li>・流体が気流中で振動する場合に発生する付加的空気力による効果</li> <li>・一般的には振動を抑制するが、振動を助長する場合もある</li> <li>・後者の例として、風直交方向の振動で発生する空力不安定振動がある</li> </ul>

所で、現状の設計等で用いられる解析モデルでは、部材レベルを一要素あるいは、複数

要素で分割しモデル化されることが多いが、材料レベルでコンクリートに含まれる骨材等をモデル化することはほとんどない。要素に与える材料特性としては、弾性体として設定される場合や、弾塑性体において構造の安全性が評価できる材料モデルを設定される場合が一般的である。ただし、これらの材料モデルでは、初期減衰が模擬されていないため、解析上では、粘性減衰 $\mathbf{C}$ で考慮することが多い。なお、塑性化に伴う履歴減衰については、弾塑性の復元力特性で考慮されていると判断される。

本論で対象としている減衰は、この初期減衰であると考えられる。

## 2.2 運動方程式

減衰モデルの説明の前に運動方程式<sup>2-2)</sup>について整理する。線形解析のみならず非線形解析を実施することを想定して増分形式で表している。増分形式の Newmark- $\beta$  法による時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  に変化における運動方程式は、式(2.1)のような形で得ることができる。

$$\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \mathbf{K}\right)\Delta\mathbf{u} + \Delta\mathbf{r}_d = \mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}(t)\right) \quad (2.1)$$

ここに、

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t) \quad (2.2a)$$

$$\Delta\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_d(t + \Delta t) - \mathbf{r}_d(t) \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{f}_e(t) = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{r}_d(t) + \mathbf{r}(t) + \mathbf{f}_u(t) \quad (2.2c)$$

$\mathbf{M}$  : 質量マトリクス、 $\mathbf{K}$  : 剛性マトリクス、

$\mathbf{u}$  : 変位ベクトル、 $\dot{\mathbf{u}}$  : 加速度ベクトル、 $\ddot{\mathbf{u}}$  : 加速度ベクトル、

$\mathbf{r}_d$  : 減衰力ベクトル、 $\mathbf{r}$  : 復元力ベクトル、 $\mathbf{f}_u$  : 不平衡力ベクトル、

$\beta$  : Newmark- $\beta$  法のパラメータ、 $\Delta t$  : 解析時間刻み

である。なお、 $\mathbf{r}_d$  を  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}$  で表すと、 $\Delta\mathbf{r}_d$  及び  $\Delta\dot{\mathbf{u}}$  は次式を得る。

$$\Delta\mathbf{r}_d = \mathbf{C}(\dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) - \dot{\mathbf{u}}(t)) = \mathbf{C}\Delta\dot{\mathbf{u}} \quad (2.3a)$$

$$\Delta\dot{\mathbf{u}} = \frac{\delta}{\beta\Delta T}\Delta\mathbf{u} - \frac{\delta}{\beta}\dot{\mathbf{u}}(t) + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right)\Delta T\ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (2.3b)$$

ここに、 $\mathbf{C}$  : 減衰マトリクス、 $\delta$  : Newmark- $\beta$  法の数値減衰特性に関わるパラメータである。

式(2.3a),(2.3b)を式(2.1)に代入すると、次式となる。

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right)\Delta\mathbf{u} = \mathbf{f}(t + \Delta T) - \mathbf{f}_e(t) \\ &+ \mathbf{M}\left(\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{u}}(t)\right) + \mathbf{C}\left(\frac{\delta}{\beta}\dot{\mathbf{u}}(t) - \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}(t)\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

非線形解析時において解の発散を抑制するために、数値減衰を生じさせて高振動数側の応答を抑制させる方法もある。ただし、振動数領域において、数値減衰がどの程度生じているか不明であるため、本論では、数値減衰は考慮せず検討する。

## 2.3 従来の減衰モデル

### 2.3.1 Rayleigh 減衰

一般的によく用いられる Rayleigh 減衰の減衰マトリクス  $\mathbf{C}$  は、式(2.5)のように質量マトリクス  $\mathbf{M}$  と剛性マトリクス  $\mathbf{K}$  の線形和で表される。

$$\mathbf{C} = \alpha_0 \mathbf{M} + \beta_0 \mathbf{K} \quad (2.5)$$

$\mathbf{K}$  については、初期剛性マトリクス  $\mathbf{K}_I$  や瞬間剛性マトリクス  $\mathbf{K}_T$  を用いることがある。

所で、 $\alpha_0$  及び  $\beta_0$  は、二点の振動数  $f_1, f_2$  に対して、目標とする減衰比  $\xi_{aim1}, \xi_{aim2}$  となるように設定される。特に、 $\xi_{aim} = \xi_{aim1} = \xi_{aim2}$  とすると、式(2.6a), (2.6b) となる

$$\alpha_0 = \frac{4\pi\xi_{aim}f_1f_2}{f_1 + f_2} \quad (2.6a)$$

$$\beta_0 = \frac{\xi_{aim}}{\pi(f_1 + f_2)} \quad (2.6b)$$

式(2.4)に、式(2.5)及び式(2.6a), (2.6b)に代入すれば、一般的な Rayleigh 減衰の Newmark- $\beta$  法による運動方程式となる。

また、減衰比と振動数の関係は式(2.7)となる。

$$\xi(f) = \frac{\alpha_0}{4\pi f} + \pi\beta_0 f \quad (2.7)$$

### 2.3.2 モード減衰 (Wilson-Penzien 減衰)

Wilson-Penzien によって提案されたモード減衰<sup>2-3)</sup>の減衰マトリクスは、式(2.8)で提案されている。

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \left( \sum_{q=1}^n \frac{4\pi\xi_{aim_q}f_q}{M_q} \boldsymbol{\varphi}_q \boldsymbol{\varphi}_q^T \right) \mathbf{M} \quad (2.8)$$

ここに、 $f_q$  及び  $\boldsymbol{\varphi}_q$  は、 $n$  次のモードを考慮した非減衰系の固有値解析で得られる  $q$  番目の固有振動数と固有モードベクトルであり、 $M_q$  は、一般化質量  $\boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_q$  である。なお、 $\mathbf{C}$  は、固有モードベクトルで計算されるためフルマトリクスとなる。

$\xi_{aim_q}$  については、材料や構造物ごとに減衰比が異なる場合がある。例えば、ひずみエネルギー型比例減衰<sup>2-4)</sup>では、モードごとにひずみエネルギーに比例した減衰比を算出し、減衰マトリクスが作成される。式(2.9)のように、モードが  $q$  番目の  $\xi_{aim_q}$  は次のように算出される。

$$\xi_{aim_q} = \frac{\sum_e (\xi_{aim_e} \cdot 1/2 \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{K}_e \boldsymbol{\varphi}_q)}{\sum_e (1/2 \boldsymbol{\varphi}_q^T \mathbf{K}_e \boldsymbol{\varphi}_q)} \quad (2.9)$$

ここに、ある要素  $e$  の減衰比  $\xi_{aim_e}$  及び要素剛性マトリクス  $\mathbf{K}_e$  を表している。

## 2.4 近年の減衰モデル

### 2.4.1 因果的履歴減衰

因果的履歴減衰モデル<sup>2-5)</sup> (以降、因果減衰: **causal damping** と呼ぶ) は、複素関数の虚数部のデータのみから、実部と時間領域のインパルス応答を同時に算定する方法 (虚部変換法<sup>2-6)</sup>) により提案されている。この手法は、数値的な Hilbert 変換を行う必要がないため、変換による誤差が小さく精度の高いモデルが得られる特徴を有している。

#### 2.4.1.1 概要と虚部変換法

初めに説明のため、振動数領域下で利用可能な複素減衰について示す。複素減衰の反力と変位の関係は、式(2.10)のように複素関数の形で表される。

$$F(\omega) = K(1 + 2\xi_{aim} \cdot Z(\omega)) \cdot u(\omega) \quad (2.10)$$

ここに、 $K$ は剛性、 $u$ は変位であり、 $Z(\omega)$ は式(2.11a)~(2.11c)である。なお、 $i$ は虚数単位である。

$$Z(\omega) = Z_R(\omega) + Z_I(\omega) \cdot i \quad (2.11a)$$

$$Z_R(\omega) = 0, Z_I(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ -1 & (\omega < 0) \end{cases} \quad (2.11b,c)$$

式(2.11a)~(2.11c)のような複素減衰は、振動数領域において振動数に依存しない減衰を容易に評価できる。ただしこの式は、非因果的な関数であるため厳密な時間領域への変換が不可能であることが知られている。

そこで因果減衰では、式(2.12a),(2.12b)のように、 $Z(\omega)$ を因果的な関数である $Z'(\omega)$ に置き換えられる。なお、 $\omega$ は上下限の振動数の範囲 $-\omega_{lim} \sim \omega_{lim}$ として設定する必要がある。

$$Z'(\omega) = Z'_R(\omega) + Z'_I(\omega) \cdot i \quad (2.12a)$$

$$= a_0 \omega \cdot i + \sum_{j=1}^N b_j e^{-jt_{lim} \omega \cdot i} \quad (-\omega_{lim} < \omega < \omega_{lim}) \quad (2.12b)$$

ここに、 $N$ は指数関数を表現する項の個数を意味する。 $Z'_R(\omega)$ と $Z'_I(\omega)$ は、

$$Z'_R(\omega) = \sum_{j=1}^N b_j \cos(jt_{lim} \omega), Z'_I(\omega) = a_0 \omega - \sum_{j=1}^N b_j \sin(jt_{lim} \omega) \quad (2.13a,b)$$

であり、 $t_{lim} = 2\pi/\omega_{lim} = 1/f_{lim}$ となる。なお、 $a_0$ 及び $b_j$ については、後に説明している虚部変換法で得られる係数である。

このように定式化すれば、式(2.13b)における虚部と振動数の関係が Fig. 2.1 のように表すことができる。 $Z'_I(\omega)$ の第一項は、振動数に比例するような形となり、第二項は周期関数としてのこぎり波のような形を再現している。

さらに、式(2.10)の $Z(\omega)$ を、式(2.12a)の $Z'(\omega)$ に置き換えると、

$$F(\omega) = Ku(\omega) + 2K\xi_{aim} a_0 \omega \cdot u(\omega) \cdot i + 2K\xi_{aim} \left( \sum_{j=1}^N b_j e^{-jt_{lim} \omega \cdot i} \right) \cdot u(\omega) \cdot i \quad (2.14)$$

となる。

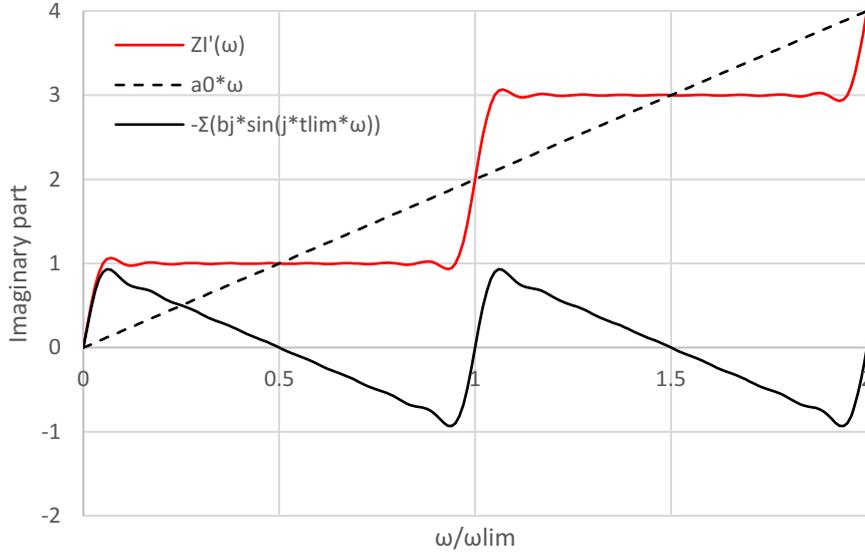


Fig. 2.1 Imaginary part(9 term)

ここで、式(2.14)について、時間領域に変換することを考える。フーリエ逆変換の性質より、第一項は線形性で、第二項の $\omega \cdot u(\omega) \cdot i$ は微分で、第三項の $e^{-jt_{lim}\omega \cdot i} \cdot u(\omega)$ は時間軸と振動数軸の推移より、数値的な変換を行うことなく、式(2.15)のように時間領域の形で得ることが可能となる。なお、2.2 節と関連させて現在の時刻を $t + \Delta t$ として表している。なお、右辺の第一項は復元力で、第二項は減衰力に対応する。

$$F(t + \Delta t) = Ku(t + \Delta t) + 2K\xi_{aim} \left( a_0 \dot{u}(t + \Delta t) + \sum_{j=1}^N b_j u(t + \Delta t - jt_{lim}) \right) \quad (2.15)$$

ところで、係数 $a_0$ 及び $b_j$ であるが、虚数部である式(2.13b)から虚部変換法を用いて得ることができる。虚部変換法の基本式は、式(2.16)である。

$$\begin{Bmatrix} D_I(\omega_1) \\ \vdots \\ D_I(\omega_{2N+1}) \end{Bmatrix} = [\bar{\mathbf{C}}_{IK} \quad \bar{\mathbf{C}}_{IC}] \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{a} \end{Bmatrix} \quad (2.16)$$

ここに、

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{Bmatrix}, \mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{Bmatrix}, \quad (2.17a,b)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{IK} = \begin{bmatrix} -\sin \Delta t \omega_1 & \cdots & -\sin N \Delta t \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sin \Delta t \omega_{2N+1} & \cdots & -\sin N \Delta t \omega_{2N+1} \end{bmatrix}, \quad (2.17c)$$

$$\bar{\mathbf{C}}_{IC} = \begin{bmatrix} \omega_1 \cos 0 & \cdots & \omega_1 \cos N \Delta t \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{2N+1} \cos 0 & \cdots & \omega_{2N+1} \cos N \Delta t \omega_{2N+1} \end{bmatrix} \quad (2.17d)$$

$\mathbf{b}$ については $1 \times N$ 、 $\mathbf{a}$ については $1 \times (N + 1)$ のベクトルであり、 $\bar{\mathbf{C}}_{IK}$ については $(2N + 1) \times N$ 、 $\bar{\mathbf{C}}_{IC}$ については $(2N + 1) \times (N + 1)$ のマトリクスとなる。

正の振動数域である  $0 < \omega < \omega_{lim}$  において、例えば、 $\omega_{lim} = 2\pi f_{lim} = 20\pi$  とし、 $N = 9$  で考える。 $\omega_1, \omega_2 \dots \omega_{2N+1}$  については、振動数軸で等間隔にとると、 $\pi, 2\pi, \dots, 19\pi$  となる。また、 $D_I(\omega_1), D_I(\omega_2), \dots, D_I(\omega_{2N})$  については、一定値にしたいので 1.0 とする。すると、式 (2.16) に代入すれば、Table 2.2 のように、9 項の  $\mathbf{b}$  及び  $\mathbf{a}$  が求まる。 $\mathbf{b}$  は、 $N$  に応じて係数が求まるが、 $\mathbf{a}$  については  $a_0 = 1/(\pi f_{lim})$  となるものの、その他の係数  $a_1, a_2 \dots a_9$  は全て 0 となる。項数については、 $N$  個で一般化可能であるが、具体的には 2 項、4 項及び 9 項でモデルが提案されている。

Table 2.2 Coefficients of causal damping model

Name	9 term model	4 term model	2 term model
$N$	9	4	2
$t_{lim} (s)$	$1/f_{lim} [= 2\pi/\omega_{lim}]$		
$a_0$	$1/(\pi f_{lim}) [= 2/\omega_{lim}]$		
$b_1$	-0.63138	-0.61554	-0.55055
$b_2$	-0.30777	-0.27528	-0.12997
$b_3$	-0.19626	-0.14531	—
$b_4$	-0.13764	-0.06498	—
$b_5$	-0.10000	—	—
$b_6$	-0.07265	—	—
$b_7$	-0.05095	—	—
$b_8$	-0.03249	—	—
$b_9$	-0.01584	—	—

2.4.1.2 定式化

結局、線形問題における因果減衰は、剛性比例型減衰と同じ速度に比例する項と剛性マトリクスに過去の変位ベクトルを乗じた項の和で表され、 $0 \sim f_{lim}$  の間（適応振動数域：Wh）で一定となる減衰比が再現される。因果減衰の減衰比の関係について、Fig. 2.2 に、 $f_{lim}$  の外側も含んだイメージを示す。減衰比の関係についても、Fig. 2.1 のような虚部と同じ形で表現され、剛性比例型減衰を階段状に変化させたような減衰比が再現される。

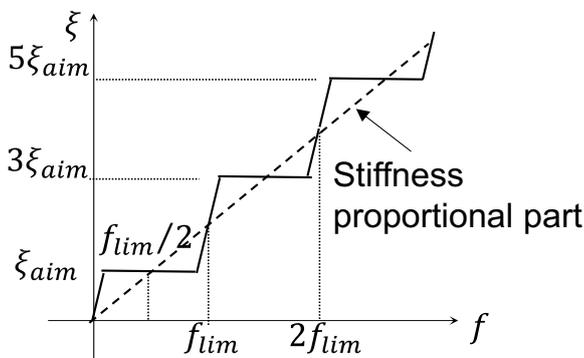


Fig. 2.2 Image of causal damping model with outside of maximum frequency

線形問題の時間領域における減衰力ベクトル $\mathbf{r}_d(t + \Delta t)$ は式(2.18)となる。

$$\mathbf{r}_d(t + \Delta t) = \beta' \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + 2h_{aim} \mathbf{K} \cdot \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{u}(t + \Delta t - j \cdot t_{lim}) \right) \quad (2.18)$$

ここに、

$$\beta' = 2\xi_{aim} a_0 = 2\xi_{aim} \frac{1}{\pi f_{lim}} \quad (2.19)$$

式(2.18)の右辺第二項は、現在の時刻から $j \cdot t_{lim}$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ )前の過去に得られた変位ベクトルの係数和である。

さらに、 $\xi_{aim}$ が大きい場合、 $f_{lim}/2$ を中心に広い範囲で、実部の影響によって減衰比が過少に評価される課題がある。この課題に対して因果減衰モデルでは改良が行われている。実用的に推奨されているような、式(2.20)のように $a_0$ を補正することで精度を向上させている。

$$a_{0-2} = a_0 + \left( 1 + 1.5\xi_{aim} + 3.7\xi_{aim}^2 \right) \cdot \frac{2\xi_{aim} Z'_R(f_{lim}/2)}{\pi f_{lim}} \quad (2.20)$$

なお、 $Z'_R(f_{lim}/2)$ の値は2項及び4項モデルでは0.421で、9項モデルでは0.437である。

非線形問題を踏まえて、式(2.18)の右辺第二項を要素の復元力ベクトル $\mathbf{r}$ で表すこととする。

$$\mathbf{r}_d(t + \Delta t) = \beta' \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + 2\xi_{aim} \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{r}(t + \Delta t - j \cdot t_{lim}) \right) \quad (2.21)$$

文献 2-7)では、二つの方法が示されている。本方法では、文献 2-7)で指摘されている課題について、式(2.18)のように $\mathbf{u}$ で設定すると、塑性化により $\mathbf{u}$ が増大し、特に応答が片方に顕著な場合で減衰力が過大となる。そのため、今回は式(2.21)のように、 $\mathbf{r}$ の形をとれば、上限が部材耐力で決まるため過度な減衰力が生じない。また、計算上、過去の $\mathbf{r}$ を読み込むだけで良いので、容易に算出できる利点を有する。

因果減衰の Newmark- $\beta$  法への適用を行う。式(2.18)を、式(2.2b)に代入すると式(2.22)が得られる。

$$\Delta \mathbf{r}_d \approx \beta' \mathbf{K} \Delta \dot{\mathbf{u}} + 2\xi_{aim} \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{r}(t + \Delta t - j \cdot t_{lim}) \right) - 2\xi_{aim} \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{r}(t - j \cdot t_{lim}) \right) \quad (2.22)$$

さらに、式(2.22)を式(2.1)に代入すると、因果減衰の Newmark- $\beta$  法による運動方程式は、式(B.2)となる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}_e(t) \\ & + \mathbf{M} \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}(t) \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\delta}{\beta} \dot{\mathbf{u}}(t) - \left( 1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \Delta T \ddot{\mathbf{u}}(t) \right) \\ & - 2\xi_{aim} \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{r}(t + \Delta t - j \cdot t_{lim}) \right) + 2\xi_{aim} \sum_{j=1}^N \left( b_j \mathbf{r}(t - j \cdot t_{lim}) \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここに、

$$\mathbf{C} = \beta' \mathbf{K} \quad (2.24)$$

となる。式(2.24)から分かるように、従来の Rayleigh 減衰モデル（剛性比例型減衰）とほぼ同じ形であり、時間遅れ項の減衰力が右辺に新たに含まれている。また、線形問題であれば不平衡力は生じないが、非線形であれば、式の右辺第一項を瞬間剛性比例型減衰と同様の形とすると、減衰力による不平衡力が生じる。

因果減衰では、式(2.18)及び式(2.21)から分かるように、第二項の時間遅れ項の減衰力（復元力）が必要となるため、復元力ベクトルを時刻 $t$ から $t + \Delta t - n \cdot t_{lim}$ までの復元力ベクトルを記憶する必要がある。

### 2.4.1.3 減衰比と共振振動数の精度

振動数領域における、実現する減衰比の精度 $R_{\xi}(f)$ （減衰モデルの減衰比と目標とする減衰比の比）は式(2.25)で得られる。

$$R_{\xi}(f) = \xi'(f)/\xi_{aim} = \sin\left(\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2\xi_{aim}\cdot Z'_I(f)}{1+2\xi_{aim}\cdot Z'_R(f)}\right)/\xi_{aim} \approx \frac{Z'_I(f)}{1+2\xi_{aim}\cdot Z'_R(f)} \quad (2.25)$$

また、共振振動数の精度（減衰モデルの共振振動数と目標とする減衰比を考慮した共振振動数の比）は式(2.26)により算定できる。

$$R_{res}(f) = \frac{f_0(f)}{f_0} \cdot \sqrt{\frac{1-\xi'(f)^2}{1-\xi_{aim}^2}} \quad (2.26)$$

ここに、 $f_0(f)/f_0$ は式(2.27)となる。

$$\frac{f_0(f)}{f_0} = \sqrt{1+2\xi_{aim}\cdot Z'_R(f)} \quad (2.27)$$

所で、因果減衰の実部 $Z'_R(f)$ と虚部 $Z'_I(f)$ の係数は式(2.13a),(2.13b)となる。式(2.13a),(2.13b)を式(2.18)に代入すれば、因果減衰モデル（9項モデル）の減衰比の精度 $R_{\xi}(f)$ は、Fig. 2.3 のようになる。

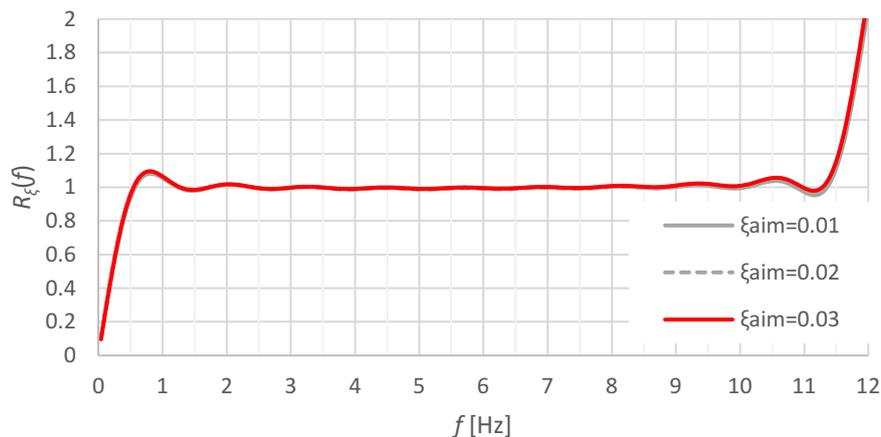


Fig. 2.3 Damping ratio of Causal damping model (9 term model)

また、共振振動数の精度 $R_{res}(f)$ は、Fig. 2.4 のような性状を示す。なお、2.4 節の検討比

較のため、横軸は振動数で、確認する振動数域を  $0 \sim f_{lim} = 12.0$  [Hz] とする。  
 適応振動数域  $W_\xi$  は、許容誤差を  $\pm 10\%$  とすればその範囲に収まる振動数域の高次側振動数  
 / 低次側振動数で表され、低次側で  $0.45$  Hz、高次側で  $11.4$  Hz 程度であり、 $W_\xi = 23.8$  とな  
 る。

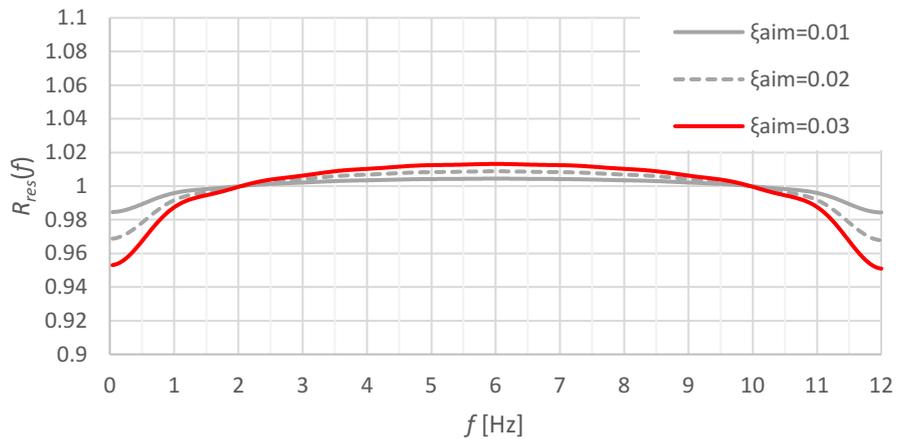


Fig. 2.4 Damping frequency ratio of Causal damping model (9 term model)

### 2.4.2 拡張 Rayleigh 減衰

Fig. 2.5 に示すような、質量比例減衰と 2.4.1 項の因果減衰の 2 項モデルを組み合わせた  
 拡張 Rayleigh 減衰モデルが文献 2-8) で提案されている。高精度モデル及び中精度モデルの  
 係数  $C_0, C_1, C_2$  は、減衰比が幅広い振動数域で目標とする減衰比  $\xi_{aim}$  になるように調整され  
 た値で、Table 2.3 の通りである。また、高精度と中精度の式の違いについては、係数の値  
 のみ異なっている。モデルの性能については、高精度モデルの方が中精度モデルに比べ、  
 減衰比の  $\xi_{aim}$  に対する誤差が小さいが、減衰比が一定となる幅が若干狭い。

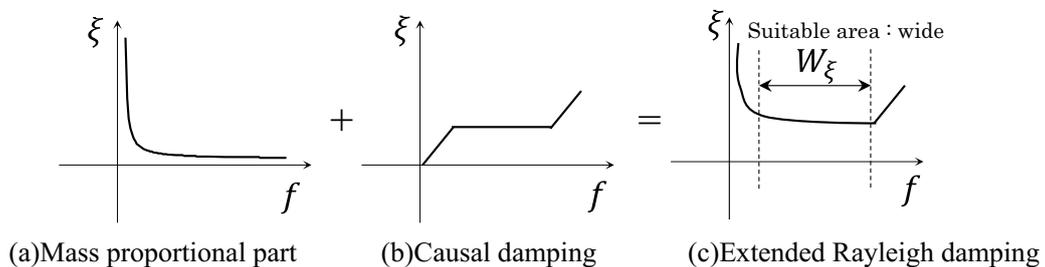


Fig. 2.5 Image of Extended Rayleigh damping

Table 2.3 Recommended value of  $C_0, C_1, C_2$

$\xi_{aim}$	High Accuracy Model (Allowable error= $\pm 5\%$ )			Middle Accuracy Model (Allowable error= $\pm 10\%$ )		
	$C_0$	$C_1$	$C_2$	$C_0$	$C_1$	$C_2$
1%	0.266	0.770	0.119	0.205	0.920	0.0
2%	⋮	⋮				
3%	0.262	0.775				
⋮	L.I. <sup>1)</sup>			L.I.		
5%	0.260	0.780	0.126	0.205	0.920	0.0
⋮	L.I.			L.I.		
10%	0.235	0.790	0.157	0.180	0.930	0.0251

L.I. means “Linear interpolation” between the range.

### 2.4.2.1 定式化

線形問題の減衰力ベクトル $\mathbf{r}_d(t + \Delta t)$ は式(2.28)で表される。

$$\mathbf{r}_d(t + \Delta t) = (\alpha' \mathbf{M} + \beta' \mathbf{K}) \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \mathbf{K} (\gamma'_1 \mathbf{u}(t + \Delta t - t_{lim}) + \gamma'_2 \mathbf{u}(t + \Delta t - 2t_{lim})) \quad (2.28)$$

ここに、

$$\alpha' = 2\xi_{aim} f_{lim} C_0 \quad (2.29a)$$

$$\beta' = \frac{2\xi_{aim}}{\pi f_{lim}} (C_1 + C_2) \quad (2.29b)$$

$$\gamma'_1 = 2\xi_{aim} C_1 b_1 \quad (2.29c)$$

$$\gamma'_2 = 2\xi_{aim} C_1 b_2 \quad (2.29d)$$

式(2.28)は、第1項目 $\dot{\mathbf{u}}$ の係数マトリクスは Rayleigh 減衰力に相当するもので、第2項目が因果減衰と同様な時間遅れ成分である。

非線形問題の減衰力ベクトル $\mathbf{r}_d(t + \Delta t)$ は式(2.30)で表される。

$$\mathbf{r}_d(t + \Delta t) = (\alpha' \mathbf{M} + \beta' \mathbf{K}) \dot{\mathbf{u}}(t + \Delta t) + \gamma'_1 \mathbf{r}(t + \Delta t - t_{lim}) + \gamma'_2 \mathbf{r}(t + \Delta t - 2t_{lim}) \quad (2.30)$$

式(2.28)及び式(2.30)の右辺第一項は、従来の Rayleigh 減衰モデルとほぼ同じ形であり、因果減衰（2項）モデルに質量項が付加されている。

拡張 Rayleigh 減衰の Newmark- $\beta$  法への適用は因果減衰と同様である。拡張 Rayleigh 減衰の Newmark- $\beta$  法による運動方程式は、式(2.31)で得られる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\delta}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \mathbf{K} \right) \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}_e(t) \\ & + \mathbf{M} \left( \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}(t) \right) + \mathbf{C} \left( \frac{\delta}{\beta} \dot{\mathbf{u}}(t) - \left( 1 - \frac{\delta}{2\beta} \right) \Delta t \ddot{\mathbf{u}}(t) \right) \\ & - \gamma'_1 \mathbf{r}(t + \Delta t - t_{lim}) - \gamma'_2 \mathbf{r}(t + \Delta t - 2t_{lim}) + \gamma'_1 \mathbf{r}(t - t_{lim}) + \gamma'_2 \mathbf{r}(t - 2t_{lim}) \end{aligned} \quad (2.31)$$

ここに、

$$\mathbf{C} = \alpha' \mathbf{M} + \beta' \mathbf{K} \quad (2.32)$$

拡張 Rayleigh 減衰では、復元力ベクトルを時刻 $t$ から $t + \Delta t - 2t_{lim}$ までの復元力ベクトルを記憶しておく必要がある。

2.4.2.2 減衰比と共振振動数の精度

拡張 Rayleigh 減衰モデルの減衰比 $\xi'(f)$ は、式(2.33)となる。なお、中精度モデルの $R_\xi(f)$ は、Fig. 2.6 のようになる。

$$\xi'(f) \approx \frac{\xi_{aim} f_{lim} C_0}{2\pi f} + \frac{\xi_{aim}}{1 + 2\xi_{aim} C_1 Z'_R(f)} \cdot \left( C_1 Z'_I(f) + \frac{2C_2 f}{f_{lim}} \right) \quad (2.33)$$

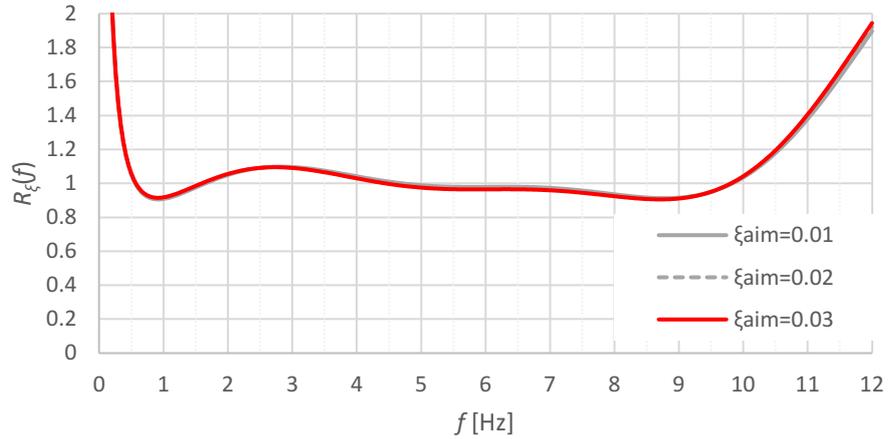


Fig. 2.6 Damping ratio of Extended Rayleigh damping model (middle accuracy model)

なお、 $Z'_R(f)$ は、因果減衰の式(2.13a)を2項モデルとしたときであり、 $Z'_I(f)$ は、式(2.13b)で、 $a_{0-2}$ を $a_0$ としたものである。

共振振動数の精度は、Fig. 2.7 のように得られる。

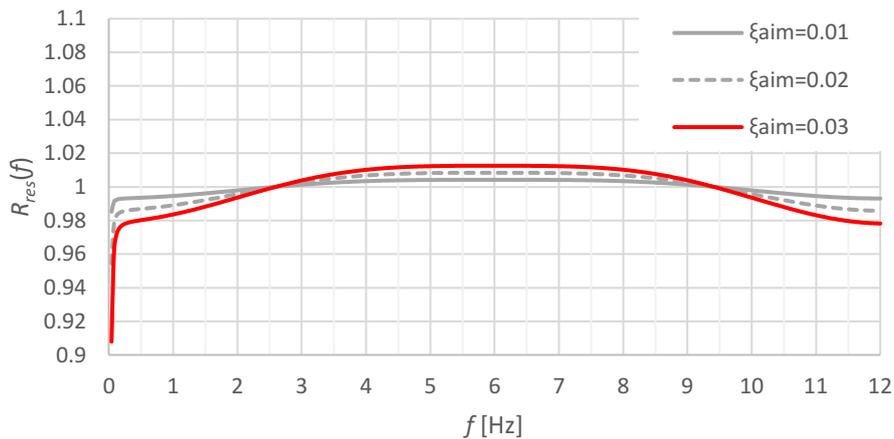


Fig. 2.7 Damping frequency ratio of Extended Rayleigh damping model (middle accuracy model)

### 2.4.3 Uniform 減衰 (Arup 減衰)

Huang らにより Uniform 減衰<sup>2-9),2-10)</sup>が提案されている。現状では、この減衰は衝突解析等で一般的に良く用いられている汎用解析コード LS-DYNA に実装されており、解析コード内のキーワードが “\*DAMPING\_FREQUENCY\_RANGE\_DEFORM” である。

#### 2.4.3.1 定式化

この減衰モデルは、式(2.34)のように、 $N$  個のフィルターされた力によって減衰力が表されている。

$$\mathbf{r}_d(t + \Delta t) = 2\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\chi_n}{\omega_{cn}} \dot{\mathbf{r}}_n(t + \Delta t) \right) \quad (2.34)$$

ここに $\omega_{cn}$  : カットオフ円振動数及び $\chi_n$  : 調整係数である。また、 $\mathbf{r}_n$ は、 $\mathbf{r}$ に対して1次ローパスフィルターされたベクトルであり、時間領域で表すと式(2.35)の関係を得る。

$$\mathbf{r}_n(t + \Delta t) + \frac{\dot{\mathbf{r}}_n(t + \Delta t)}{\omega_{cn}} = \mathbf{r}(t + \Delta t) \quad (2.35)$$

具体的な式展開は、文献 11)が参考となるが、差分近似で式が誘導されている。 $\dot{\mathbf{r}}_n(t + \Delta t)$ を後退差分近似で表し、 $\dot{\mathbf{r}}_n(t)$ を前進差分近似で表すと、

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_n(t + \Delta t) &\approx \frac{\mathbf{r}_n(t + \Delta t) - \mathbf{r}_n(t)}{\Delta T} \\ \dot{\mathbf{r}}_n(t) &\approx \frac{\mathbf{r}_n(t + \Delta t) - \mathbf{r}_n(t)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (2.36a,b)$$

であるので、式(2.34)で、 $\mathbf{r}_d(t + \Delta t)$ 及び $\mathbf{r}_d(t)$ の式に、それぞれ式(2.36a)及び(2.36b)を代入し足し合わせると、式(2.37)のような近似式が得られる。

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_d(t + \Delta t) + \mathbf{r}_d(t)) \approx 2\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\chi_n}{\omega_{cn}\Delta t} (\mathbf{r}_n(t + \Delta t) - \mathbf{r}_n(t)) \right) \quad (2.37)$$

となる。同様に、式(2.35)も行うと、

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_n(t + \Delta t) + \mathbf{r}_n(t)) + \frac{1}{\omega_{cn}\Delta t} (\mathbf{r}_n(t + \Delta t) - \mathbf{r}_n(t)) \approx \frac{1}{2}(\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t)) \quad (2.38)$$

式(2.38)の $\mathbf{r}_n(t + \Delta t)$ について整理すると、

$$\mathbf{r}_n(t + \Delta t) \approx \frac{\omega_{cn}\Delta t}{2 + \omega_{cn}\Delta t} (\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t)) + \frac{2 - \omega_{cn}\Delta t}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \mathbf{r}_n(t) \quad (2.39)$$

となる。さらに、式(2.39)を式(2.37)に代入すると、式(2.40)を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_d(t + \Delta t) &\approx \\ &\left( 4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \right) (\mathbf{r}(t + \Delta t) + \mathbf{r}(t)) - 8\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \mathbf{r}_n(t) \right) - \mathbf{r}_d(t) \end{aligned} \quad (2.40)$$

式(2.40)を両辺に $\mathbf{r}_d(t)$ を差し引き、左辺を $\Delta\mathbf{r}_d$ の形にすると、

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r}_d &= \mathbf{r}_d(t + \Delta t) - \mathbf{r}_d(t) \\ &\approx \left( 4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \right) (\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{u} + 2\mathbf{r}(t)) \\ &\quad - 8\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \left( \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \mathbf{r}_n(t) \right) - 2\mathbf{r}_d(t) \end{aligned} \quad (2.41)$$

となる。一方で、式(2.40)で $\Delta t$ が十分小さいと、

$$\begin{aligned} \left(4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t}\right) (2\mathbf{r}(t)) - 8\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t} \mathbf{r}_n(t)\right) - 2\mathbf{r}_d(t) \approx \\ \left(4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \chi_n\right) (\mathbf{r}(t)) - 4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N (\chi_n \mathbf{r}_n(t)) - 2\mathbf{r}_d(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

であるので、式(2.34)及び式(2.35)を時刻 $t$ とすると、式(2.42)の右辺は 0 となる。式(2.41)を次のように近似する。

$$\Delta \mathbf{r}_d(t) \approx \left(4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t}\right) \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} \quad (2.43)$$

式(2.43)を式(2.1)に代入すると、Uniform減衰のNewmark- $\beta$ 法による運動方程式は、式(2.44)となる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} \mathbf{M} + \left(1 + 4\xi_{aim} \sum_{n=1}^N \frac{\chi_n}{2 + \omega_{cn}\Delta t}\right) \mathbf{K}_T\right) \Delta \mathbf{u} = \\ \mathbf{f}(t + \Delta t) - \mathbf{f}_e(t) + \mathbf{M} \left(\frac{1}{\beta\Delta T} \dot{\mathbf{u}}(t) + \frac{1}{2\beta} \ddot{\mathbf{u}}(t)\right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

以上のように差分式で近似しているため、シンプルで特別な数値処理は不要であることが分かる。一方で、弾性材料であっても不釣り合い力が生じるため、収束計算を行うことや不釣り合い力を適切に処理する必要が生じると考えられる。

#### 2.4.3.2 減衰比と共振振動数の精度

振動数領域では、式(2.34)及び式(2.35)は、式(2.45)のように導かれる。

$$\mathbf{r}_d(\omega) = 2\xi_{aim} (Z'_R + Z'_I i) \mathbf{r}(\omega) \quad (2.45)$$

ここに、

$$Z'_R(\omega) = \sum_{n=1}^N \left(\chi_n \frac{\omega}{\omega_{cn}} \phi_n\right) \quad (2.46a)$$

$$Z'_I(\omega) = \sum_{n=1}^N (\chi_n \phi_n) \quad (2.46b)$$

$$\phi_n = \frac{\omega}{\omega_{cn}} / \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{cn}}\right)^2\right) \quad (2.46c)$$

となる。虚部の部分は $\chi_n \phi_n$ であるので、カットオフ振動数 $\omega_{c1}$ から $\omega_{cN}$ の間で、一定値(1.0)としたいので、 $N$ 個の調整係数 $\chi_n$ は、最小二乗法により算出される。

$$\psi(\omega) = \int_{\omega_{c1}}^{\omega_{cN}} \left(\left(\sum_{n=1}^N \chi_n \phi_n - 1\right)\right)^2 d\omega \quad (2.47)$$

例えば、調整係数 $\chi_n$ は次の仮定により算出する。 $N = 4$ とし、 $f_{low} = \omega_{c1}/2\pi = 0.5$  [Hz]、 $f_{high} = \omega_{c4}/2\pi = 10.0$  [Hz]で、 $\omega_{c2}, \omega_{c3}$ を対数軸で等間隔の値とする。 $\omega$ が $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \omega_{c3}, \omega_{c4}$ の位置で、 $Z'_I(\omega) = 1.0$ となるように仮定すると、 $\chi_1 = \chi_4 = 1.50, \chi_2 = \chi_3 = 0.378$ となる。

減衰比の精度 $R_n(\omega)$ は、式(2.46a)及び式(2.46b)を式(2.25)に代入し計算され、Fig. 2.8のよ

うになる。また、共振振動数の精度 $R_{res}(f)$ は、式(2.26),(2.27)及び式(2.46a),(2.46b)から Fig. 2.9 のようになる。

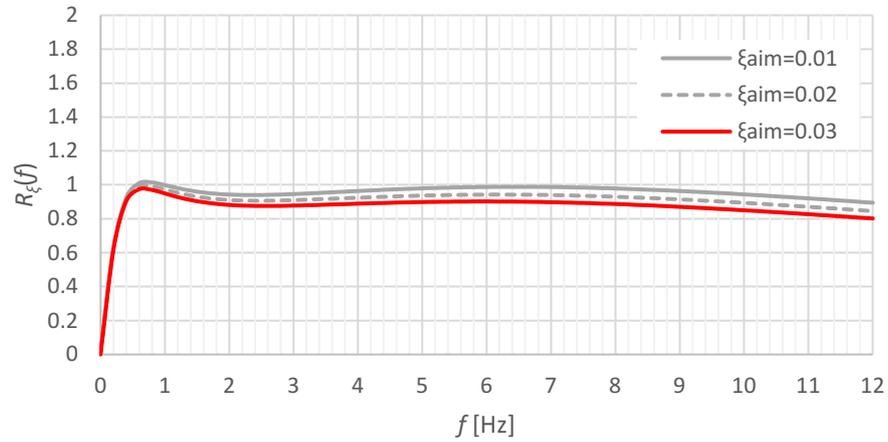


Fig. 2.8 Damping ratio of Uniform damping model

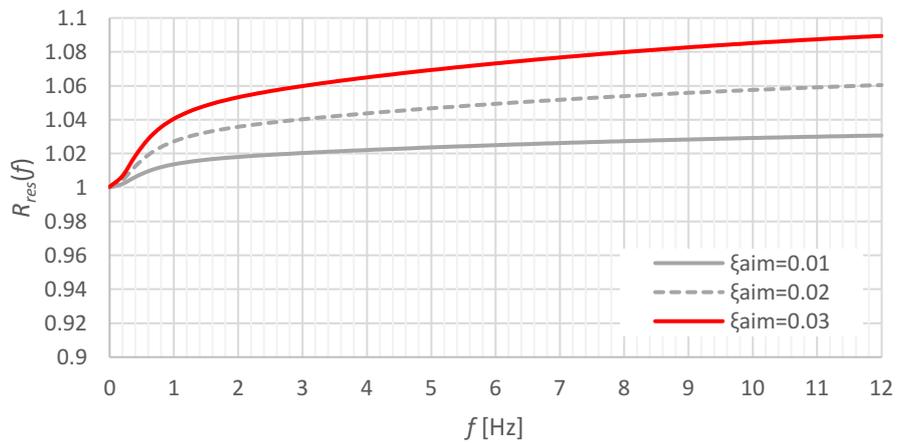


Fig. 2.9 Damping frequency ratio of Uniform damping

ここでは、実数軸上で示しているが文献 2-9),2-10)では対数軸上で示されており、確認している振動数外の高振動数側の減衰比が、緩やかに 0 に向かって低下する特徴を有する。ここでは、 $f_{high}/f_{low} = 20$ として検討したが、 $f_{high}/f_{low}$ は可変であり、かなり幅広い振動数帯でほぼ一定の減衰比で評価が可能なモデルである。ただし、幅広く設定すると共振振動数が高く評価され、減衰定数が小さく評価される傾向がある。

## 2.5 簡易モデルによる数値解析の検証<sup>2-12)</sup>

### 2.5.1 線形モデル

#### 2.5.1.1 モデルの概要

2.3 節で紹介した減衰モデルの検証のために、Fig. 2.10 に示す簡易な多質点モデルの時刻歴応答解析による数値解析を行い、各振動数で実現している減衰比と共振振動数の精度を確認する。構造物固有の問題を対象とするよりも、より一般的で基本的な問題を対象とした。ここでは、茂木らが開発した弾塑性骨組み地震応答解析プログラム、FRANSYS<sup>2-13)</sup>を用いて検討している。

解析モデルは、Table 2.4 に示すように、質点が 120 個で、非減衰の固有振動数が 0.1Hz, 0.2Hz, 0.3Hz, ..., 12.0Hz (0.1Hz 刻み) となるように、ばねの剛性を一定で質量を調整させている。ここで、評価する振動数帯は、低次側の振動数で 0.5 [Hz] とし、高次側の振動数で 10.0 [Hz] として想定している。低次側では並進やねじれ等で水平方向の 1 次モードにおける振動数域を想定し、高次側では鉛直方向も含むある程度高次のモードにおける振動数域を想定している。また、二つの振動数の外側で低振動数側と高振動数側に少し幅を持たせて質点モデルを設定している。ばねは、それぞれの質点と固定端を結び付けており、弾性材料でモデル化している。

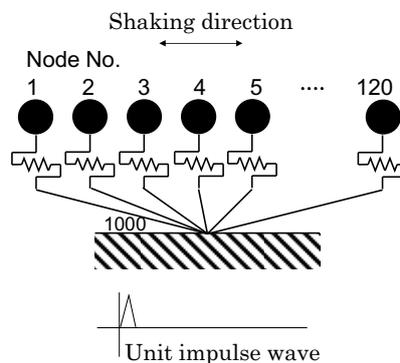


Fig. 2.10 Multi DOF model

Table 2.4 Property of multi DOF model (linear)

Node No.	Mass [ton]	Natural frequency [Hz]
1	$2.533 \times 10^3$	0.1
2	$6.333 \times 10^2$	0.2
3	$2.814 \times 10^2$	0.3
...	...	...
120	$1.759 \times 10^{-1}$	12.0

Spring stiffness  $k(f)$  is 1000 [kN/m].

Table 2.5 Analysis case

Case	Damping Type	Frequency [Hz]
Caus	Causal (9 term)	$f_{lim} = 12.0$
ERay	Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 12.0$
Unif	Uniform	$f_{low} = 0.5, f_{high} = 10.0$

検討した減衰モデルは Table 2.5 の通りで、因果減衰の 9 項モデル(Caus)、拡張 Rayleigh 減衰の中精度モデル(ERay)及び Uniform 減衰(Unif)である。評価対象の振動数帯は、0.5 [Hz] ~ 10.0 [Hz] と仮定しているため、各減衰モデルに与える振動数を次のように設定した。Caus と ERay は、Fig. 2.3 及び Fig. 2.6 から、低次側の振動数を概ね  $0.04f_{lim} \sim 0.08f_{lim}$  程度で設定することができるので、 $f_{lim} = 12.0$  [Hz] とした。高次側は自動的に決定されるので、Caus では  $0.95f_{lim} (= 11.4$  [Hz])、ERay では  $0.85f_{lim} (= 10.2$  [Hz]) となり、0.5 [Hz] ~ 10.0 [Hz] までは一定の減衰比で評価できる。Unif は、従来の Rayleigh 減衰と同じように、 $f_{low} = 0.5$  [Hz] 及び  $f_{high} = 10.0$  [Hz] で設定する。なお、減衰比は、 $\xi_{aim} = 0.03$  及び  $0.01$  とした。現状、Uniform 減衰が使用可能な汎用解析コードとしては、LS-DYNA (減衰名: \*DAMPING\_FREQUENCY\_RANGE\_DEFORM) のみであるが、筆者らが開発したプログラムで検討した。2.5.3 項では、LS-DYNA と比較し検証を行っている。

解析の時間積分手法は Newmark- $\beta$  法とする。式(2.4)の  $\beta$  及び  $\delta$  は、数値安定性の確保と数値減衰が生じないように、平均加速度法の  $\beta = 0.25$  及び  $\delta = 0.5$  とする。

解析時間刻みは、無条件安定なので任意で設定することができるが、一般的に入力動が  $1.0 \times 10^{-2}$  [s] で設定されているため、 $\xi_{aim} = 0.03$  については  $1.0 \times 10^{-2}$  [s] を大きな時間刻みとして設定し、さらに細かくした  $5.0 \times 10^{-3}$  [s]、 $1.0 \times 10^{-3}$  [s] 及び  $5.0 \times 10^{-4}$  [s] も合わせて検討する。 $\xi_{aim} = 0.01$  については、 $5.0 \times 10^{-4}$  [s] のみ実施した。

地動加速度として  $0 \sim 0.05 \sim 0.1$  [s] の間に、 $0 \sim 1.0 \sim 0$  となるような、単位パルス波を与えて、各質点の加速度応答を確認している。

確認する伝達関数は、振動数領域で各質点の応答加速度時刻歴を地動加速度で除することによる算出される。算出された伝達関数のピーク値  $p$  を用いて、理論式である 1 自由度系の伝達関数のピーク高さと減衰比の関係の式(2.48)により、減衰比  $\xi(f_0)$  が計算できる。 $\xi(f_0)$  と目標とする減衰比  $\xi_{aim}$  の比をとることで、減衰比の精度  $R_\xi(f_0)$  を算定する。

$$\xi(f_0) = \frac{1}{2\sqrt{p(f_0)^2 - 1}} \quad (2.48)$$

また、減衰を有する振動系の共振振動数  $f_0'$  は非減衰系の共振振動数  $f_0$  の関数より、式(2.49)となる。

$$f_0' = f_0 \cdot \sqrt{1 - \xi(f_0)^2} \quad (2.49)$$

共振振動数の精度  $R_{res}(f_0)$  は、解析で算定された各振動系のピーク値が現れる振動数に対す

る、式(2.49)で得られる $\xi(f_0) = \xi_{aim}$ とした目標とする振動数 $f_0'$ の比として算定する。

### 2.5.1.2 結果と考察

$\xi_{aim} = 0.03$ とした結果で、Fig. 2.11 に減衰比の精度を、Fig. 2.12 に共振振動数の精度を示す。(a)~(c)に減衰モデルごとに示し、図中では解析時間刻みを変化させた結果を示している。

まず、いずれの減衰モデルにおいても共通して、解析時間刻みを細かくすれば、2.3 節に示した理論式で得られる結果に近づいていることが確認できる。

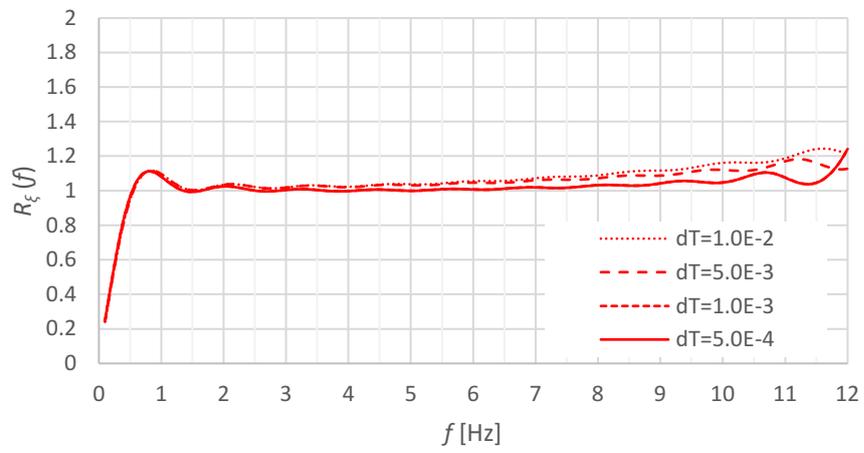
減衰比の精度に着目すると、低振動数側では理論式と一致しているが、 $f_{lim}$ 近傍の高振動数側では相違がみられる。これは、Caus、ERay では、初期の時刻の応答では、過去の復元力が算定されておらず、遅れ成分の項が考慮されないためである。

なお、今回では高次側で 10Hz (概ね  $0.8f_{lim}$ ) を評価対象の振動数として検討しており、極端に  $f_{lim}$  側に評価対象の振動数を設定しなければ問題にはならないと考えられる。Unif では、減衰力を差分近似で評価しているため、時間刻みが粗いと精度が悪化してしまう。

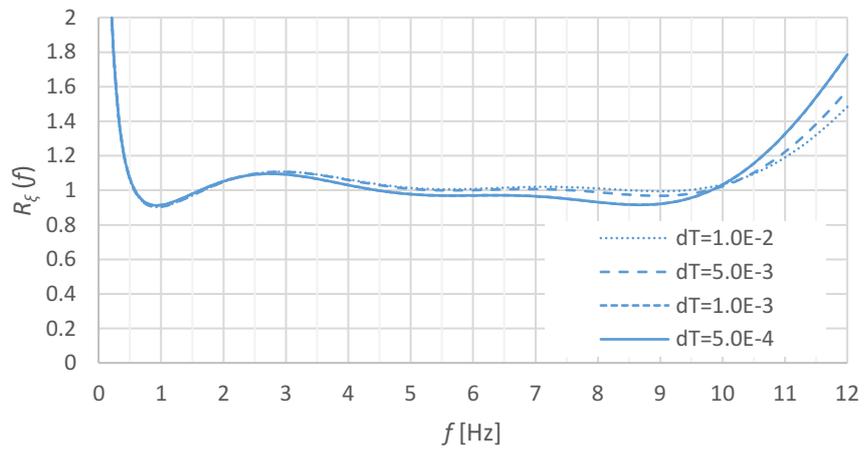
共振振動数の精度において、解析時間刻みが最も細かいケースに着目すると、Caus では低次側の 0.5Hz で最大で 3%程度低く、ERay では 2%程度低く評価されている。Unif では時間刻みが細かい方で、高次側の 10Hz で 8%程度高くなっていることが確認できる。

解析時間刻みの比較で、特に共振振動数の精度で  $1.0 \times 10^{-2}$  [s]だと、いずれの減衰モデルにおいても高振動数側の精度が低く評価されている。これは、積分手法の影響で解析時間刻みが大きいと高振動数側の剛性が低下するためである。いずれも  $5.0 \times 10^{-3}$  [s]程度とすれば、減衰比や共振振動数の精度が概ね確保できている。

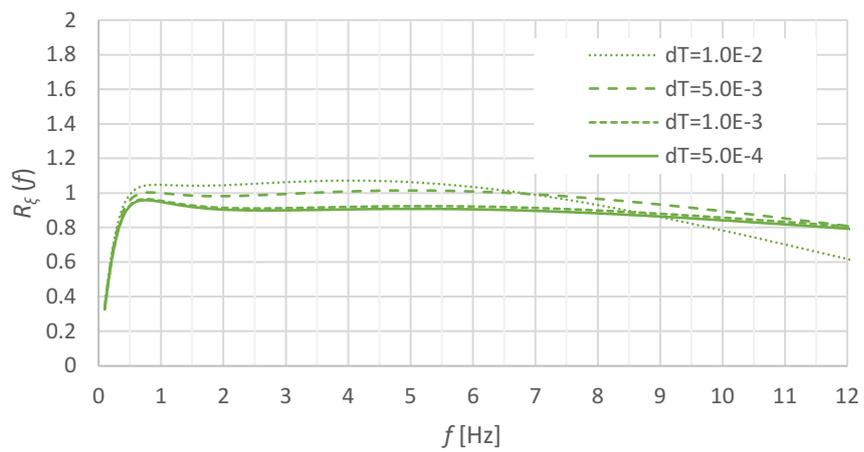
$\xi_{aim} = 0.01$ とした各モデルの精度の比較を Fig. 2.13 及び Fig. 2.14 に示す。減衰比の精度では、Unif が全体的な振動数域で 1.0 に近づいておりこれらの中では最も精度が高いといえる。一方、共振振動数の精度では、Caus 及び ERay については、ほぼ 1.0 となっており、共振振動数のずれがほとんどないが Unif はやや大きめの値となっている。



(a) Causal damping (9 term)

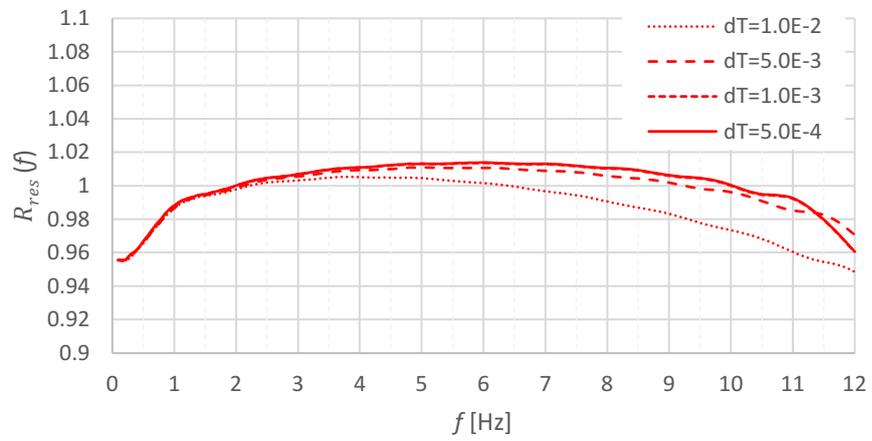


(b) Extended Rayleigh damping

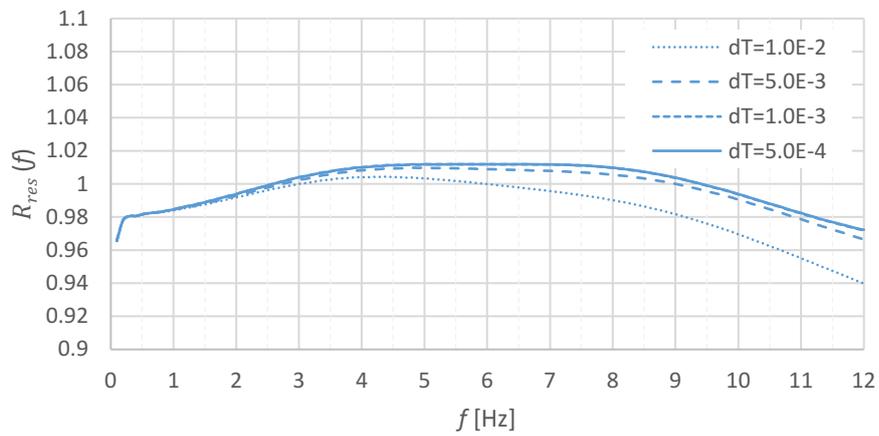


(c) Uniform damping

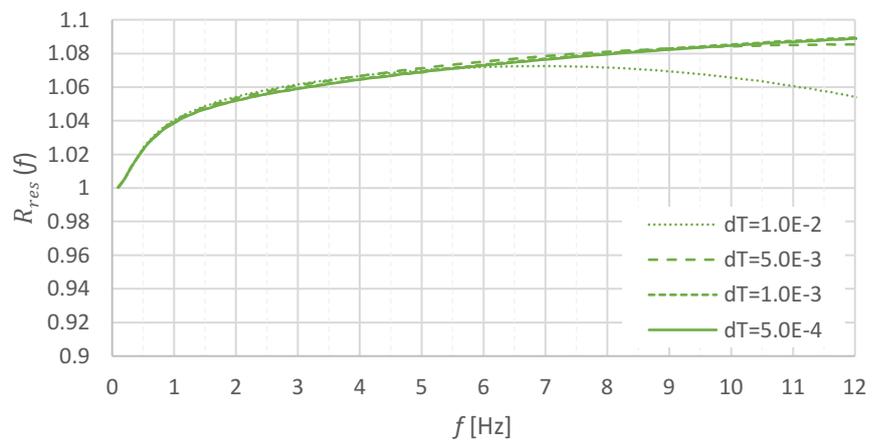
Fig. 2.11 Damping ratio ( $\xi_{aim} = 0.03$ )



(a) Causal damping (9 term)



(b) Extended Rayleigh damping



(c) Uniform damping

Fig. 2.12 Damping frequency ratio ( $\xi_{aim} = 0.03$ )

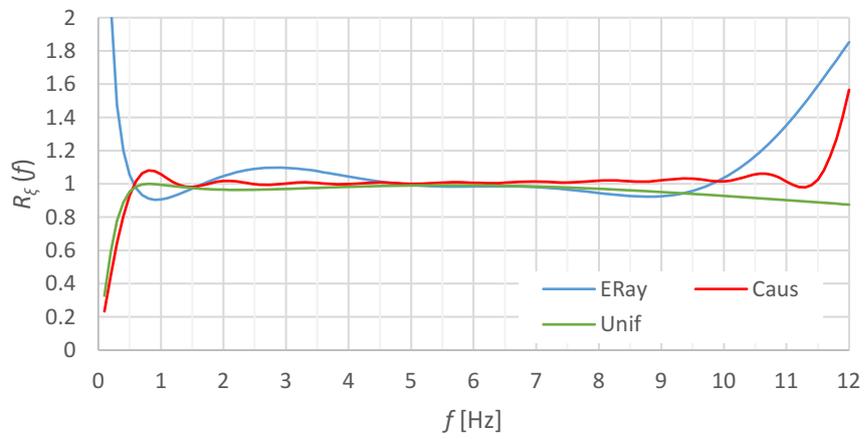


Fig. 2.13 Damping ratio ( $\xi_{aim} = 0.01$ )

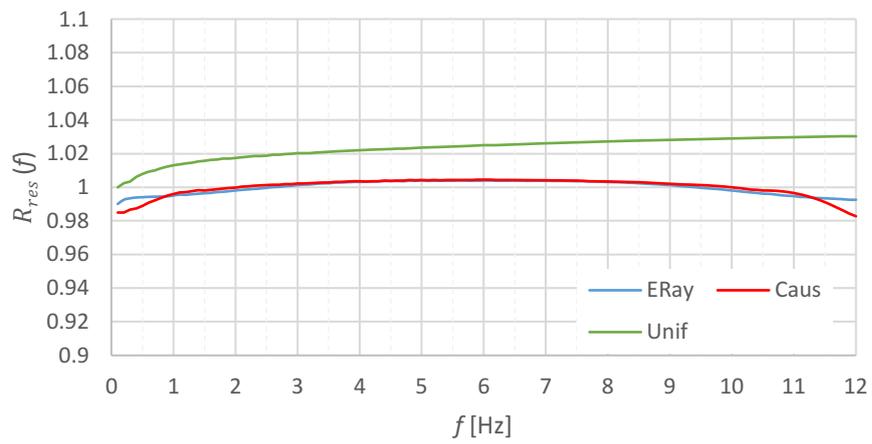


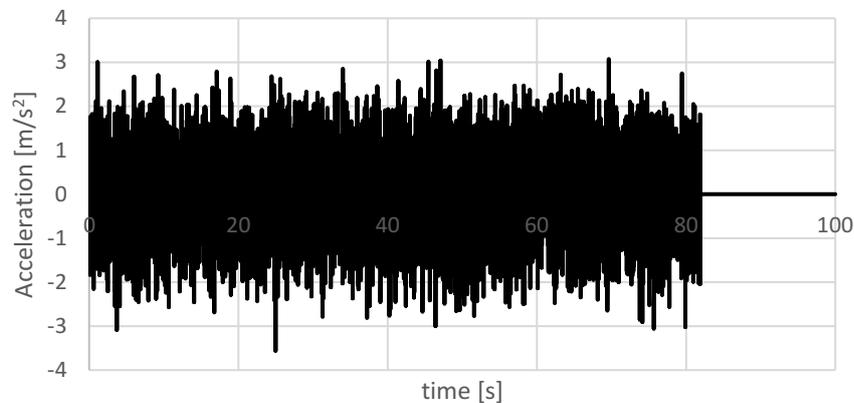
Fig. 2.14 Damping frequency ratio ( $\xi_{aim} = 0.01$ )

## 2.5.2 非線形モデル

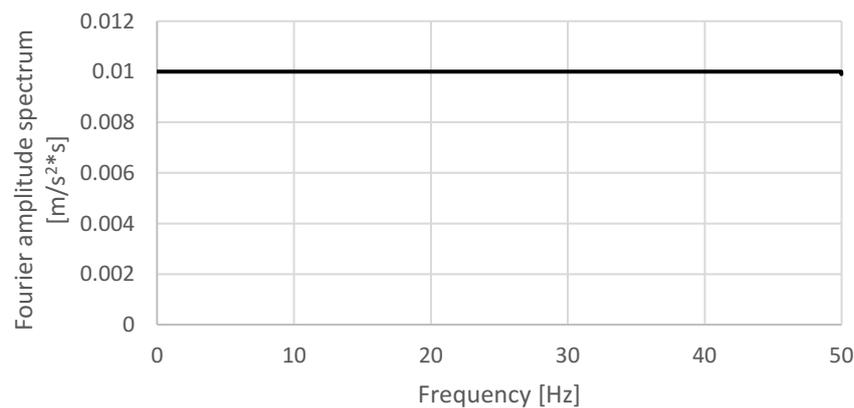
### 2.5.2.1 モデルの概要

次に、非線形問題に対して各減衰モデルの精度について検討する。それぞれの減衰モデルの性状を把握するのが目的であるので、結果が明瞭になるように 2.4.1 項と同じ単純な質点系モデルで検討した。

入力の地震動は、Fig. 2.15 のように、各振動数で振幅が等しいホワイトノイズを用いて検討した。3.1 節とは異なり初期の段階ではなく、入力波が与えられている途中で非線形化する。各非線形状態の結果の推移を確認するために、波に係数を乗じて、線形状態の 0.5 倍から、非線形状態の 1.2 倍、2.0 倍及び 4.0 倍とした。



(a) Acceleration



(b) Fourier amplitude spectrum

Fig. 2.15 Input wave

解析時間刻み $\Delta t$ は、時間刻みが粗い $5.0 \times 10^{-3}$  [s]と、非線形計算による影響がないように十分に細かい $5.0 \times 10^{-4}$  [s]で検討する。

解析検討の減衰モデルのケースは Table 2.6 の通りである。

Table 2.6 Analysis case (Nonlinear)

Case	Damping Type	Frequency [Hz]
Nmod	Nonlinear modal	-
Tstif	Tangent stiffness proportional	$f_1 = 0.5$
TRay	Tangent Rayleigh	$f_1 = 0.5, f_2 = 10.0$
Unif	Uniform	$f_{low} = 0.5, f_{high} = 10.0$
Caus	Causal (9 term)	$f_{lim} = 12.0$
ERay	Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 12.0$

本来、減衰モデルの有効性は実現象と比較すべきであるが、構造物の減衰については、現時点ではばらつきが大きく未だ不明確な状態といえる。ただし、数多くの調査から、「実際の構造物の初期減衰は、構造物の2次、3次モードの減衰比が、1次モードの減衰比と同程度か若干大きい程度とある」<sup>2-1)</sup>とされている。このため、少なくとも設計においては全振動数で一定の減衰比を用いるのが安全側であると考えられており、例えば原子力の耐震設計においても、モード減衰を用いている。それらの理由より、非線形を考慮したモード減衰(Nmod)を目標とする減衰モデルとした。Nmod は、Wilson-Penzien 減衰<sup>2-14)</sup>としており、瞬間剛性マトリクスを用いて全モード考慮した固有値解析を実施し、密な減衰マトリクスが作成される。

従来の減衰モデルでよく用いられる、瞬間剛性比例型減衰(Tstif)及び瞬間 Rayleigh 減衰(TRay)を比較のために検討した。 $f_1$ 及び $f_2$ の振動数は、評価対象の振動数帯に対して、低次側と高次側の振動数を設定するので、 $f_1 = 0.5$  [Hz]及び $f_2 = 10.0$  [Hz]としている。3.1節と同様に Uniform 減衰(Unif)、因果減衰(Caus)及び拡張 Rayleigh 減衰(ERay)も検討している。なお、いずれの減衰モデルでも目標とする減衰比は $\xi_{aim} = 0.02$ としている。

非線形特性は、Fig. 2.15 のような基本的な Bi-Linear 型（移動硬化則）とした。降伏変位 $\delta_y$ については、入力地震動で入力倍率が 1.0 において、減衰ケース Nmod の最大変位とする。第二勾配である接線剛性については初期剛性の 0.1 倍とした。今回採用した非線形特性は、単純な Bi-Linear 型であり、比較的解きやすい問題であることと、単純に解析時間刻みの影響を把握したいことから、今回は Newton-Raphson 法のような収束計算を実施せずに検討している。なお不釣り合い力は次のステップに持ち越して処理している。

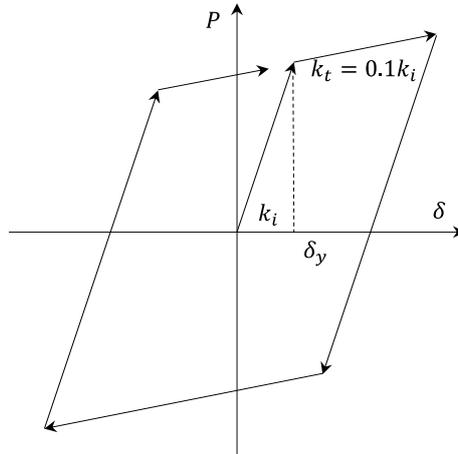


Fig. 2.16 Bi-linear model

2.5.2.2 結果と考察

Fig. 2.17 及び Fig. 2.18 に、 $\Delta t=5.0 \times 10^{-4}$  [s]の時の Nmod の最大塑性率（最大変位）と最大加速度の結果を示す。最大塑性率については、0.5 倍の入力波では、線形であるため 0.5 と一定であるが、入力倍率が大きくなり、最大塑性率が大きくなると、各振動数間では非線形化のレベルが異なる。1.2 倍の入力波では、概ね 1.2 程度であり、2.0 倍の入力波及び 4.0 倍の入力波では、最大塑性率が平均でそれぞれ 1.7 及び 3.0 程度であった。最大加速度では、高振動数になるほど大きくなっている。入力倍率が 0.5 倍から 1.2 倍までは、倍率に応じて最大加速度が増加しているが、1.2 倍以上では倍率程増加はしていない。これは、加速度はせん断力（復元力）を見ていることと等価であり、剛性の第二勾配を初期剛性の 0.1 倍と若干復元力が増える程度であるためそのような傾向になったと考えられる。

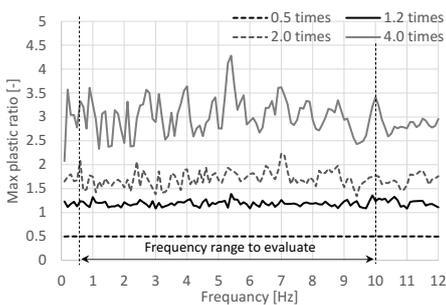


Fig. 2.17 Max plastic ratio (Nmod)

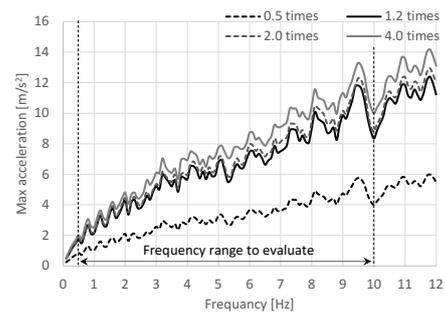


Fig. 2.18 Max acceleration (Nmod)

次に、Fig. 2.19 に示している最大塑性率の精度（Nmod に対する比）について確認する。1.0 に近いと Nmod の結果と同じ値となり、目標とした結果になっていることを意味する。TRay は 0.5Hz~10.0Hz の間で減衰比が  $\xi_{aim}$  よりも低く評価されるため、最大塑性率の精度が最大で 1.6 倍を超えて大きく評価されている。TRay の最小の所の減衰比が 0.013 程度となるが、最大応答値は単純に  $0.03/0.013=2.31$  倍とはならない。その理由としては、今回検

討している入力波がホワイトノイズのため、ランダム振動論<sup>2-13)</sup>より最大応答値が減衰比の平方根に反比例するからである。今回の場合で示すと $\sqrt{0.03/0.013} = 1.52$ で、ほぼ1.6倍程度になることが確認できる。Tstifについては、0.5Hz以上の振動数高い範囲では減衰比が大きくなるため、大きく1.0を下回っている。Unifでは、最大で1.3、最小で0.7程度であった。Caus及びERayでは、1.0に近く他の減衰モデルに比べれば特に安定している結果となっている。

1.2倍の入力波では、若干、非線形レベルに到達している。概ね0.5倍の入力波と同じような傾向であるが、TRayでは、徐々に1.0に近づいていることが確認される。

さらに、非線形レベルが強い、2.0倍の入力波及び4.0倍の入力波を確認すると、TRay、Caus及びERayは、1.0に近い結果となっている。非線形レベルが大きくなると、初期減衰よりも部材の塑性化に伴う履歴ループによりエネルギー吸収が行われ、履歴減衰の影響が初期減衰の影響よりも大きくなるためであると考えられる。Unifについては、線形レベルと同様の結果であった。

次に、Fig. 2.20に示している最大加速度の精度(Nmodに対する比)について確認する。

0.5倍の入力波では、最大塑性率の精度と同じ傾向であった。1.2倍の入力波では、TRayは0.5Hz以上で、ほぼ1.0となっている。最大加速度の考察と同じようにせん断力(復元力)が頭打ちとなったためと考えられる。Unifについては、高振動数側について1.0より大きくなるような結果となった。形状的には、Fig. 2.9と似ており、減衰モデルによる剛性増加の影響が考えられる。

2.0倍の入力波及び4.0倍の入力波については、1.2倍の結果と同じような傾向であった。解析時間刻みの大小の影響については、塑性率の精度についてはいずれの減衰モデルにおいてもあまり違いが見られなかった。

加速度の精度については、TRay、Caus及びERayについては差がほとんどない。Tstifは倍率が大きくなると高振動数側で差が出ている。高振動数側では減衰比がかなり大きくなるため、差が生じたものと考えられる。Unifについては、高振動数側で若干乖離がみられる。

これらの結果から、新たな減衰モデルについて、特に、Caus及びERayについては、線形及び非線形レベルまで、時間刻みが粗い場合においても精度よく検討できていることが確認できた。

また、従来モデルのTRayにおいては、非線形レベルが大きくなると、履歴減衰が支配的となるため、初期減衰の影響が相対的に低くなり、Nmodの結果に近い結果も確認された。

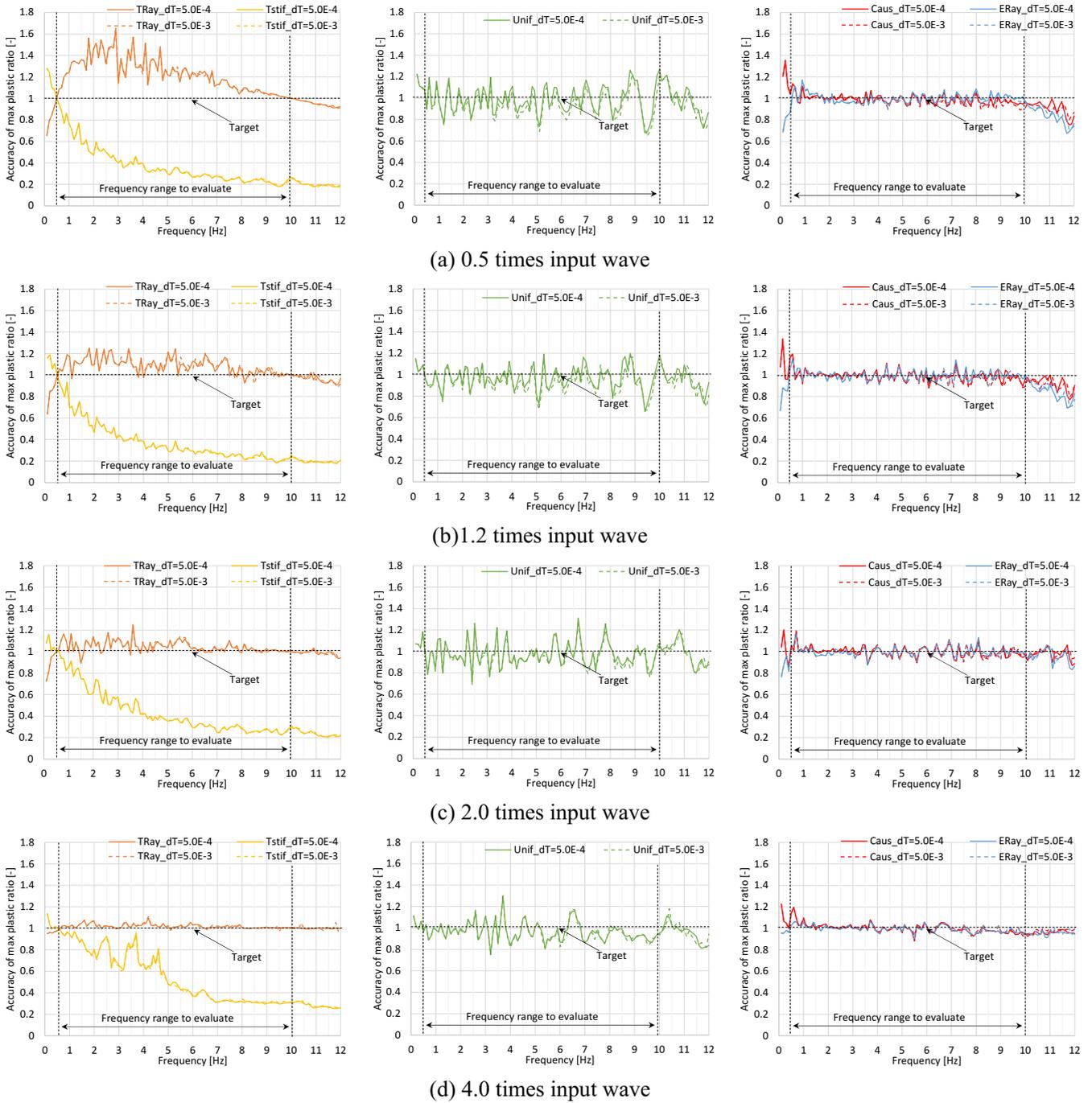


Fig. 2.19 Results of plastic ratio

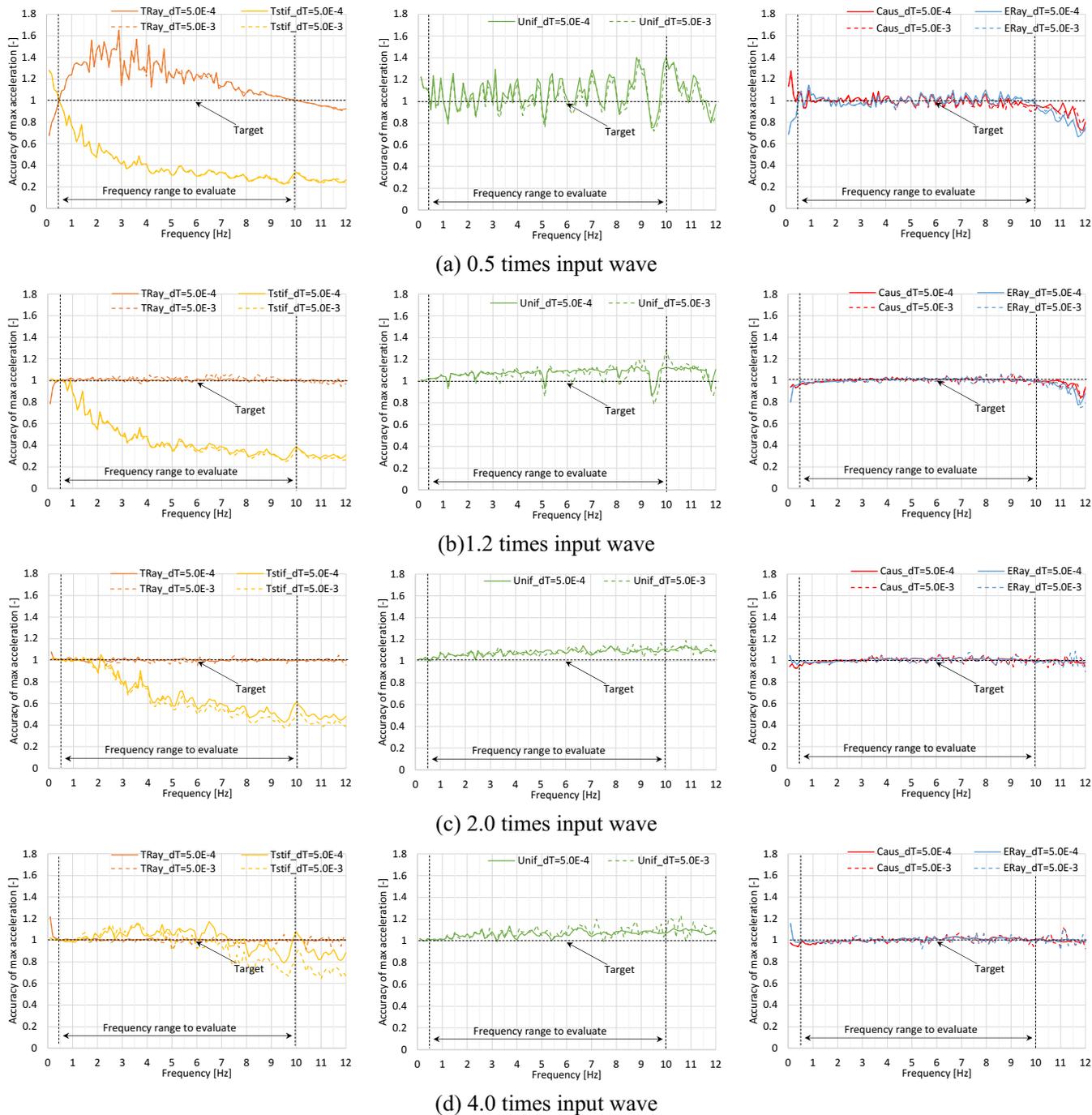


Fig. 2.20 Results of max acceleration ratio

## 2.5.2.3 計算時間の比較

本節では、各減衰モデルによる計算速度を比較する。解析モデルを Fig. 2.21 に示す。本モデルは、アーチ形状の中規模な構造物でトラス部材により構成されている。モデルの規模は、節点数が 388、自由度数が 1140 及び要素数が 2066 である。また、最も低次側の 1 次固有振動数は、1.28 [Hz]であった。

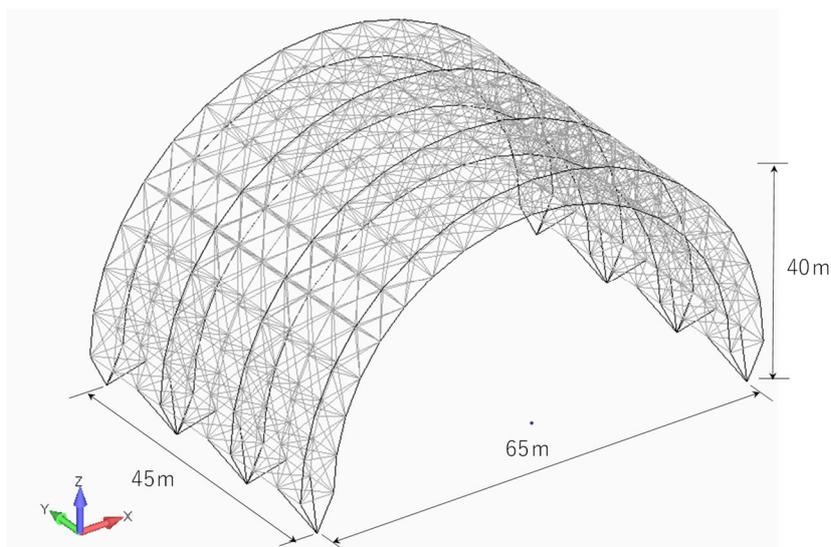


Fig. 2.21 Analysis model for computation time measurement

非線形特性としては、バイリニア型モデルを採用している。

入力波は、継続時間 120 [s]、時間刻み 0.01 [s]の模擬地震波を 3 方向に入力した。解析時間刻み  $\Delta t$  は、 $5.0 \times 10^{-3}$  [s]を基本とするが、解析が安定しない場合は刻みを細かくし対応する。

解析ケースを、Table 2.7 に示す。先の簡易モデルの検討と同様に、各減衰モデルの設定する振動数を与えている。いずれの減衰モデルでも目標とする減衰比は  $\xi_{aim} = 0.02$  としている。

Table 2.7 Analysis case (Computation time measurement)

Case	Damping Type	Frequency [Hz]
Nmod	Nonlinear modal	-
Tstif	Tangent stiffness proportional	$f_1 = 1.28$
TRay	Tangent Rayleigh	$f_1 = 1.28, f_2 = 25.6$
Unif	Uniform	$f_{low} = 1.28, f_{high} = 25.6$
Caus	Causal (9term)	$f_{lim} = 30.0$
ERay	Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 30.0$

Table 2.8 に計算時間の比較を行っている。実際に要した計算時間と、TRay で要した計算時間を 1.0 としたときの比率を示している。非線形の状態は、Nmod で頂部の X 方向水平変位に対する高さの比が 1/150 程度となっており、塑性化した要素が 59 程度だった。

Nmod では、剛性が変化すると逐次、固有値解析を実施し減衰マトリクスを作成することと、減衰マトリクスが密行列となり線形方程式を解く所で、時間がかかっている。Tstif については、TRay とほぼ同じ時間であった。

ERay は若干、TRay よりも少し時間がかかるが、Nmod に比べれば高速に計算できている。Caus は、過去のデータを ERay よりも多く利用するため、少し時間がかかる。

Unif については、 $5.0 \times 10^{-3}$  [s] では結果が発散したため、 $5.0 \times 10^{-4}$  [s] で検討している。そのため、Nmod 程度に時間を要した。Uniform 減衰は、高次になるほど減衰が小さく評価されるため、複雑なモデルにおいては  $\Delta t$  を大きくとると、解析が発散する場合は考えられる。

Table 2.8 Computation time

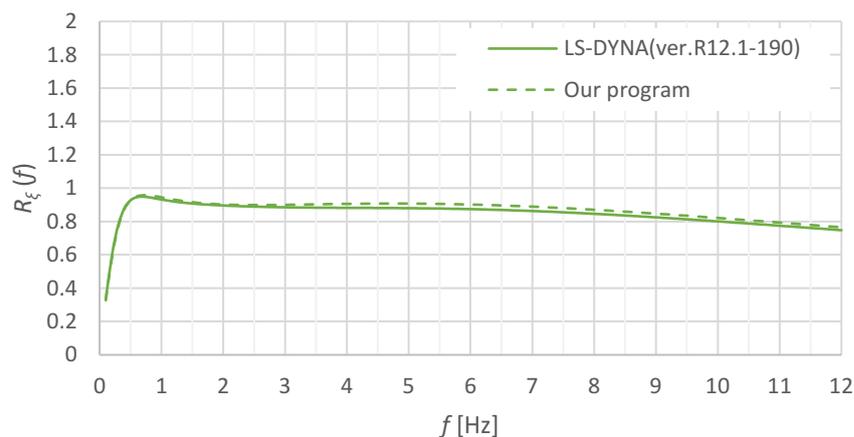
	Nmod	Tstif	TRay	Caus	ERay	Unif
Time [s]	972	79	81	106	90	861
Ratio [-]	12.00	0.98	1.00	1.31	1.11	10.63

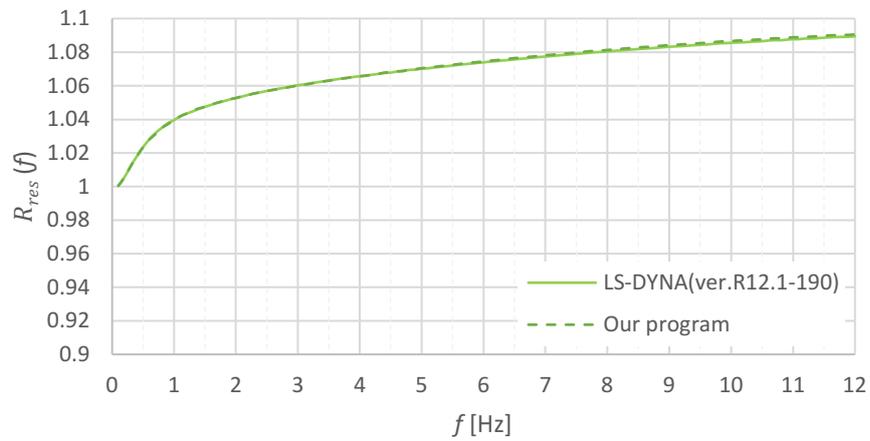
### 2.5.3 解析プログラムの検証

ここでは、Uniform 減衰について、筆者らのプログラムと LS-Dyna(ver. R12.1-190)の結果を比較した。解析条件は、2.5.2 項と同様に設定した。

Fig. 2.22 及び Fig. 2.23 には、減衰比の精度及び共振振動数の結果を示す。

減衰比の精度は、ほぼ全振動数帯で一致しており、筆者らのプログラムと LS-Dyna で、同等の計算精度を有していることが確認できる。

Fig. 2.22 Damping ratio ( $\xi_{aim} = 0.03$ )

Fig. 2.23 Damping frequency ratio ( $\xi_{aim} = 0.03$ )

さらに、3.2節と同様に、入力倍率 4.0 倍のケースで比較した。Fig. 2.24 及び Fig. 2.25 より、ほぼ一致した結果が確認できる。

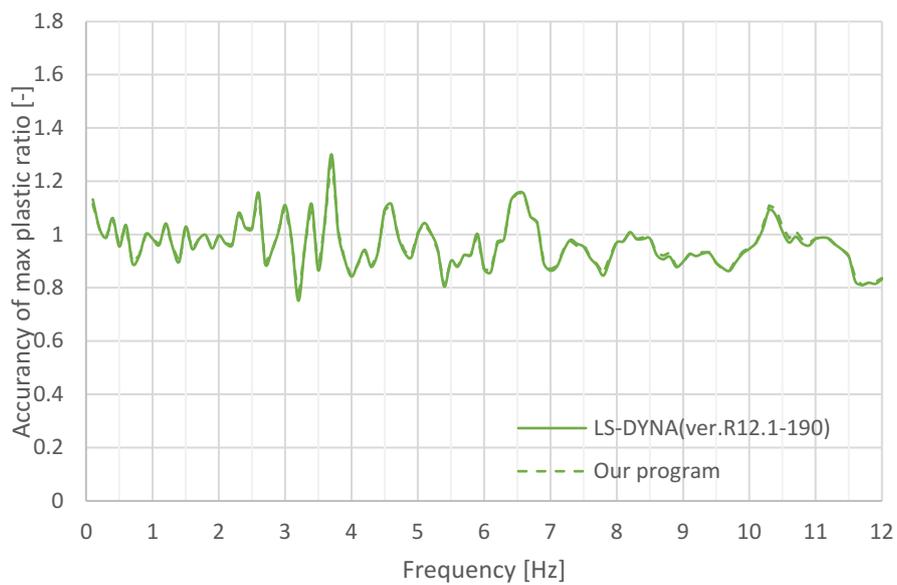


Fig. 2.24 Results of max plastic ratio (4.0 times input wave)

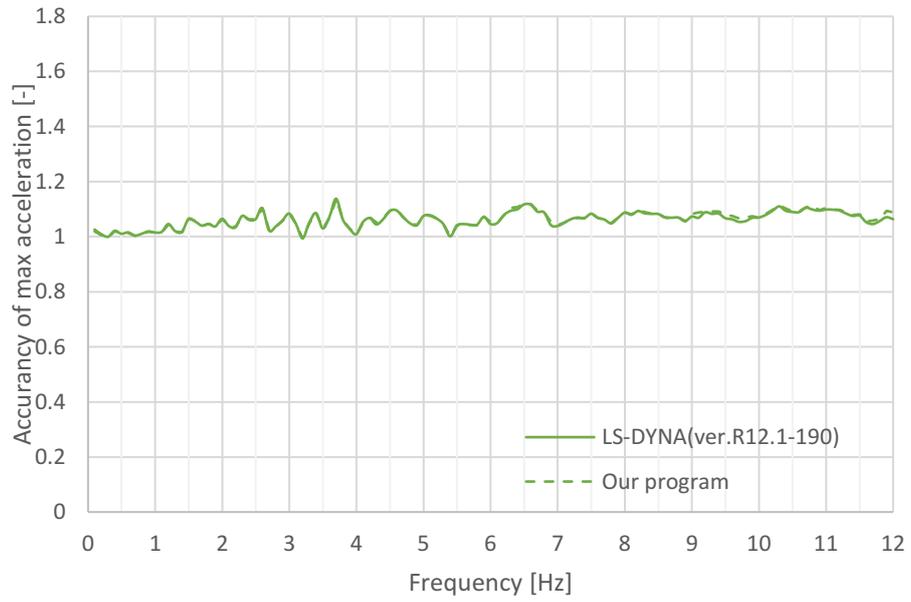


Fig. 2.25 Results of max acceleration ratio (4.0 times input wave)

## 2.6 2章のまとめ

本章では、2.1 節では本論で扱っている減衰が初期減衰であることを示し、2.2 節では基礎的な運動方程式を示し、2.3 節では従来の減衰モデルを説明し、2.4 節では新たな減衰モデルである因果性に基づく減衰モデル（因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰）と Uniform 減衰モデルについて理論式と概要について示した。

さらに 2.5 節では、はじめに、線形弾性時における減衰比の精度と共振振動数の精度を簡易なモデルにより確認した。また、解析時間刻みについての影響を確認した。

また、非線形の検討では、減衰モデルの基本的な振動性状を把握することを目的とし、線形弾性時の検討と同じモデルで、移動硬化則を有する Bi-linear 形の復元力特性により確認した。

本検討では時間刻みを粗くした場合と細かくした場合を実施し、因果減衰・拡張 Rayleigh 減衰について概ね良く、非線形モーダルと整合した結果が確認できた。一方で Uniform 減衰は、ややばらつきがある結果が確認された。また、従来の Rayleigh 減衰では、線形や非線形レベルが小さい範囲では非線形モーダルの結果と相違するが、非線形レベルが大きくなると、塑性化に伴うエネルギーが支配的になるため、整合する結果が確認された。ただし設計では、大きな非線形レベルだけではなく、線形レベルや弱非線形レベルで部材が塑性化している状態も想定されることから、新たな減衰モデルに優位性があるものと考えられる。

これら得られた知見を Table 2.9 に、それぞれ減衰モデルの特徴を整理した。

以上の結果を踏まえて、特に本論では、有力な減衰モデルとして、減衰モデルの精度及び解析の安定性に優れる、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰を用いて検討する。

Table 2.9 Analysis case (Computation time measurement)

	Tangent Rayleigh (Conventional)	Causal (9 term)	Extended Rayleigh (middle accuracy)	Uniform
	$f_1, f_2$	$f_{lim}$	$f_{lim}$	$f_{low}, f_{high}$
Frequency for damping setting				
Range in which the damping rate can be considered constant ( $W_\xi$ = High Freq./Low Freq.)	3.71 <sup>5)</sup> ( $f_2 / f_1 = 3.08/0.83$ )	23.8 ( $0.95f_{lim} / 0.04f_{lim}$ )	21.3 ( $0.85f_{lim} / 0.04f_{lim}$ )	Very wide frequency range Variable ( $f_{low} / f_{high}$ )
Accuracy of damping rate within the range of $W_\xi$	Good	Good	Good	Somewhat large variability
Damping rate outside the range of $W_\xi$	Lower	Small	Large	Small
	Higher	Large	Large	Small
Damping frequency within the range of $W_\xi$	No change	Slightly Lower <sup>*1</sup> Slightly Higher <sup>*2</sup>	Slightly Lower <sup>*1</sup> Slightly Higher <sup>*2</sup>	Higher
Calculation time	Fast	Relatively fast	Relatively fast	Late <sup>*3</sup>

\*1 : For 0 and  $f_{lim}$  side frequencies. \*2 For frequencies between 0 and  $f_{lim}$ .

\*3: In nonlinear analysis, it is necessary to set the analysis time step finely in order to obtain a stable solution.

## 2章の参考文献

- 2-1) AIJ: Damping and Vibration of Buildings, 2020  
日本建築学会：建築物の減衰と振動, 2020
- 2-2) Bathe, K. J., Wilson, E. L.: 有限要素法の数値計算 (菊池文男訳), 科学技術出版社, 1979.9
- 2-3) Wilson, E. L., Penzien, J., Evaluation of orthogonal damping matrices, International Journal for Numerical Methods in Engineering 1972; 4(1): 5-10
- 2-4) Roesset, J. M.; Whitman, R. V.; Dobry, R.: Modal Analysis for Structures with Foundation Interaction, Proc.ASCE, Vol.99, No.ST3, 1973.3
- 2-5) Nakamura, N.: A PRACTICAL METHOD FOR ESTIMATING CASUAL HYSTERETIC DAMPING, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 70, No. 596, pp. 33-39, 2005.10 (in Japanese)  
中村尚弘：因果的履歴減衰の実用的評価法, 日本建築学会構造系論文集, 第70巻, 第596号, pp. 33-39, 2005.10
- 2-6) Nakamura, N.: TRANSFORM METHODS FOR COMPLEX STIFFNESS TO TIME DOMAIN USING REAL OR IMAGINARY DATA ONLY, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 72, No. 612, pp. 79-86, 2007.2 (in Japanese)  
中村尚弘：実部もしくは虚部のデータのみを用いた複素剛性の時間領域変換法, 日本建築学会構造系論文集, 第72巻, 第612号, pp. 79-86, 2007.2
- 2-7) Nakamura, N.: APPLICATION OF CAUSAL HYSTERETIC DAMPING MODEL TO NONLINEAR SEISMIC RESPONSE ANALYSIS OF SUPER HIGH-RISE BUILDING, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 84, No. 759, pp. 597-607, 2019.5 (in Japanese)  
中村尚弘：因果的履歴減衰モデルの超高層建物の非線形地震応答解析への適用, 日本建築学会構造系論文集, 第84巻, 第759号, pp. 597-607, 2019.5
- 2-8) Nakamura, N.: STUDY ON UPGRADING OF RAYLEIGH DAMPING, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 79, No. 706, pp. 1751-1761, 2014.12 (in Japanese)  
中村尚弘：Rayleigh減衰の高度化に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第79巻, 第706号, pp. 1751-1761, 2014.12
- 2-9) Huang, Y., Sturt, R., Willford, M.: A damping model for nonlinear dynamic analysis providing uniform damping over a frequency range, Computers and Structures, 2019
- 2-10) Hall, J. F.: Performance of Viscous Damping in Inelastic Seismic Analysis of Moment-Frame Buildings, PASADENA, CALIFORNIA, REPORT NO. EERL 2018-01, 2018
- 2-11) Livermore Software Technology Corporation.: LS-DYNA Keyword User's Manual, Vol. 1

(R12.0), An ANSYS Company, 2000.7

- 2-12) Ota, A., Nakamura, N., Nabeshima, K., Mogi, Y., Kawabata, M.: FUNDAMENTAL STUDY OF DAMPING MODELS WITH ENHANCED FREQUENCY INDEPENDENCE IN NONLINEAR SEISMIC RESPONSE ANALYSIS, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 88, No. 811, pp. 1348-1359, 2023.9  
(in Japanese)  
太田成, 中村尚弘, 鍋島国彦, 茂木良宏, 川端昌史: 非線形地震応答解析における振動数非依存性を高めた減衰モデルの基礎的検討, 日本建築学会構造系論文集, 第88巻, 第811号, pp. 1348-1359, 2023.9
- 2-13) Mogi, Y., Nakamura, N., Nabeshima, K., Ota, A.: Performance of inherent damping models in inelastic seismic analysis for tall building subject to simultaneous horizontal and vertical seismic motion, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, Vol. 52, pp.3746-3764, 2023.10
- 2-14) Clough, R. W., Penzien, J.: Dynamics of structures, 3rd ed, Computers & Structures, Inc., Berkeley, (CA), 2003

## 第3章

### 鉄筋コンクリート材料を対象とした

### 非線形 3DFE 解析

#### 3.1 有限要素を対象とした鉄筋コンクリートの非線形構成則

##### 3.1.1 有限要素

本章以降では、主として壁式構造の実験体や構造物を取り扱うので、二次元要素を対象としたモデル化について説明する。

二次元要素は、平面応力要素、平面ひずみ要素及びシェル要素等がよく用いられている。壁や床では、面内応力の他に、面外方向の曲げモーメントやせん断力を負担することが考えられるので、シェル要素でモデル化されることがある。

特に、鉄筋コンクリートの非線形解析を実施するときには積層シェル要素が用いられ、その要素は厚さ方向を多数の層で構成し、それぞれの層で異なる材料を指定することが可能である。ここでは、Fig. 3.1 のように、実際の床や壁の部材に対して、コンクリート及び鉄筋を、それぞれ対応した位置に、多数の層でモデル化する。鉄筋層の層厚は、鉄筋の断面積と間隔から等価厚さを算出して設定することが多い。

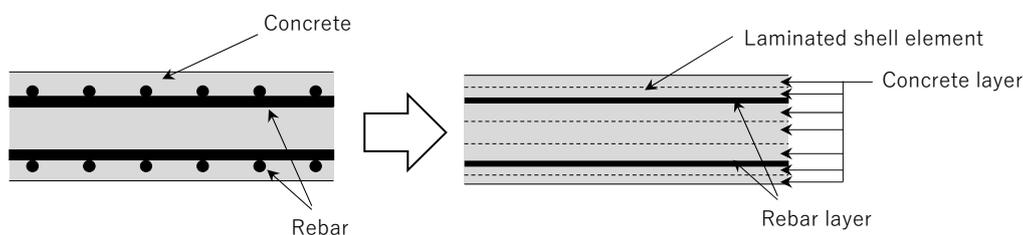


Fig. 3.1 Laminated shell element

### 3.1.2 コンクリート

土木分野では、コンクリート標準示方書<sup>3-1)</sup>に示されている、前川らのコンクリートモデル<sup>3-2)</sup>を良く用いられている。シェル要素やソリッド要素等の有限要素を対象としており、実験結果を精度よく模擬することが可能である。建築分野では、長沼らによって提案されたモデル<sup>3-3)</sup>がある。このモデルにおいても、有限要素で用いることが可能で、実験の再現や原子力建屋を対象とした非線形解析の実績を有している。

コンクリートの構成則は大別すると、ひび割れモデル、破壊基準、圧縮特性、引張特性、ひび割れ後の圧縮強度劣化特性及びひび割れ後のせん断伝達特性で構成されている。前川らのモデルは、これらの特性を一貫して前川らのモデルとして提案されている。一方で、長沼らのモデルは、既往の特性を修正や拡張する場合や、あるいは新たな特性を提案する等、複数の特性を組み合わせて構成されているのが特徴である。

ここでは、長沼らによって提案されたモデルを採用している。初めに、二次元要素を対象としたコンクリート構成則について説明している。なお、このモデルは、大成建設（株）と（株）アーク情報システムで共同開発された TDAPIII に実装されている<sup>3-4)</sup>。

#### 3.1.2.1 ひび割れモデル

ひび割れモデルは、Fig. 3.2 のような種類で分類される。大別すると、分散ひび割れと離散ひび割れがある。本論文では、ひび割れモデルは、要素内の応力の状態を基に、Fig. 3.3 のような要素内に平均的にひび割れが生じると仮定した、分散ひび割れモデル<sup>3-3)</sup>を採用する。分散ひび割れは、離散ひび割れのようなあらかじめひび割れが生じる位置に、ひび割れを模擬したばねを配置することなく、ひび割れを表現できるため実用性の高いモデル化手法と考えられる。

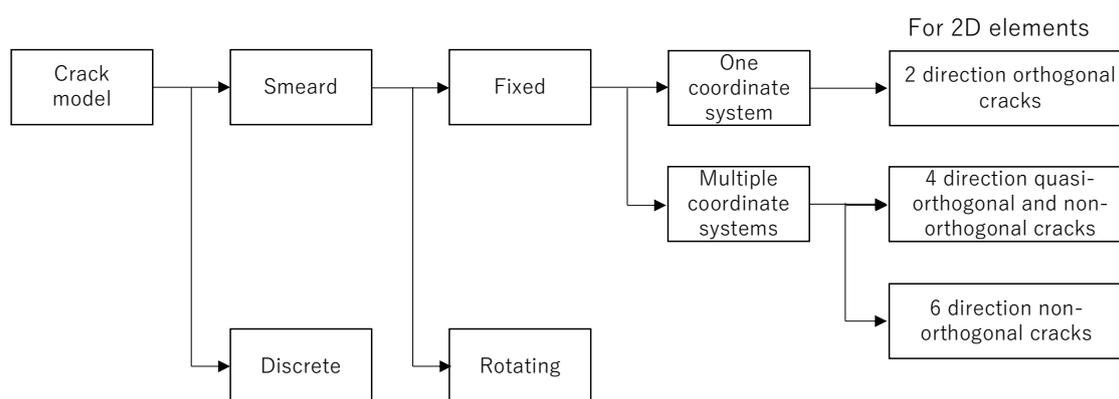


Fig. 3.2 Types of crack mode

分散ひび割れモデルには、固定ひび割れと回転ひび割れがあるが、固定ひび割れでは一度ひび割れが生じたらそのひび割れ方向は固定されが、回転ひび割れでは最大主ひず

み方向と直交する方向をひび割れ方向とするので時々刻々変化する。実際の現象を考えると、一度ひび割れが生じるとそのひび割れ方向は変化がないと考えられるので、固定ひび割れモデルが用いられる。

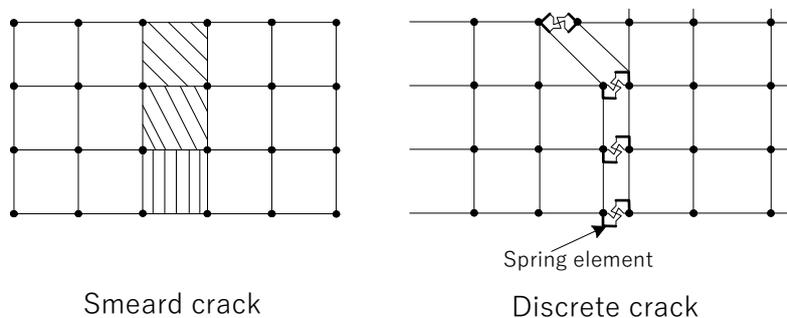


Fig. 3.3 Smeard crack and discrete crack

また、多方向入力に対応したひび割れモデルがある。福浦らが提案した 4 方向疑似直交と非直交ひび割れモデル<sup>3-5)</sup>である。ひび割れ角度が小さいときは、疑似直交ひび割れが生じ、大きいときはひび割れ座標系を新たに作成し非直交ひび割れが生じる。

長沼らは、Fig. 3.4 のように、最大で 3 組のひび割れ座標系と、1 組の座標系に直交 2 方向で、計 6 本の非直交固定ひび割れモデル<sup>3-6)</sup>を提案している。ひび割れが発生するとひび割れ面法線方向の剛性は失われる。ひび割れが閉じると、剛性は復活し力が伝達される。ひび割れた界面は、骨材や鉄筋ダボ効果によってせん断力が伝達される。また一度ひび割れると、圧縮強度や剛性が低下する性質がある。これらの特性を考慮したモデルとなっており、詳細は後で説明している。

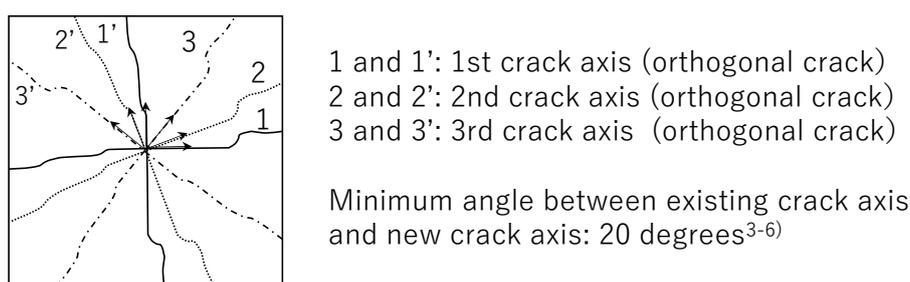


Fig. 3.4 6-direction non-orthogonal fixed crack model

### 3.1.2.2 破壊規準

二軸応力下での破壊規準は、長沼らの文献 3-6)においても、式(3.1)～式(3.3)のような Kupfer-Gerstle の提案式<sup>3-7)</sup>を採用している。

【圧縮となる二軸圧縮下の破壊条件】

$$\left(\frac{\sigma_1}{f_c} + \frac{\sigma_2}{f_c}\right)^2 - \frac{\sigma_2}{f_c} - 3.65 \frac{\sigma_1}{f_c} = 0 \quad (|\sigma_1| \leq |\sigma_2|) \quad (3.1)$$

【一方向引張－他方向圧縮状態の破壊条件】

$$\frac{\sigma_1}{f_t} = 1.0 - 0.8 \frac{\sigma_2}{f_c} \quad (3.2)$$

【二軸引張状態の破壊条件】

$$\max(\sigma_1, \sigma_2) \geq f_t \quad (3.3)$$

ここに、 $\sigma_1, \sigma_2$  : 主応力、 $f_c$  : 一軸圧縮強度及び  $f_t$  : 一軸引張強度である。

Fig. 3.5 に、二軸応力下での破壊曲面を示す。二軸圧縮下での最も強度が大きくなる場合は、二つの主応力の比が 0.5:1.0 であり、一軸圧縮応力が 1.2～1.3 倍程度大きくなることを確認できる。

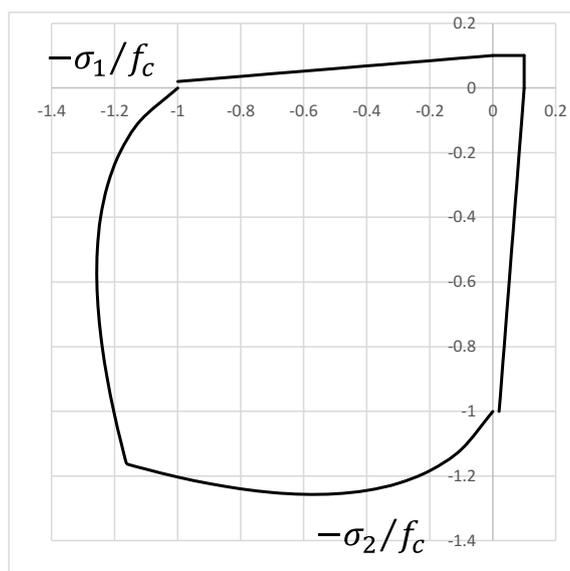


Fig. 3.5 Kupfer-Gerstle failure criterion

### 3.1.2.3 圧縮特性

圧縮特性としては、Fig. 3.6 のような長沼ら<sup>3-8),3-9)</sup>の修正 Ahmad モデルである。そのモデルは、Ahmad らが提案した圧縮強度到達までの上昇域及び圧縮強度到達後のひずみ軟化域（下降域）までを 1 つの関数式で表現できる圧縮応力－ひずみ関係のモデルを、改良し提案された。式(3.4a~c)及び式(3.5a~c)のように応力 $\sigma$ とひずみ $\varepsilon$ 関係は、圧縮強度到達までの上昇域及び、圧縮強度到達後のひずみ軟化域（下向域）で表されている。

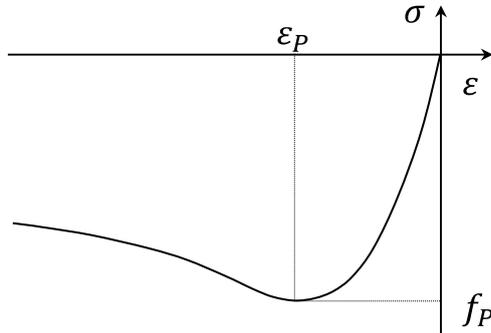


Fig. 3.6 Concrete compression model by Naganuma et al. (Modified Ahmad model)

【圧縮強度到達までの上昇域】

$$\sigma = \frac{\left( \frac{E_0}{sE_P} \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} + (D - 1.0) \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^2 \right) \cdot f_P}{1.0 + \left( \frac{E_0}{sE_P} - 2.0 \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} + D \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^2} \quad (|\varepsilon| \leq |\varepsilon_P|) \quad (3.4a)$$

$$D = \frac{19.6}{f_c} - \left( \frac{sE_c}{sE_P} - 1.0 \right)^2 \quad \left( D \geq 1.0 - \frac{E_0}{sE_P} \right) \quad (3.4b)$$

【圧縮強度到達後のひずみ軟化域】

$$\sigma = \frac{\left( \frac{E_0}{sE_P} \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^n + (D - 1.0) \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^{2n} \right) \cdot f_P}{1.0 + \left( \frac{E_0}{sE_P} - 2.0 \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} + D \cdot \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_P} \right)^2} \quad (|\varepsilon| \leq |\varepsilon_P|) \quad (3.5a)$$

$$n = 0.9 + 3.4 \left( \frac{f_c}{98.07} \right)^2 \quad (3.5b)$$

$$D = 1.0 + \frac{176.5}{f_c} \left( \frac{f_P}{f_c} - 1.0 \right) \quad (3.5c)$$

ここに、

$E_0$  : 初期弾性係数

$f_P$  : 最大圧縮応力

$\varepsilon_P$  : 最大圧縮応力時のひずみ

$sE_P$  : 最大圧縮応力点の割線弾性係数(=  $f_P/\varepsilon_P$ )

$f_c$  : 一軸圧縮強度

$\varepsilon_c$  : 一軸圧縮強度時のひずみ

$sE_c$  : 一軸圧縮強度点の割線弾性係数(=  $f_c/\varepsilon_c$ )

であり、 $n, D$ の単位系は  $\text{N/mm}^2$  である。

### 3.1.2.4 引張特性

出雲らのモデル<sup>3-10)</sup>あるいは長沼・山口のモデル<sup>3-11)</sup>を用いて検討されている。

出雲らのモデルは、鉄筋付着の影響を考慮したテンションスティフニング (TS) 特性を表すことができる。鉄筋コンクリートの一つの要素として、コンクリートの平均な応力と平均なひずみの関係をモデル化した方法である。Fig. 3.7 のように応力とひずみの関係となる。

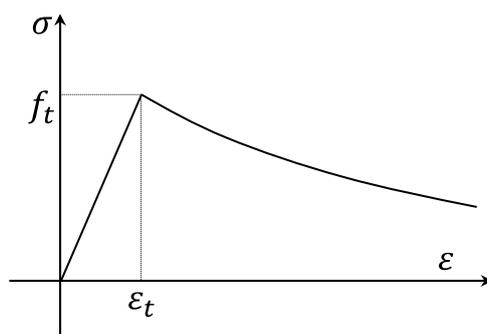


Fig. 3.7 Concrete tension model by Izumo et al.

ひび割れ前( $\epsilon \leq \epsilon_t$ )は線形弾性となり、ひび割れ後( $\epsilon > \epsilon_t$ )の軟化部分は、式(3.6)のように付着特性としてパラメータCの指数関数で表されている。

$$\sigma = \left(\frac{\epsilon_t}{\epsilon}\right)^C f_t \quad (3.6)$$

通常の異形鉄筋を用いる場合は $C = 0.4$ で提案されている。Cを大きくすれば軟化曲線が急激に低下することから、無筋コンクリートの特性として表現させる場合もある。

長沼・山口は、Fig. 3.8 のように平板実験結果を考慮した TS 特性を有するモデルを提案している。

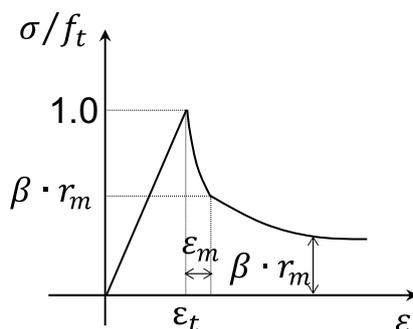


Fig. 3.8 Concrete tension model by Naganuma et al.

式(3.7a,b)で算出される圧縮強度に関するパラメータ $r_m$ や鉄筋比に関するパラメータ $\epsilon_m$ に応じて、引張軟化域の応力—ひずみ関係が設定される。

$$r_m = 0.6 - \frac{f_c}{176.5} \quad (3.7a)$$

$$\varepsilon_m = 0.0016 - 0.24p_s \quad (3.7b)$$

ここに、 $p_s$ は鉄筋比であり、この値が小さいと軟化が急激に低下する。 $r_m$ の単位系は  $\text{N}/\text{mm}^2$ である。

また、ひび割れ方向の圧縮ストラットの応力レベルが低下することにより、引張応力も著しく低下するため、圧縮ストラットの剛性（具体的にはひび割れ面と並行方向の圧縮時接線剛性）の低下率 $\beta$ を引張応力に乗じることで、その影響を考慮するモデルとなっている。 $\beta$ は式(3.8)で表される。

$$\beta = \frac{E_T}{E_0} \quad (3.8)$$

ここに、 $E_T$ はひび割れ方向と平行方向のコンクリートの圧縮時接線弾性係数である。

### 3.1.2.5 ひび割れ後のせん断伝達特性

Fig. 3.9 のような長沼のせん断伝達特性モデル<sup>3-9),3-12)</sup>を提案している。

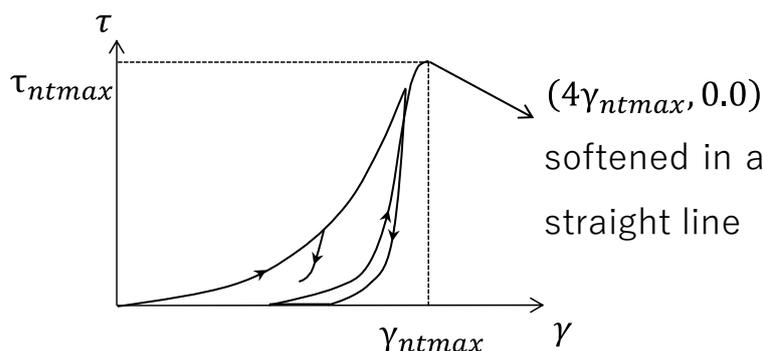


Fig. 3.9 Concrete share transfer model by Naganuma et al.

このモデルでは、ひび割れ面を横切る鉄筋のダボ作用の影響を考慮し、ひび割れ面の骨材の噛合いと鉄筋のダボ作用の両者を含む形で平均的に評価している。具体的には、ひび割れ面法線方向のひずみ $\varepsilon_t$ と鉄筋の降伏強度、鉄筋比に応じてせん断抵抗が変化するモデルとなっている。なお、 $\tau_{ntmax}$ 以降は、 $4\gamma_{ntmax}$ に向かって直線に軟化するモデル<sup>3-13)</sup>となっている。ひび割れ方向のせん断応力とせん断ひずみの関係は、式(3.9)で表されている。

$$\tau_{nt} = \frac{\tau_{ntmax}(2.0 - d \cdot \varepsilon_t)}{1.0 - d \cdot \gamma_{nt} + \left(\frac{\gamma_{nt}}{\varepsilon_t}\right)^2} \cdot \frac{\gamma_{nt}}{\varepsilon_t} \quad (3.9)$$

ここに、

$$\tau_{ntmax} = \frac{\tau_{du}}{1.0 + 25700\varepsilon_t^2} \quad (3.10a)$$

$$\tau_{du} = 1.38 + 0.8(p_{sn}\sigma_{yn} + \sigma_n) \quad (\leq 0.3f_c) \quad (3.10b)$$

$$p_{sn}\sigma_{yn} = p_{sx}f_{yx} \cos^2 \phi + p_{sy}f_{yy} \sin^2 \phi \quad (3.10c)$$

$$d = \frac{2.03}{\varepsilon_t} - 100 \quad (3.10d)$$

であり、

$\varepsilon_t$  : ひび割れ面法線方向の引張ひずみ

$\sigma_n$  : ひび割れ面に作用する圧縮応力 (圧縮を正)

$p_{sx}, p_{sy}$  :  $x$ 方向の鉄筋比、 $y$ 方向の鉄筋比

$f_{yx}, f_{yy}$  :  $x$ 方向の鉄筋の降伏応力、 $y$ 方向の鉄筋の降伏応力

$\phi$  : ひび割れ面法線方向と鉄筋方向軸の成す角 ( $x$ 方向と $y$ 方向は直交)

とし、 $\tau_{du}$ の単位系は、 $N/mm^2$ である。

### 3.1.2.6 ひび割れ後の圧縮強度劣化特性

長沼のひび割れ後のコンクリートの圧縮強度劣化特性<sup>3-14)</sup>を考慮している。面内せん断応力下で鉄筋と斜めに交差するひび割れが生じた後のコンクリートの圧縮強度 $ckf_c$ 及びひずみ $ck\varepsilon_c$ は、式(3.11a,b)及び(3.12a~c)のように一軸圧縮強度に低減係数を乗じて決定されている。

$$ckf_c = \lambda ckf_c \quad (3.11a)$$

$$ck\varepsilon_c = \lambda ck\varepsilon_c \quad (3.11b)$$

低減係数 $\lambda$ は、式のように、

$$\lambda = \lambda_{ps} + 1.45\eta \quad (\leq 0.95) \quad (3.12a)$$

$$\lambda_{ps} = 0.74 - \frac{f_c}{255} \quad (f_c < 80 N/mm^2) \quad (3.12b)$$

$$\lambda_{ps} = \frac{1.91}{f_c^{0.34}} \quad (f_c \geq 80 N/mm^2) \quad (3.12c)$$

であり、有効圧縮軸応力度比 $\eta$ は、式(3.13a~e)のように表されている。

$$\eta = \min(\eta_x, \eta_y) \quad (3.13a)$$

$$\eta_x = \frac{\sigma_{0x} - \sigma_{0cx}}{f_c} \quad (\geq 0) \quad (3.13b)$$

$$\eta_y = \frac{\sigma_{0y} - \sigma_{0cy}}{f_c} \quad (\geq 0) \quad (3.13c)$$

$$\sigma_{0cx} = 0.95f_c^{0.66} - p_{sx}f_{yx} \quad (\geq 0) \quad (3.13d)$$

$$\sigma_{0cy} = 0.95f_c^{0.66} - p_{sy}f_{yy} \quad (\geq 0) \quad (3.13e)$$

ここに、

$\sigma_{0x}$  :  $x$ 方向の作用圧縮軸応力 (圧縮応力を正)

$\sigma_{0y}$  :  $y$ 方向の作用圧縮軸応力 (圧縮応力を正)

$p_{sx}, p_{sy}$  :  $x$ 方向の鉄筋比、 $y$ 方向の鉄筋比

$f_{yx}, f_{yy}$  :  $x$ 方向の鉄筋の降伏応力、 $y$ 方向の鉄筋の降伏応力

である。また、 $\lambda_{ps}, \sigma_{0cx}, \sigma_{0cy}$ の単位系は、 $N/mm^2$ である。

$x$ 方向及び $y$ 方向の鉄筋と、ひび割れ方向の成す角がいずれも 30~60 度の範囲外の場合は、

低減係数 $\lambda = 1.0$ とする。

### 3.1.3 鉄筋

鉄筋の非線形構成則としては、良く用いられる Bi-Linear 型、修正 Menegotto-Pinto モデル及びコンクリート標準示方書モデル等がある。ここでは、Fig. 3.10 のような繰り返し挙動が良好な Ristic et al.の修正 Menegotto-Pinto モデル<sup>3-14</sup>を採用する。

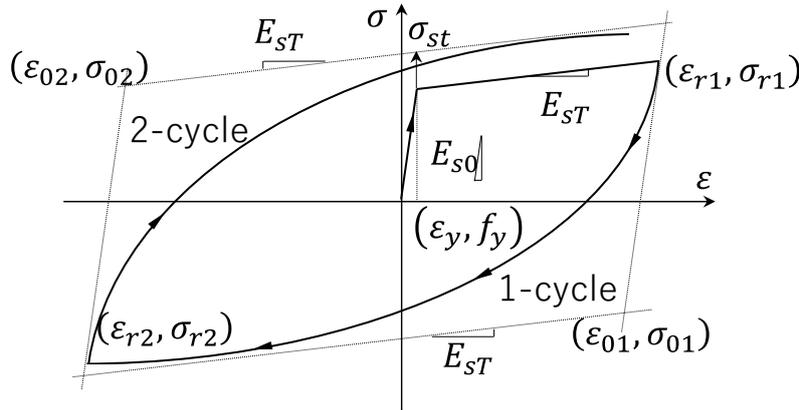


Fig. 3.10 Modified Menegotto-Pinto model by Ristic et al.

また、繰り返し载荷時において、鉄筋のバウシinger効果が模擬できるような、ひずみ硬化の影響を考慮できる。式(3.14)のような形で提案されている。

$$\sigma^* = b \cdot \varepsilon^* + \frac{(1-b)\varepsilon^*}{(1 + (\varepsilon^*)^R)^{1/R}} \quad (3.14)$$

【ひずみ減少時 (1-cycle に相当する場合)】

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{r1}}{\sigma_{01} - \sigma_{r1}}, \varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{01} - \varepsilon_{r1}}, \xi = \frac{|\varepsilon_{max}^+ - \varepsilon_{01}|}{\varepsilon_y} \quad (3.15a,b,c)$$

【ひずみ増加時 (2-cycle に相当する場合)】

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_{r2}}{\sigma_{02} - \sigma_{r2}}, \varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{02} - \varepsilon_{r2}}, \xi = \frac{|\varepsilon_{max}^- - \varepsilon_{02}|}{\varepsilon_y} \quad (3.16a,b,c)$$

また、

$$b = \frac{E_{sT}}{E_{s0}}, R = R_0 - \frac{a_1 \xi}{a_2 + \xi}, \quad (3.17a)$$

$$\frac{\sigma_{st}}{f_y} = \begin{cases} 0 & (\varepsilon_{max}/\varepsilon_y \leq a_4) \\ a_3 \left( \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) & (\varepsilon_{max}/\varepsilon_y > a_4) \end{cases} \quad (3.17b)$$

$$\varepsilon_{max} = \max(|\varepsilon_{max}^+|, |\varepsilon_{max}^-|) \quad (3.17c)$$

であり、

$E_{s0}$  : 鉄筋の初期弾性係数、 $E_{sT}$  : 鉄筋の降伏後弾性係数

$f_y$  : 鉄筋の降伏応力、 $\varepsilon_y$  : 鉄筋の降伏ひずみ

$\sigma_r$  : 除荷発生時の応力、 $\varepsilon_r$  : 除荷発生時のひずみ

$\sigma_0$  : 漸近線交点の応力、 $\varepsilon_0$  : 漸近線交点のひずみ

$\varepsilon_{max}$  : 負側正側で発生した最大のひずみ (絶対値)

で表されており、パラメータはそれぞれ、 $R_0 = 20, a_1 = 18.5, a_2 = 0.15, a_3 = 0.01, a_4 = 7.0$  で設定されることが多い。

### 3.2 動的加振試験の再現解析と検証

#### 3.2.1 実験の概要

再現解析の対象は、Fig. 3.11 のような RC の H 型断面の耐震壁である。この実験は、1990 年代に原子力発電技術機構 (NUPEC) の旧多度津工学試験所で実施<sup>3-15)</sup>された。実験と同時に、解析コンペティションも開催されており、数多くの解析結果が報告されている。解析コンクリートの非線形構成則の精度を確認するために、良くこの実験が引用<sup>3-6),3-16)</sup>されている。

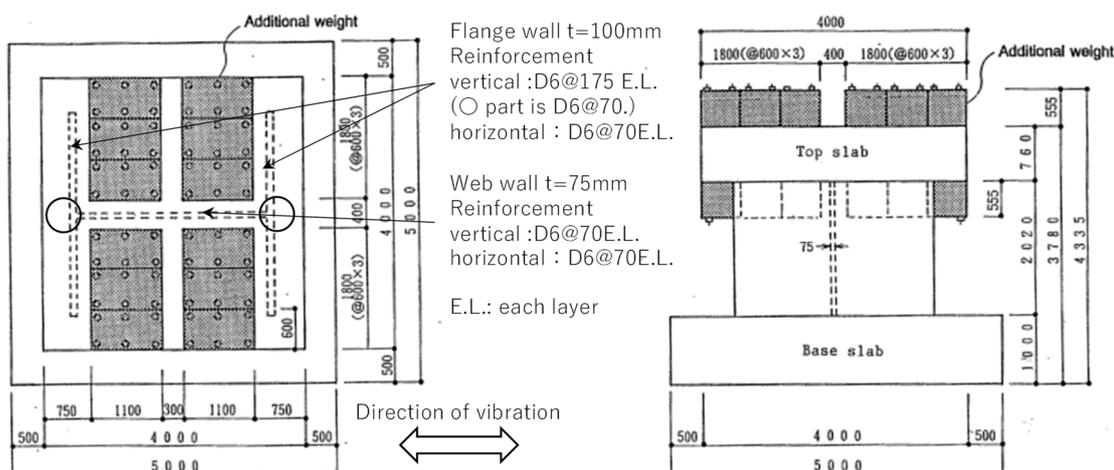


Fig. 3.11 Test specimen for dynamic horizontal excitation experiment

試験体は、ウェブ壁、フランジ壁、上部スラブ、基礎スラブ及び錘で構成されている。錘の付加重量は 92.9 [ton]であり、壁の軸方向応力度が 1.47 [MPa]となるように設定された。コンクリートは、材料試験の結果よりウェブ壁およびフランジ壁において、平均圧縮強度が 28.64 [MPa]で、平均ポアソン比が 0.155 であった。また鉄筋は、平均弾性係数が 184 [GPa]、平均降伏強度が 383 [MPa]であった。

実験は、大型高性能振動台によって、弾性から塑性及び終局に至るまでの状況を再現するために、Fig. 3.12 のような 5 つのレベル (RUN1→…→RUN5) で、徐々に入力加速度を強めながら動的に加振された。各レベルでは波の継続時間が 12.0 [s]であり、時間刻みは 0.001 [s]である。耐震壁のせん断変形角においては、RUN2 が 240  $\mu$ 、RUN3 が 720  $\mu$ 、RUN4 が 2000  $\mu$  及び RUN5 が 4000  $\mu$  程度と記載がある。RUN1 は、線形弾性範囲内であり、

RUN2D 以降ではウェブ壁の中央部に初期せん断クラックが観察され、RUN4 以降ではフランジ壁の水平クラックが観察された。RUN5 では、ウェブ壁の底部でせん断滑り破壊が発生して構造物が崩壊した。

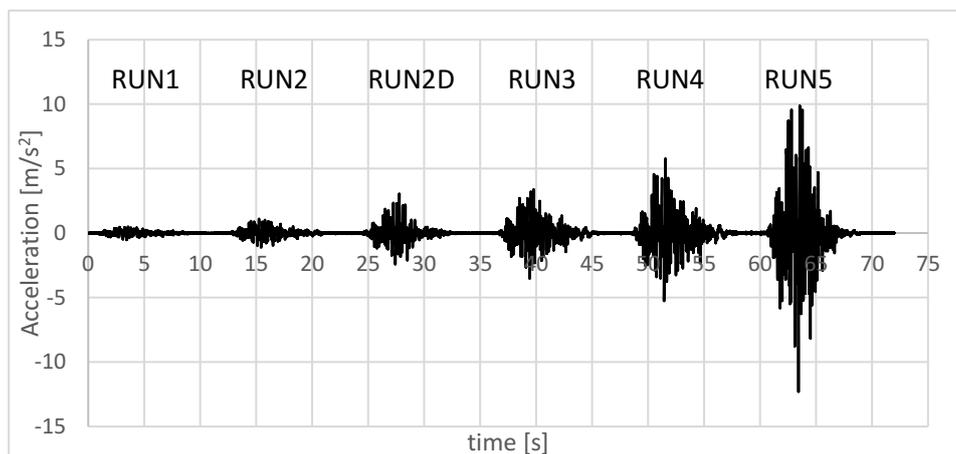


Fig. 3.12 Input acceleration

Table 3.1 のように、試験体の固有振動数 $f_0$ と等価減衰比 $h_{eq}$ が確認されている。

Table 3.1 Dynamic characteristics of the test specimen

	$f_0$ (Hz)	$h_{eq}$ (%)
Before RUN-1	13.2	1.1
Before RUN-3	11.3	2.5
Before RUN-4	9.0	3.0
Before RUN-5	7.7	4.0

$f_0$ : Natural frequency

$h_{eq}$ : equivalent damping ratio

### 3.2.2 解析モデル

解析モデルは、Fig. 3.13 のような 3DFE でモデル化している。ウェブ壁及びフランジ壁は、前述に示した RC 非線形の積層シェル要素でモデル化しており、その他の部位は、線形弾性のソリッド要素でモデル化している。積層シェル要素の層分割は、コンクリート層を 7 層で、鉄筋層をダブル配筋で水平と鉛直方向に配筋されているため 4 層でモデル化している。鉄筋層厚は、鉄筋量に応じて等価な厚さを算出し設定した。

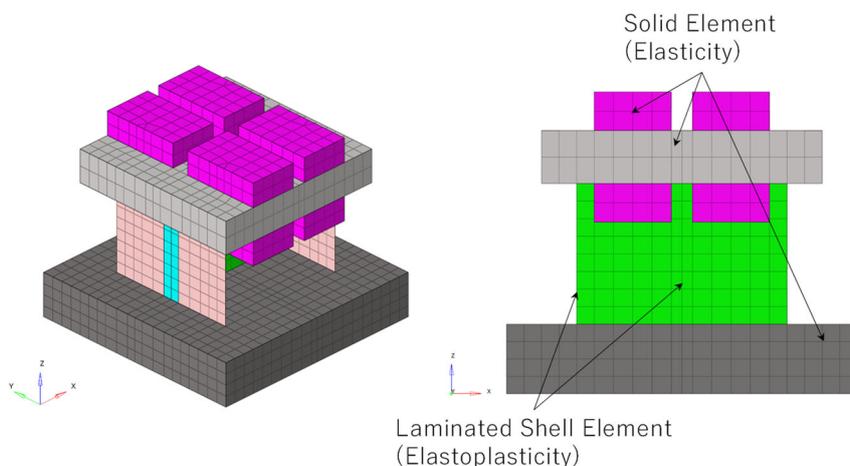


Fig. 3.13 Analysis model

基本的な物性値は、実験で得られた平均値である Table 3.2 のように設定した。非線形は、前節で示した構成則を用いているが、コンクリート引張側には出雲らのモデル、鉄筋には修正 Menegotto-Pinto モデルを用いた。

Table 3.2 Analysis input values

(a) Concrete

Elastic modulus $E_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Poisson's ratio [-]	Compressive strength $f_c$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Tensile strength $f_t$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Tensile softening coefficient C [-]
$2.295 \times 10^4$	0.155	28.64	2.24	0.4

(b) Rebar

Elastic modulus $E_s$ [N/mm <sup>2</sup> ]	Yield strength $f_y$ [N/mm <sup>2</sup> ]
$1.84 \times 10^5$	383

境界条件は、基礎スラブの下の節点を拘束した。荷重については、初めに自重を与えた上で、Fig. 3.12 の入力加速度を一様地震力として動的に加振している。

3章以降では、TDAPIII<sup>3-4)</sup>に因果性に基づく減衰モデルを実装し検討している。

固有値解析結果を Fig. 3.14 に示す。1次モードの振動数は、13.3 [Hz]であり、Table 3.1 に示された実験の固有振動数と、ほぼ一致していることが確認できる。

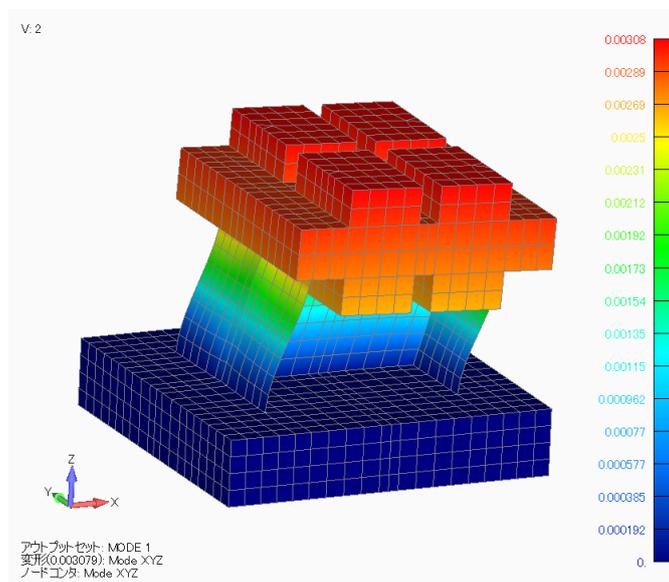


Fig. 3.14 Eigenvalue analysis results (1st mode 13.3Hz)

### 3.2.3 解析条件

加振時の解析は、動的解析（Newmark- $\beta$  法、無条件安定、数値減衰なしとして  $\beta=0.25$ 、 $\gamma=0.5$ ）を実施し、Newton-Raphson 法により非線形の収束計算を行っている。また、十分な精度を確保するために解析時間刻みは、 $2.0 \times 10^{-4}$  [s]とした。

粘性減衰は、2.1 節で示した初期減衰を模擬して設定している。従って、減衰比は、Table 3.1 より実験体が弾性状態で計測された 1.1%の値を用いる。

解析ケースは、Table 3.3 のように実施した。試験体が、ほぼ一質点の動的特性であることから、従来の Rayleigh や剛性比例型減衰モデルでも十分な精度で検討可能<sup>3-17)-3-19)</sup>であるが、ここでは、新たな減衰モデルの精度検証を目的としているため、二つの因果減衰と拡張 Rayleigh 減衰モデルで検討する。また、減衰マトリクスの作成時において、剛性マトリクスを初期型と瞬間型を用いて比較する。また、いずれの減衰モデルにおいても上限振動数は  $f_{lim} = 150$  [Hz]としており、1 次モードの振動数 13.3 [Hz]に対して、 $0.09f_{lim}$ 程度となるような値であり、より減衰率が一定となる範囲内で設定されている。

Table 3.3 Analysis case

	Damping type		Freaquency [Hz]
CasuT	Causal (9 term)	Tangent	$f_{lim} = 150.0$
CausI	Causal (9 term)	Initial	
ERayT	Extended Rayleigh (middle accuracy)	Tangent	
ERayI	Extended Rayleigh (middle accuracy)	Initial	

### 3.2.2 解析結果

結果は Table 3.4～Table 3.13 に、加速度時刻歴、加速度応答スペクトル、変位時刻歴及び変位—加速度関係を示している。黒実線が実験結果で、赤実線が解析結果であり重ね描いている。時刻歴は、応答が大きく発生する時刻である 2.0～6.0 [s]に着目して表示している。加速度応答スペクトルは減衰比を 5.0[%]で表示している。

Run1（弾性レベル）～Run3（弱～中程度の非線形レベル）までは、いずれの減衰モデルにおいてもほとんど同等の結果であり、また実験結果をよく再現していることが確認できる。

Run4 から解析結果に違いが確認できる。瞬間型と初期型で差が出ており、瞬間型は初期型よりも変位が大きく評価されている傾向である。また、実験結果よりも大きく生じている。

さらに、Run5 では明確に違いが確認できるが、瞬間型では 2.5 [s]を超えたあたりから、加速度及び変位の時刻歴で、周期が長くなっているような応答となっており、この時刻付近で耐震壁の耐力に達したものと考えられる。変位と加速度の関係からも、解析結果では、変位が 20 [mm]以上振り切れている結果が確認される。なお、実験結果では、変位時刻歴センサーの限界により、20[mm]以上は正確に計測されていないので、実験で生じた変位については不明である。一方で、初期型では、特に加速度及び変位共に、4.0[s]付近まで実験結果をよく再現できている。ただし、実験においては、4.0[s]以降で周期が長くなっており、その時刻付近で耐力に達しているが、解析においては、実験のように周期が長くないので大きく損傷していないと考えられる。あと、瞬間型及び初期型ともに、因果減衰と拡張 Rayleigh 減衰を比較すると、因果減衰の方が、変位が大きく評価される傾向が確認された。これは、因果減衰では、剛性比例型減衰と同じように、振動数が低次側にシフトすると、減衰比が 0 の方向になるのに対して、拡張 Rayleigh 減衰では、Rayleigh 減衰と同様に、低次側になると質量項の影響により逆比例で減衰比が大きくなる。この影響が一つ考えられる。

Table 3.4 Time history results in Run1

	Accelation	Acc. response spectrum
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.5 Time history results in Run1

	Displacement	Disp. - Acc.
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.6 Time history results in Run2D

	Accelaration	Acc. response spectrum
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.7 Time history results in Run2D

	Displacement	Disp. - Acc.
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.8 Time history results in Run3

	Acceleration	Acc. response spectrum
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.9 Time history results in Run3

	Displacement	Disp. - Acc.
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.10 Time history results in Run4

	Accelaration	Acc. response spectrum
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.11 Time history results in Run4

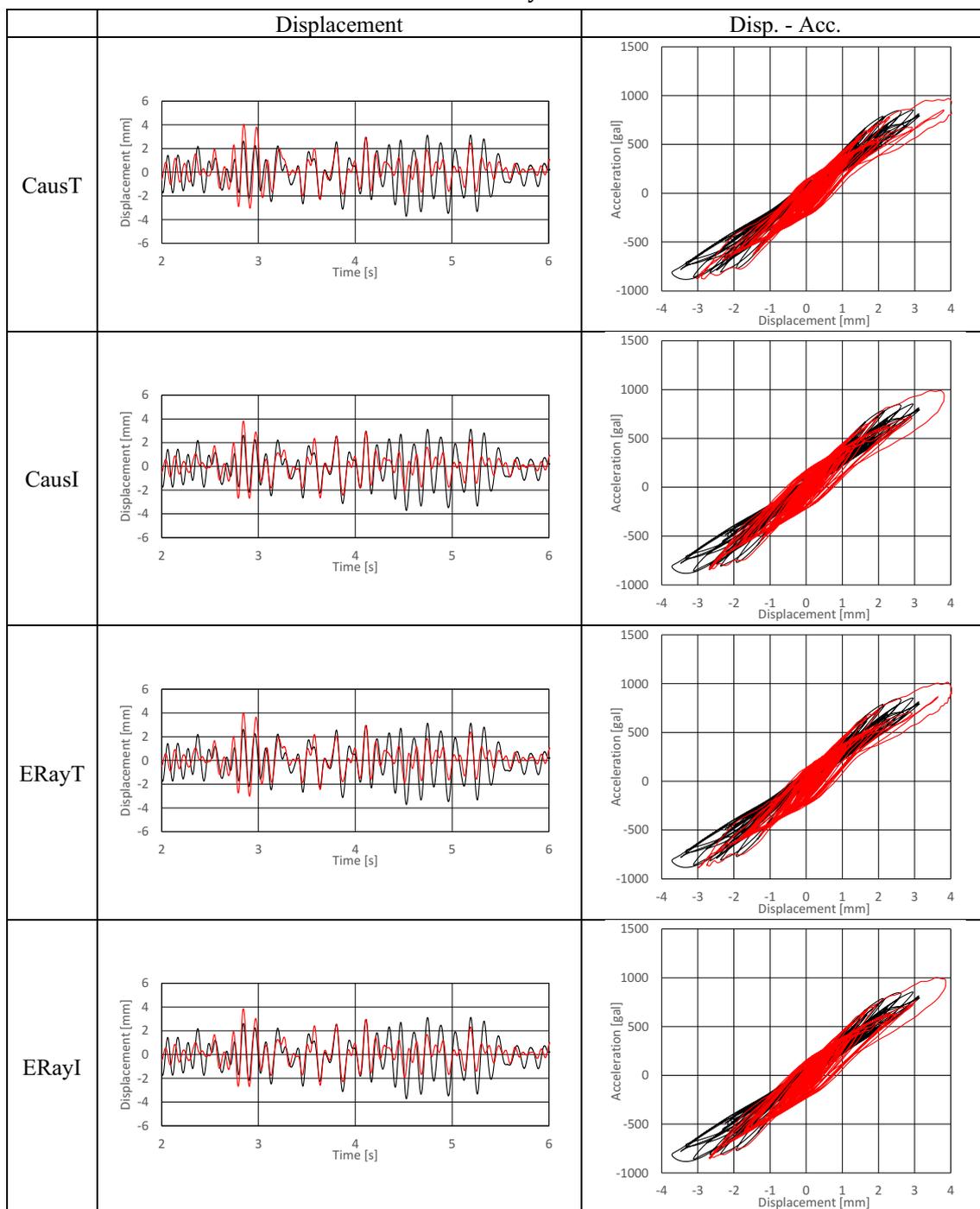
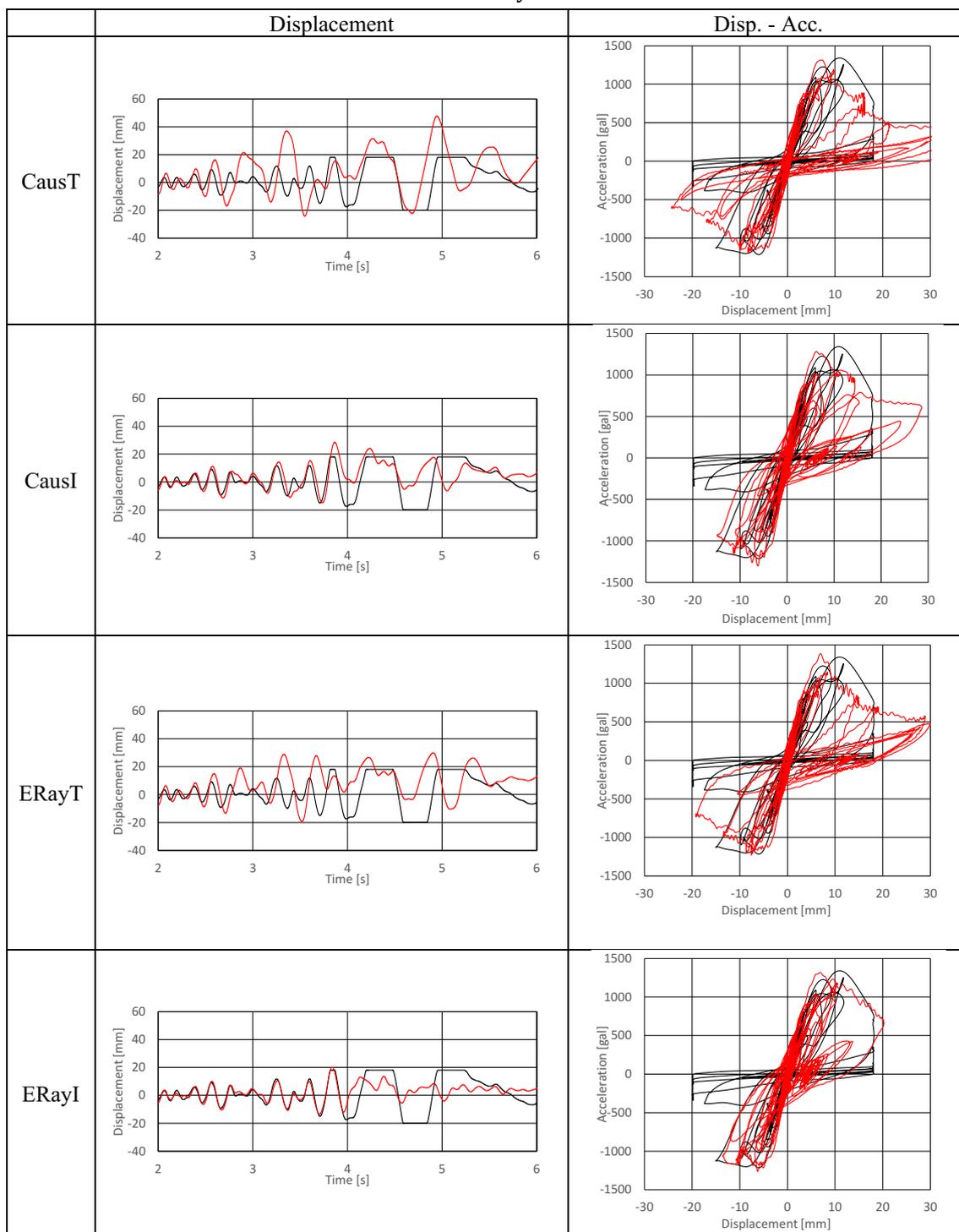


Table 3.12 Time history results in Run5

	Acceleration	Acc. response spectrum
CausT		
CausI		
ERayT		
ERayI		

Table 3.13 Time history results in Run5



### 3.3 3章のまとめ

本章では、長沼らによって提案された 3DFE モデルに適用可能なコンクリートモデルを説明した。さらに、動的加振実験を対象とした、鉄筋コンクリート構造物の非線形解析を実施し、因果性に基づく減衰モデルの性能について確認した。

鉄筋コンクリートの非線形問題に対して、因果性に基づく減衰モデルは、弾性レベルから、せん断変形角が  $4000\mu$  程度までの強非線形レベルまで、実験結果を良好に再現することが出来た。

弾性レベルから強非線形レベルまで、一貫して弾性時の減衰比で検討し良好な結果が得られたことから、初期減衰の考え方で粘性減衰の設定を行うことについて、妥当性のある方法と考えられる。

また、減衰マトリクスの作成時において、初期型と瞬間型があるが、瞬間型では、初期型の解析結果や実験結果よりも損傷が大きく、構造健全性の評価としては、安全側に検討できることが確認された。既往の知見においても、塑性後の粘性減衰については、塑性による減衰（履歴減衰）が主体となり極力影響を小さくするべきとの主張<sup>3-20)</sup>があり、今回の結果においてもその主張と合致した。

従って、建屋の構造的な健全性を評価するにあたり、因果性に基づく減衰モデルに対しては瞬間型を採用することが推奨される。ただし、初期型についてもかなり精度よく実験結果を再現していること、さらに加速度応答については損傷していない分、瞬間型に比べ大きめに評価されていることから、選択肢から排除するものではない。

本結果は、減衰の設定だけでなく、モデル化や構成則の種類によって大きく応答結果に影響があるので、初期型を使用する場合は瞬間型よりも損傷が低減される傾向であることに留意する必要がある。

### 3章の参考文献

- 3-1) 土木学会：コンクリート標準示方書[設計編], 2012
- 3-2) Maekawa, K., Pimanmas, A. and Okamura, H. : Nonlinear Mechanics of Reinforced Concrete, Spon Press, London, 2003
- 3-3) 長沼一洋, 佐藤裕一：鉄筋コンクリートの非線形有限要素法, 京都大学学術出版会, 2023.6
- 3-4) アーク情報システム: TDAPIII 理論説明書バージョン 3.14, 2022.8
- 3-5) 福浦尚之, 前川宏一: 非直交する独立 4 方向ひび割れ群を有する平面 RC 要素の空間平均化構成則, 土木学会論文集, No.634/V-45, pp.177-195, 1999.11
- 3-6) Naganuma, K., Kurimoto, O., Eto, H.: FINITE ELEMENT ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE WALLS SUBJECTED TO REVERSED CYCLIC AND DINAMIC LOADS, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 544, pp.125-132, 2001.6 (in Japanese)  
長沼一洋, 栗本修, 江戸宏彰：鉄筋コンクリート壁体の FEM による正負繰返し及び動的解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 544 号, pp.125-132, 2001.6
- 3-7) Kupfer, H. B., Gerstle, K. H.: Behavior of Concrete under Biaxial Stress, Proc. of the ASCE, Vol.99, No.EM4, pp.853-866, 1973.8
- 3-8) Naganuma, K.: STRESS-STRAIN RELATIONSHIP FOR CONCRETE UNDER TRIAXIAL COMPRESSION, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 474, pp. 163-170, 1995.8 (in Japanese)  
長沼一洋：三軸圧縮下のコンクリートの応力～ひずみ関係, 日本建築学会構造系論文集, 第 474 号, pp.163-170, 1995.8
- 3-9) Naganuma, K., Ohkubo, M.: AN ANALYTICAL MODEL FOR REINFORCED CONCRETE PANELS UNDER CYCLIC STRESSES, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 536, pp.135-142, 2000.10 (in Japanese)  
長沼一洋, 大久保雅章：繰返し応力下における鉄筋コンクリート版の解析モデル, 日本建築学会構造系論文集, 第 536 号, pp.135-142, 2000.10
- 3-10) 出雲淳一, 島弘, 岡村甫：面内力を受ける鉄筋コンクリート板要素の解析モデル, コンクリート工学論文, No. 87.9-1, pp.107-120, 1987.9
- 3-11) 長沼一洋, 山口恒雄：面内せん断応力下におけるテンションスティフニング特性のモデル化, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.649-650, 1990.10
- 3-12) Naganuma, K.: NONLINEAR ANALYTICAL MODEL FOR REINFORCED CONCRETE PANELS UNDER IN-PLANE STRESSES, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), No. 421, pp.39-48, 1991.3 (in Japanese)  
長沼一洋：平面応力場における鉄筋コンクリート板の非線形解析モデル, 日本建築

- 学会構造系論文集, 第 421 号, pp.39-48, 1991.3
- 3-13) 日本建築学会：建築構造における強非線形問題への数値解析による挑戦, 応用力学シリーズ 13, 2018.3
- 3-14) Ristic, D., Yamada, Y., Iemura, H., Petrovski, J.: NONLINER BEHAVIOUR AND STRESS-STRAIN BASED MODELING OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURE UNDER EARTHQUAKE INDUCED BENDING AND VARYING AXIAL LOAD, Research Report No.88-ST-01, School of Civil Engineering, Kyoto University, pp.137-146, 1988.9
- 3-15) OECD/NEA/CSNI: Seismic Shear Wall ISP NUPEC's Seismic Ultimate Dynamic Response Test - Comparison Report, NEA/CSNI/R (96)10, OECD/GD (96)188, 1996
- 3-16) 市原義孝, 中村尚弘, 森谷寛, 堀口朋裕, 崔炳賢：鉄筋コンクリート耐震壁に対する等価線形解析の適用性検討－原子炉建屋耐震壁終局応答試験の三次元有限要素法シミュレーション解析－, 日本原子力学会和文論文誌, Vol.21, No.1, 2022.2,  
<https://doi.org/10.3327/taesj.J20.03>
- 3-17) 石田貴之, 太田成, 伊藤晶, 市川大真, 小野英雄：鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 1 TDAPIII の RC 非線形構成則, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.205-206, 2023.7
- 3-18) 伊藤晶, 太田成, 小野英雄, 市川大真, 石田貴之：鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 2 静的加力試験の再現解析, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.207-208, 2023.7
- 3-19) 太田成, 伊藤晶, 小野英雄, 市川大真, 石田貴之：鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 3 動的加振試験の再現解析, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.209-210, 2023.7
- 3-20) Priestley, M. J. N., Grant, D. N.: VISCOUS DAMPING IN SEISMIC DESIGN AND ANALYSIS, Journal of Earthquake Engineering, vol. 9, no. sup2, 2005.1



## 第4章

# 実規模モデルを対象とした線形問題の

# 3方向同時入力による地震応答解析

### 4.1 日本の原子力発電所施設について

日本の原子力発電所施設の安全性の確認として、詳細な検討が可能な 3DFE モデルを用いられることが多い<sup>(例えば 4-1)</sup>。特に現状では、建屋、機器及び配管を対象に、設計時の想定以上の地震動が発生するリスクが否定できないため、確率論的リスク評価 (PRA) に基づく脆弱性評価を行うことが望まれている<sup>4-2)</sup>。脆弱性評価とは、地震の強さごとに、建屋、機器及び配管等の条件付損傷確率を算出するものである。強非線形領域における、建屋の応答をより現実的な挙動で把握する必要がある。そのため、建屋のモデルは、従前では質点系モデルが用いられていたが、より精緻に評価が可能な FE モデルが用いられるよう<sup>4-3)</sup>になってきた。

3DFE モデルによる検討の需要や必要性を踏まえ、実規模モデルとして仮想の原子力発電所を対象に FE モデルを作成し検討する。

日本の原子炉の形式としては、大別すると沸騰水型 (Boiling Water Reactor、略称 BWR) と加圧水型 (Pressurized Water Reactor、略称 PWR) の二種類ある。建屋の構造形式としては壁式構造であるが、形状が異なっており大きな特徴として、BWR 系では建物全体がボックス型であり、PWR 系では建屋の中心部がドーム型の構造物を有している。構造種別では、両者ともに、主要な部分については鉄筋コンクリート構造であり、一部の大空間については鉄骨構造が採用されている。ここでは、Fig. 4.1 のような PWR 系の構造物を参考<sup>4-4)</sup>とした。

PWR 系の原子炉建屋(R/B)は複数の構造物で構成されており、中心部のドーム状の構造物を外部遮蔽建屋 (O/S: Outer Shielding wall)、発電に必要な原子炉等の設備を支持及び遮蔽する部分である内部コンクリート (I/C: Inner Concrete structure)、O/S の外側に取りついている原子炉周辺建屋 (RE/B: Reactor Enclosure Building) 及び使用済みの燃料を冷却する

ために、鉄骨造で大空間を実現した燃料取扱建屋（FH/B: Fuel Handling Building）等から構成される。日本の原子力規制委員会の公開されている審査資料<sup>4-5)</sup>や電力会社の公開資料<sup>4-6)</sup>を調査すると、これらの構造物において、低次側の固有振動数では、FH/B が最も小さく1.7[Hz]程度で、次いで主要な構造体であるO/Sが5.0 [Hz]程度である。

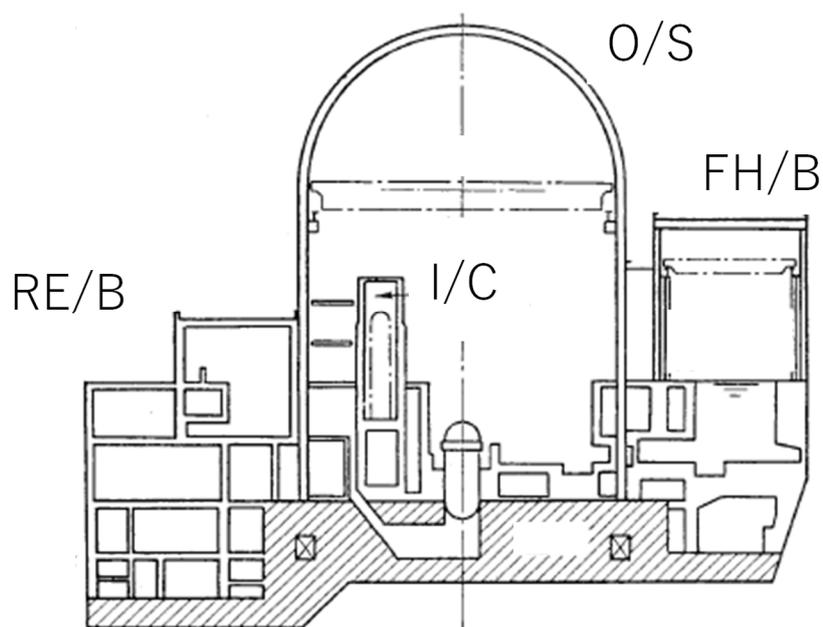


Fig. 4.1 Example of PWR nuclear power plant

## 4.2 解析モデルの概要

### 4.2.1 解析モデル

4.1 節に示した原子力発電所の特徴を参考に、Fig. 4.2 ように仮想原子力発電所の解析モデルを作成した。ここでは、減衰モデルの比較を行うことを目的としているので、簡易に鉄筋コンクリート部分である O/S、RE/B 及び鉄骨部分の FH/B をモデル化した。平面的な規模は、建屋全体を 75.0 [m]×100.0 [m]とし、O/S の直径を 40.0 [m]とした。RE/B 部分の基本的なスパンは、7.5[m]としている。立面的には、O/S 及び FH/B の最頂部の高さは、63.5 [m]及び 38.5 [m]とし、RE/B 部分の基本的な階高を 7.0 [m]とし、最も高い所では5階建とした。

要素は、鉄筋コンクリート部分である床及び壁については積層シェル要素、基礎版をソリッド要素、及び鉄骨部分については梁要素（トラス要素も含む）でモデル化した。

解析モデルの規模は、節点数が 2385、要素数が 3586 である。メッシュサイズについては、最大で 6.0 [m]程度となっている。このメッシュサイズとした理由としては、今回の検討では、モード減衰の解析を実施しており、現実的な計算時間で結果を得るためにメッシュサイズを粗くした。

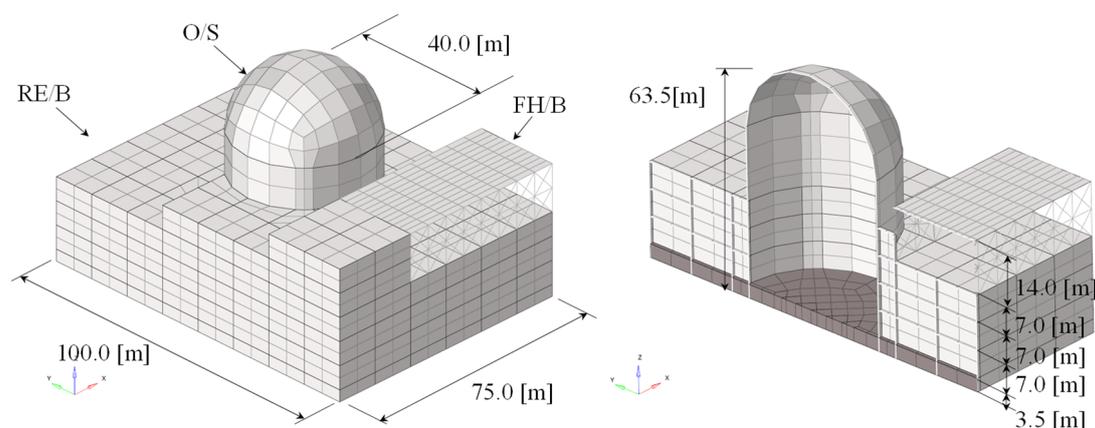


Fig. 4.2 Analytical model of virtual nuclear power plant (coarse mesh)

低次側の振動数が、前節に示した固有振動数に極力合うように剛性や質量を調整している。Table 4.1 に示すように、壁及び床の厚さとしている。また、FH/B 部分の鉄骨部材の断面積の諸元は、Table 4.2 に示す。

Table 4.1 Thickness of reinforced concrete members

		Thickness [m]
O/S	Cylinder	1.4
	Doom	0.8
RE/B	Inner wall	0.8
	Outer wall	1.4
	Slab	0.6
FH/B	Top slab	0.25

Table 4.2 Cross-sectional parameter of steel members

	A [m <sup>2</sup> ]	I [m <sup>4</sup> ]
Column	$6.00 \times 10^{-2}$	$1.37 \times 10^{-2}$
Girder	$8.00 \times 10^{-2}$	$2.74 \times 10^{-2}$
Brace	$2.38 \times 10^{-2}$	-

各部位の質量密度については、Table 4.3 に示すように設定した。壁は鉄筋コンクリートの質量密度で設定し、床、基礎版及びドーム部分については機器荷重や積載荷重等を仮定して重めに設定している。

Table 4.3 Mass density

		Mass density [ton/m <sup>3</sup> ]
O/S	Cylinder	2.35
	Doom	4.70
RE/B	Inner wall	2.35
	Outer wall	2.35
	Slab	3.53
FH/B	Top slab	2.82
	Steel	7.85
Foundation		3.53

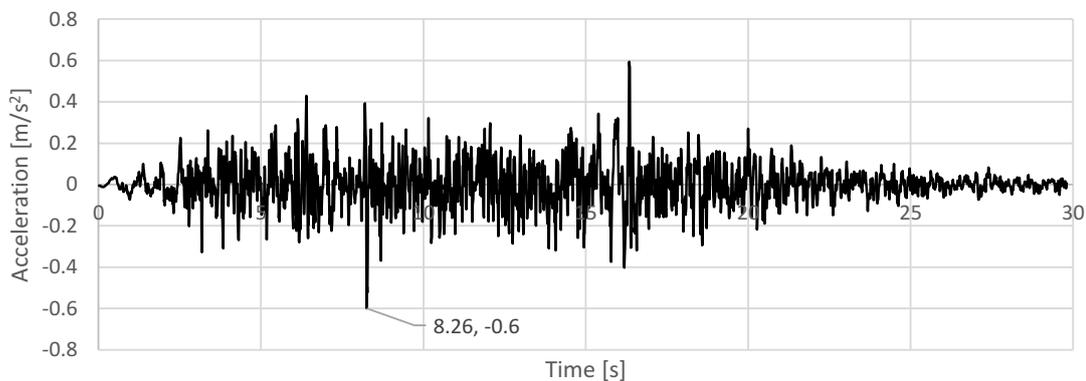
本章では、線形弾性で検討している。設定した弾性係数とポアソン比を Table 4.4 に示す。

Table 4.4 Material property values

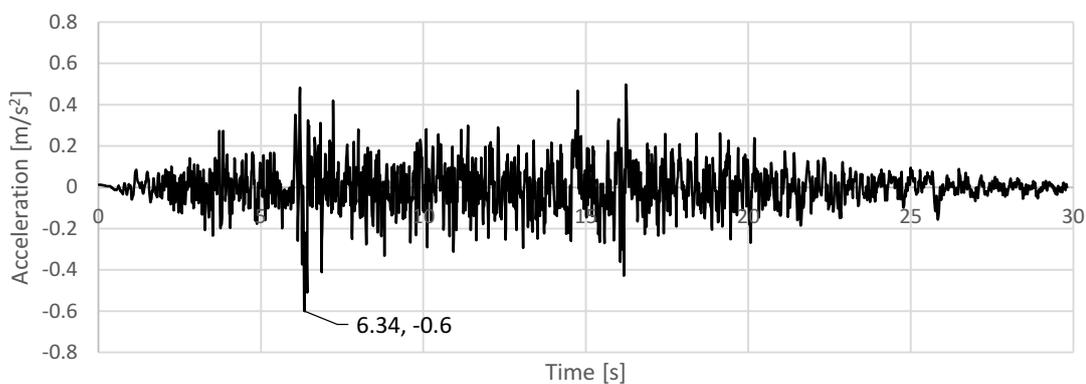
		Elastic modulus [GPa]	Poisson's ratio [-]	Remarks
RC	Concrete	$2.36 \times 10^1$	0.2	Equivalent to Fc27
	Rebar	$2.05 \times 10^2$	0	
Steel		$2.05 \times 10^2$	0.3	

支持条件としては、基礎下を固定とした。

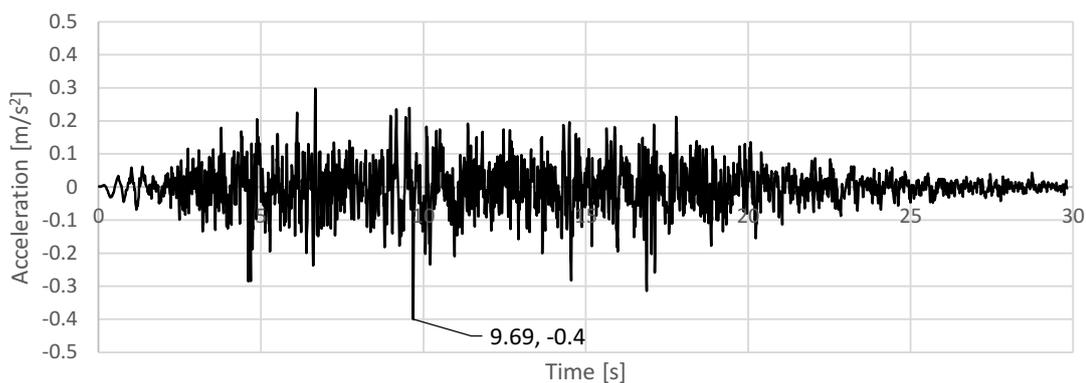
荷重としては、一様地震力として、Fig. 4.3 のような三方向に地震動を入力している。この地震動は、標準応答スペクトルにフィッティングした人工的な模擬波である。波の時間刻みは 0.01 [s] であり、継続時間は 29.81 [s] である。Fig. 4.4 に、減衰比を 3% とした入力地震動の加速度応答スペクトルを示す。また、Fig. 4.5 には入力地震動における、各方向のオービットを示している。



(a) X 方向



(b) Y 方向



(c) Z 方向

Fig. 4.3 Input seismic motion

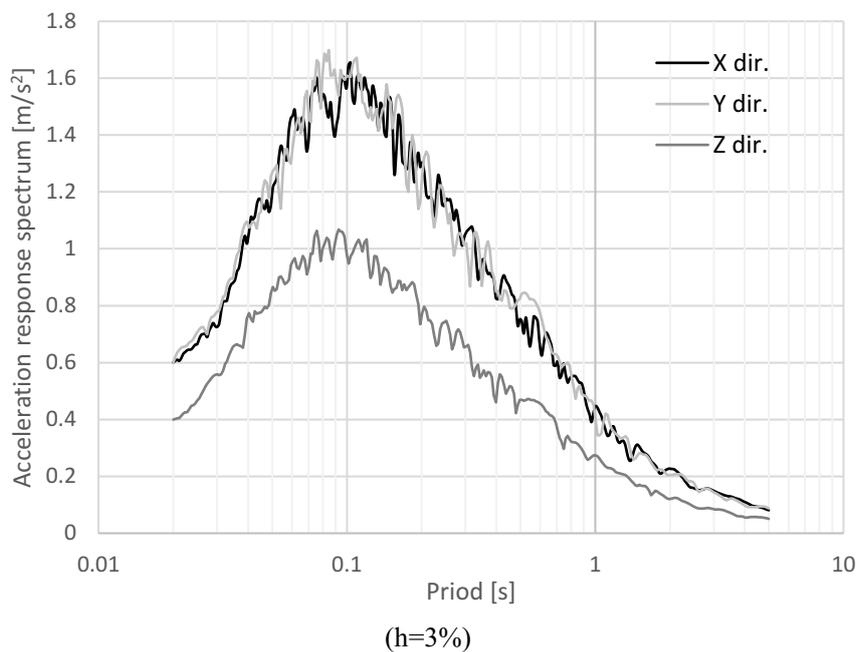
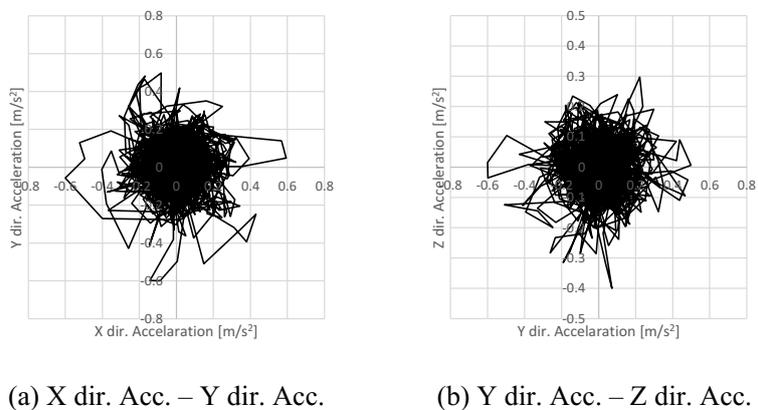
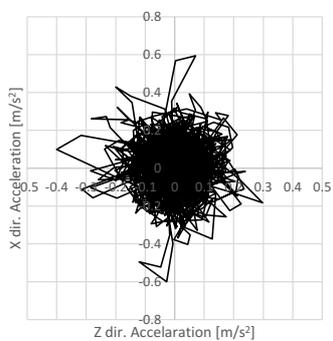


Fig. 4.4 Acceleration response spectrum of input seismic motion



(a) X dir. Acc. - Y dir. Acc.

(b) Y dir. Acc. - Z dir. Acc.



(c) Z dir. Acc. - X dir. Acc.

Fig. 4.5 Orbit of input seismic motion

#### 4.2.2 モデルの固有振動数と固有モード

4.2.1 項で作成した解析モデルに対して、実固有値解析を実施した。

累積の有効質量比の結果を Fig. 4.6 に示し、低次側の固有モードを Fig. 4.7 に示す。最も低次の振動数は、1.79 [Hz] となり、有効質量比としては小さいが、FH/B 部分で、Y 方向に振れる固有モードが表れていることが確認できる。低次側の振動数で有効質量比が大きい振動数は 5.67 [Hz] となり、中心部分の O/S が X 方向に振れる固有モードとなっている。概ね、4.1 節に示した実プラントのような固有振動数が再現できていることが確認できる。

累積の有効質量比の結果を確認すると、X 方向及び Y 方向については、12.0 [Hz] 程度で過半を超えているが、Z 方向については、25.0 [Hz] 程度を超えて、ようやく過半に達していることが確認できる。FE モデルでは、多数の固有モードが存在するため、徐々に累積の有効質量比が上昇する。今回のモデルでは、30 [Hz] 以降に達すると、どの方向も緩やかに上昇している。

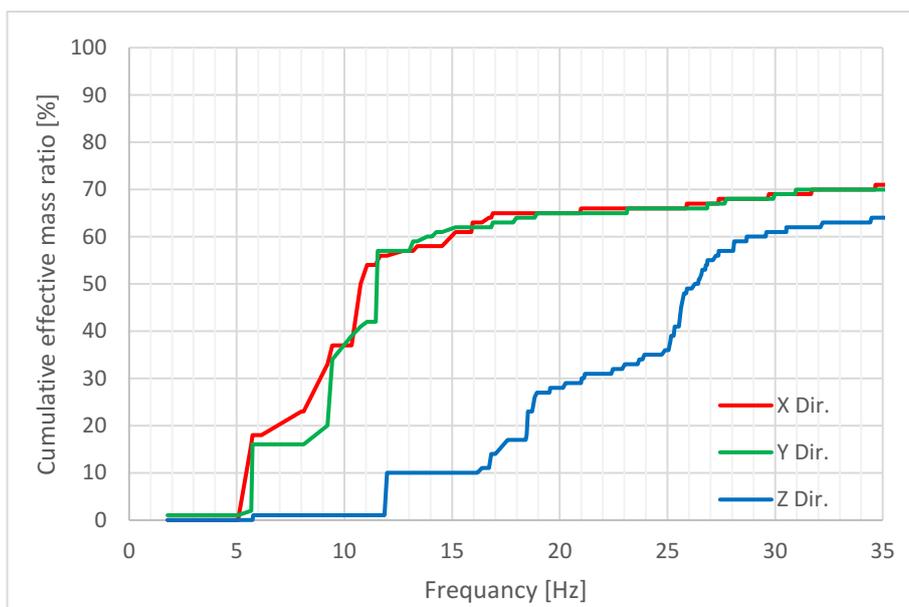
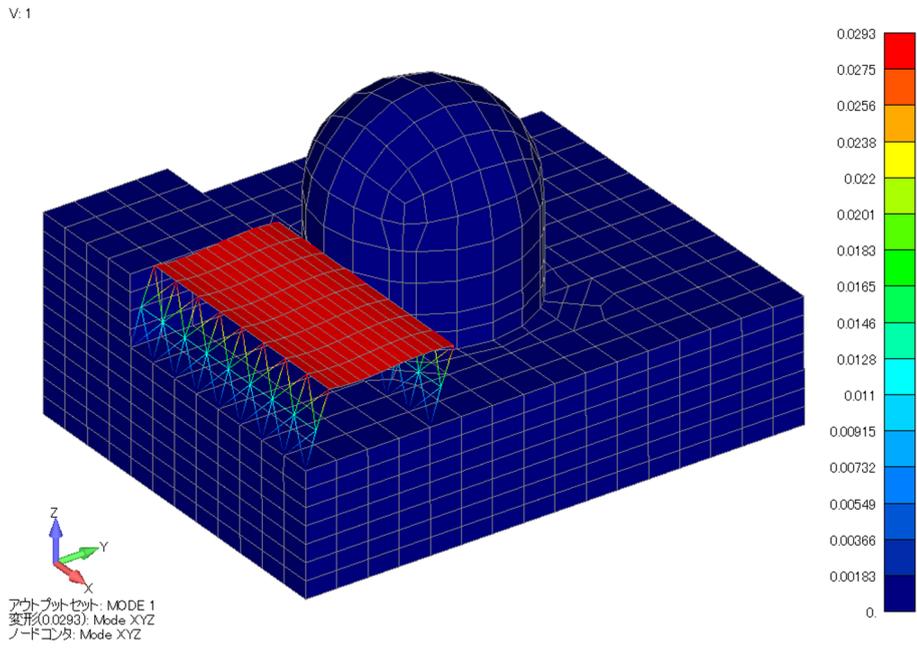
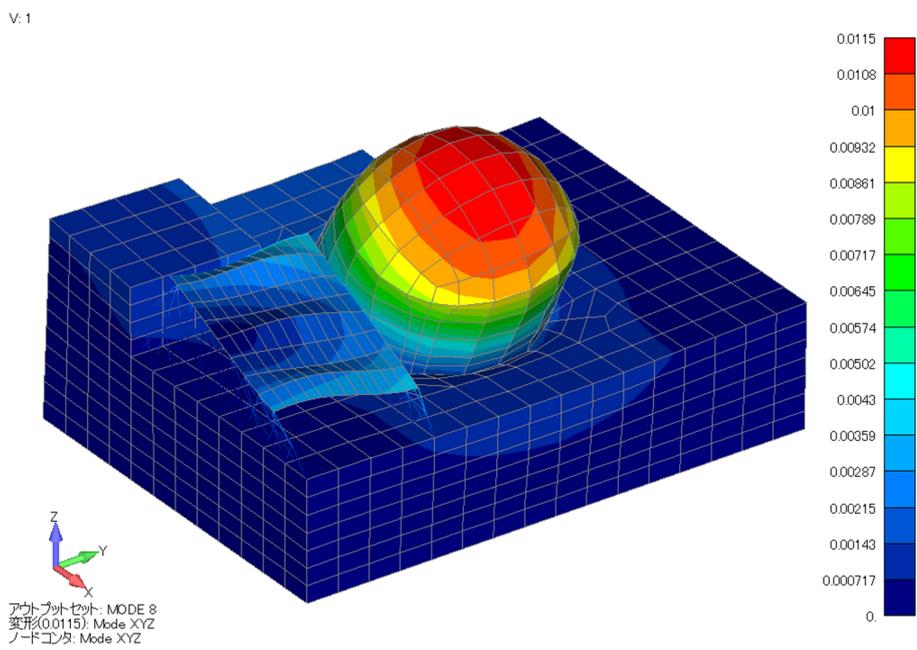


Fig. 4.6 Cumulative effective mass ratio results



(a) Lowest eigenmode (1.79 [Hz] in Y direction mode)



(b) Eigenmode with large effective mass ratio at low frequency (5.67 [Hz] in X direction mode)

Fig. 4.7 Eigenmode

### 4.3 解析条件

ここでは、動的解析を実施しており、時間積分手法は Newmark- $\beta$  法とする。 $\beta$  及び  $\delta$  は、数値安定性の確保と数値減衰が生じないように、平均加速度法の  $\beta = 0.25$  及び  $\delta = 0.5$  とする。また、解析時間刻みは、 $2.0 \times 10^{-3}$  [s] とした。

比較検討した減衰モデルのケースを Table 4.5 に示す。減衰比はいずれも  $\xi_{aim} = 0.03$  としている。

Table 4.5 Analysis case

	Damping type	Frequency [Hz]
Mod	Modal	-
Caus	Causal (9 term)	$f_{lim} = 35.0$
ERay	Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 35.0$
Ray1	Rayleigh	$f_1 = 1.79, f_2 = 30.0$
Ray2	Rayleigh	$f_1 = 5.67, f_2 = 30.0$

Mod は、2 章の検討と同様に、振動数で一定の減衰比を用いることが可能であることから目標とするケースとした。なお、固有値解析が可能な範囲で 100 [Hz] 程度の固有モードを考慮して検討している。Caus 及び ERay は、因果性に基づく減衰モデルであり、Ray1 及び Ray2 は従来の減衰モデルである。

評価対象の振動数帯は、固有値解析の結果から低次側では、最も低次の 1.79 [Hz] 及び、有効質量比が比較的大きい低次側の 5.67 [Hz] とした。高次側では、Z 方向の累積有効質量比が過半を超えることと、原子力施設の機器評価の振動数帯が上限振動数で 20 ~ 30 [Hz] であることから 30.0 [Hz] と設定する。

Caus 及び ERay のケースで、 $f_{lim}$  の設定については、2 章に示した減衰比が一定となる範囲から決定している。最も低次側である 1.79 Hz が一定の減衰比の範囲内に収まるように、 $0.04 \sim 0.05 f_{lim} = 1.79 \rightarrow f_{lim} = 35.8 \sim 44.8$  [Hz] となり 35.0 [Hz] とした。ちなみに、高次側の 30.0 [Hz] については、Caus では  $0.95 f_{lim} = 33.3$  [Hz]、ERay では  $0.95 f_{lim} = 30.1$  [Hz] であるので、30.0 [Hz] までは一定の減衰比の範囲内には収まっていることが分かる。

Fig. 4.8 に、各減衰モデルの振動数と減衰比の関係を示す。図中では、評価振動数を 1.79 [Hz] から 30.0 [Hz] で表示している。

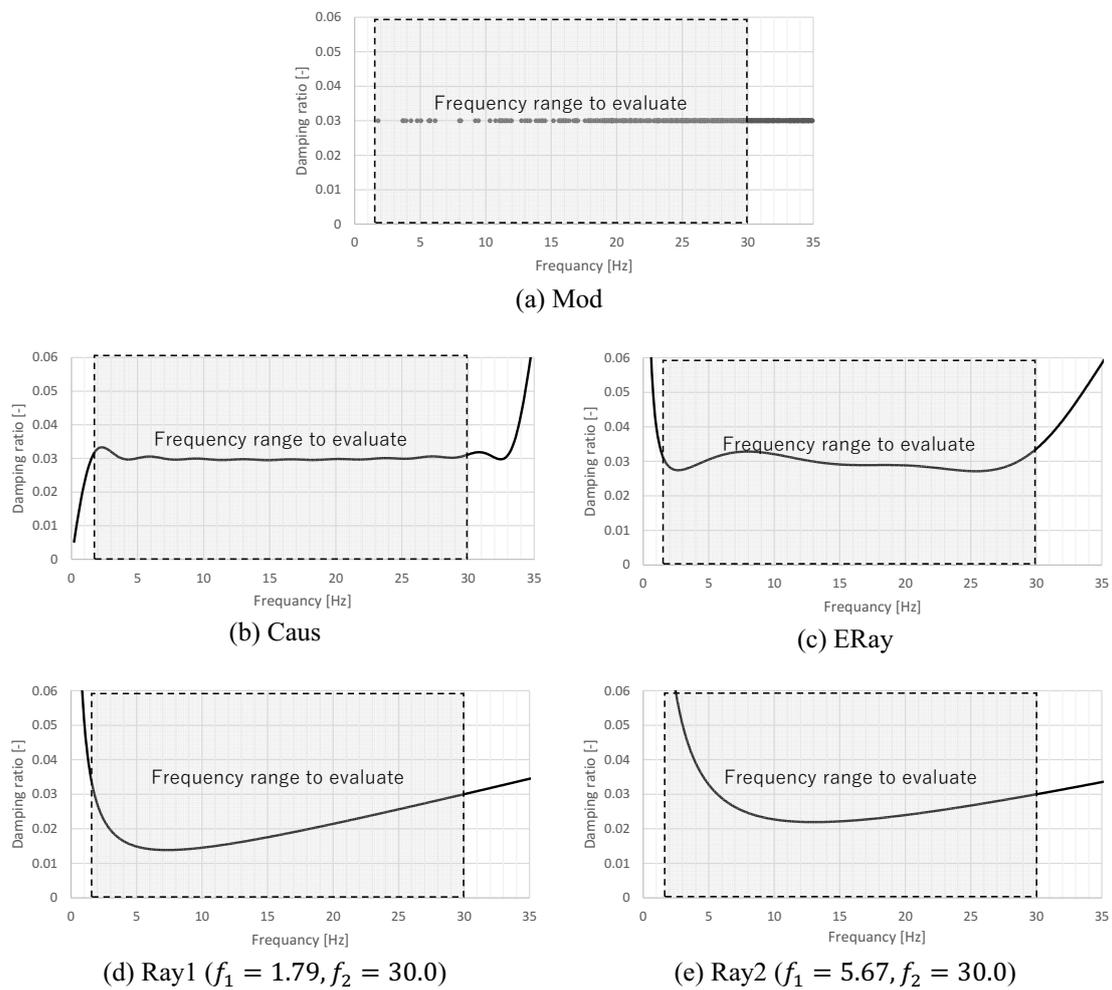


Fig. 4.8 Damping rate for each case

## 4.4 解析結果

### 4.4.1 結果と考察

Fig. 4.9 及び Fig. 4.10 に、Mod（モード減衰）の結果で、最大合成変位と最大合成加速度の分布を示す。続いて、Fig. 4.11 及び Fig. 4.12 に、目標となる Mod の結果に対する比率で、他の減衰モデルの結果を示している。コンターが青く表示されているほど、Mod よりも応答が大きく、赤く表示されていれば小さく、緑に表示されていれば、同等の応答で目標とする値になっていることを意味する。

Caus（因果減衰）と ERay（拡張 Rayleigh 減衰）は、最大合成変位及び最大合成加速度共に、応答が Mod の結果とよく一致している。

Ray1（Rayleigh 減衰）は、 $f_1 = 1.79$  [Hz],  $f_2 = 30.0$  [Hz] としているので、その振動数の間の減衰比がかなり過小評価されており、最大合成変位及び最大合成加速度ともに、Mod よりも大きくなっている。

Ray2（Rayleigh 減衰）は、 $f_1 = 5.67$  [Hz],  $f_2 = 30.0$  [Hz] なので、5.67 [Hz] よりも低次側の振動数については減衰率が過大評価となっており、FH/B の変位が 1.79 [Hz] のモードに影響があるため、最大合成変位が Mod よりもかなり小さくなっている。なお、最大合成加速度については応答が大きくなっているが、これは、低次の振動数 1.79 [Hz] の影響より、高次側の振動数（5.67 [Hz]～30.0 [Hz]の間）の影響によって、応答が Mod よりも大きく発生したものと考えられる。

続いて、Fig. 4.13 及び Fig. 4.14 に、O/S 及び FH/B 頂部における加速度応答スペクトルの結果を示す。それぞれ X 方向、Y 方向及び Z 方向の結果を示しており、応答スペクトルの減衰比は 3% で描いている。

Mod に対して、Caus と ERay は、加速度応答スペクトルについても、1.68 [Hz]～30.0 [Hz] の間の振動数帯で、応答が精度良く一致していることが確認できる。また、2 章で示した、固有振動数の変化については、応答スペクトルのピーク位置を見る限り、ほとんど影響がないことも確認できる。

Ray1 は、1.79 [Hz] 及び 30.0 [Hz] の二点の振動数の応答は、Mod と一致しているが、2 点の振動数の間については応答がかなり大きい評価されている。

Ray2 についても Ray1 と同じで、5.67 [Hz] と 30.0 [Hz] の応答は Mod と一致している。ただし、5.67 [Hz] と 30.0 [Hz] の間は応答が大きくなっていると共に、例えば FH/B の Y 方向や Z 方向の応答では、5.67 [Hz] よりも低い振動数において応答が小さくなっていることが確認できる。

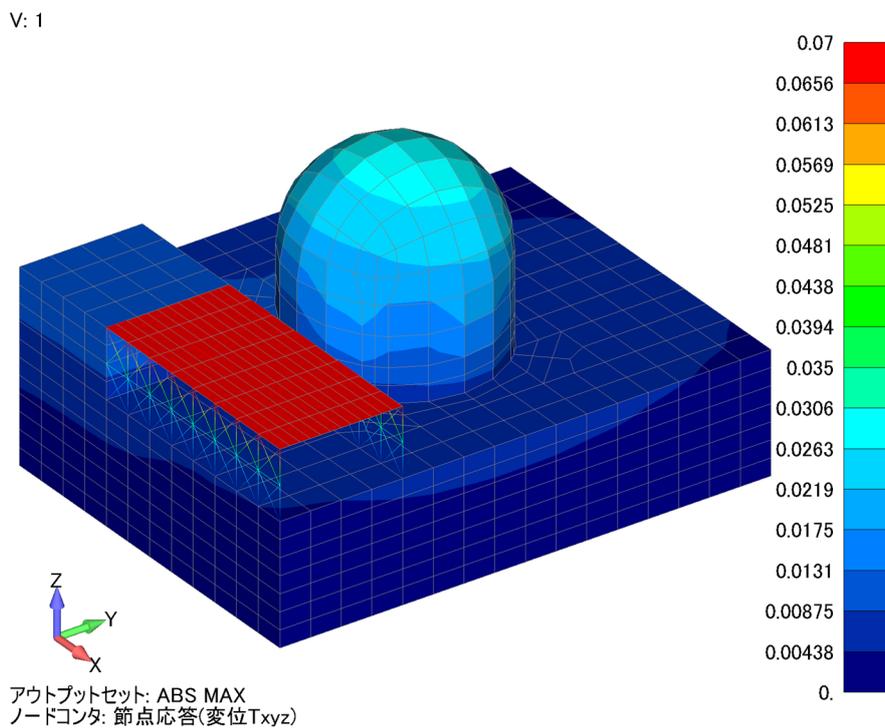


Fig. 4.9 Maximum resultant displacement

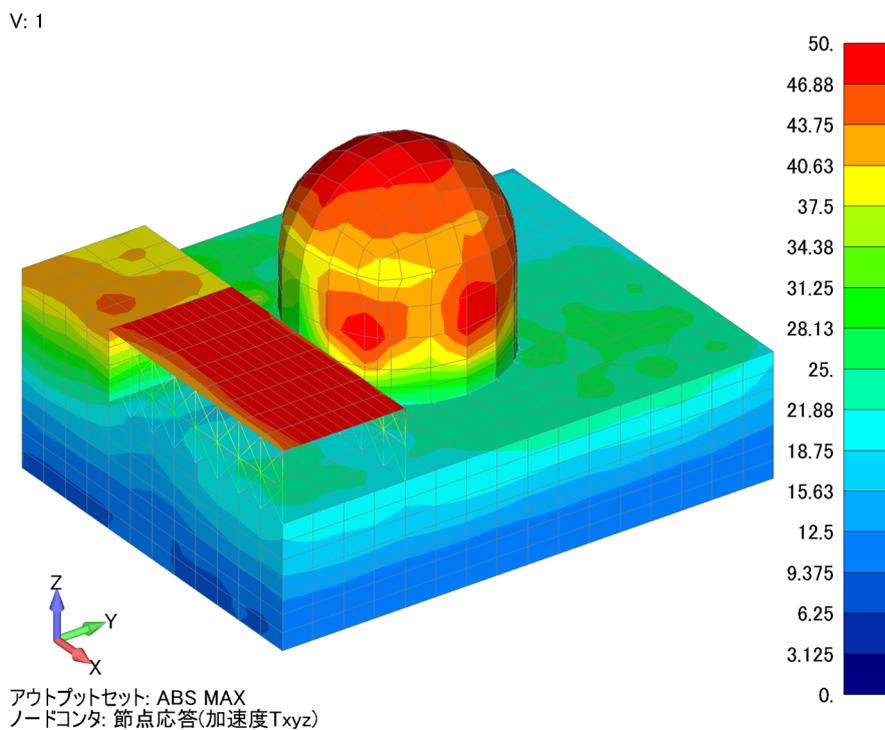


Fig. 4.10 Maximum resultant acceleration

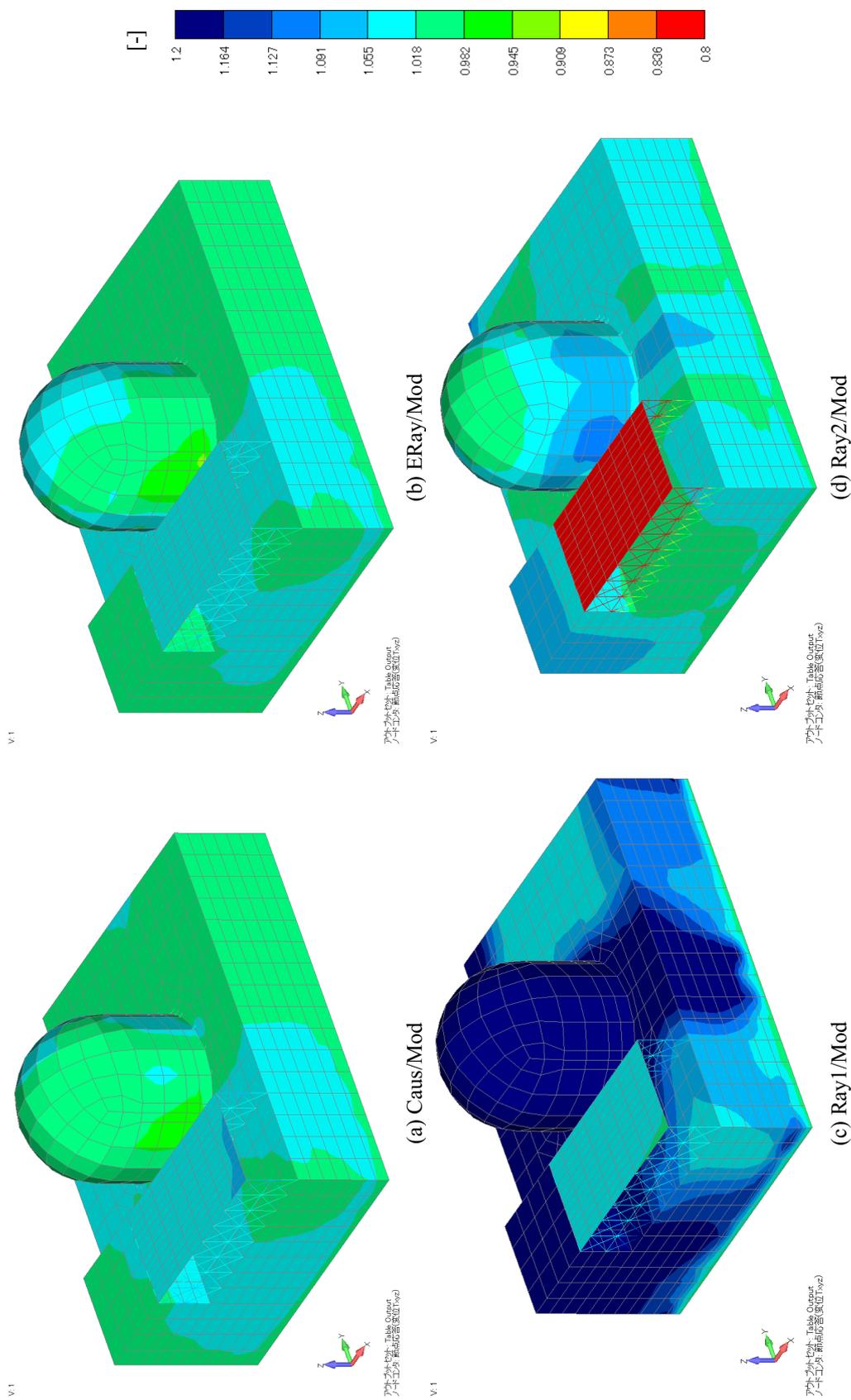


Fig. 4.11 Comparison of maximum resultant displacement

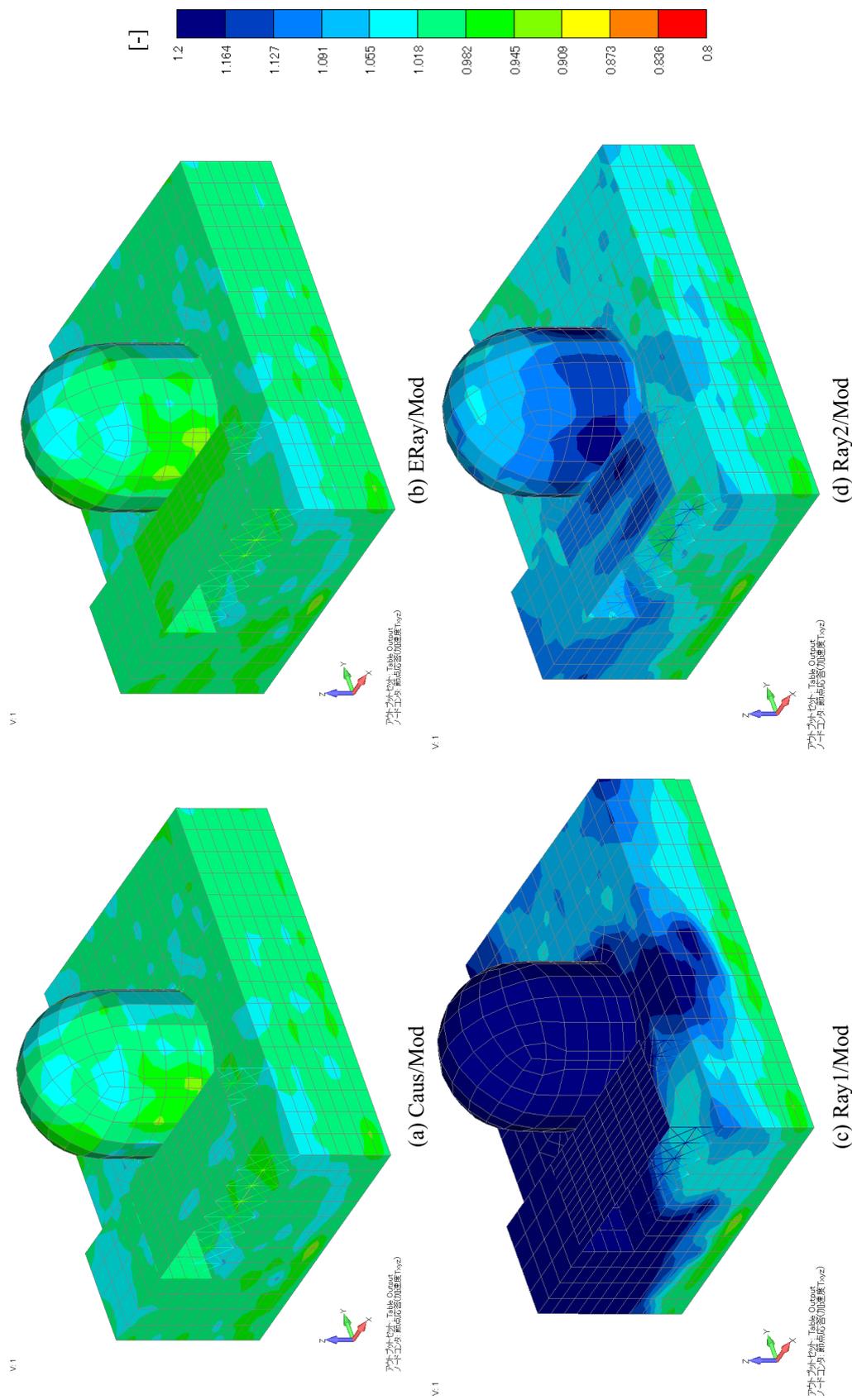


Fig. 4.12 Comparison of maximum resultant acceleration

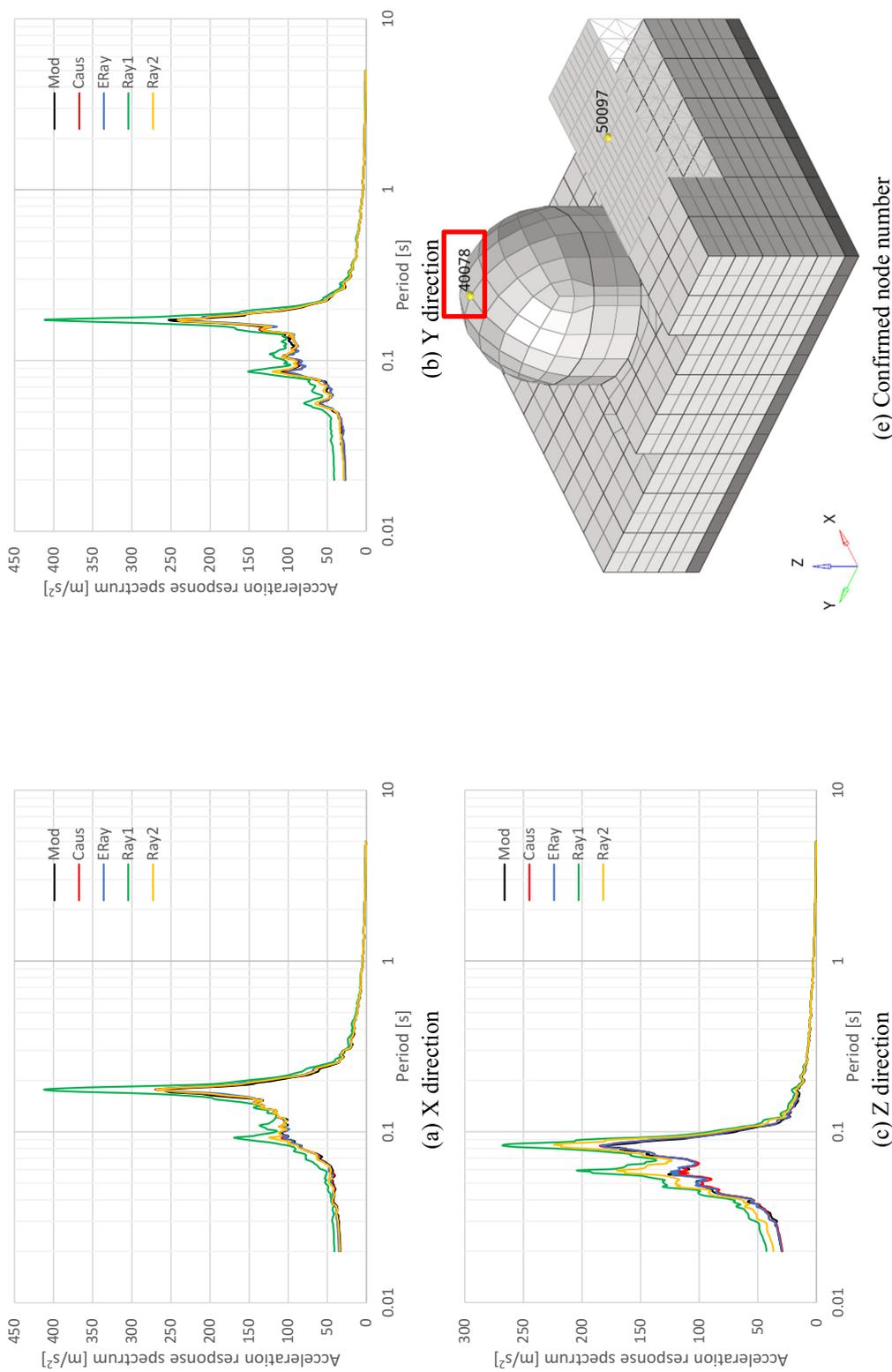


Fig. 4.13 Response acceleration spectrum at the node at the top of O/S

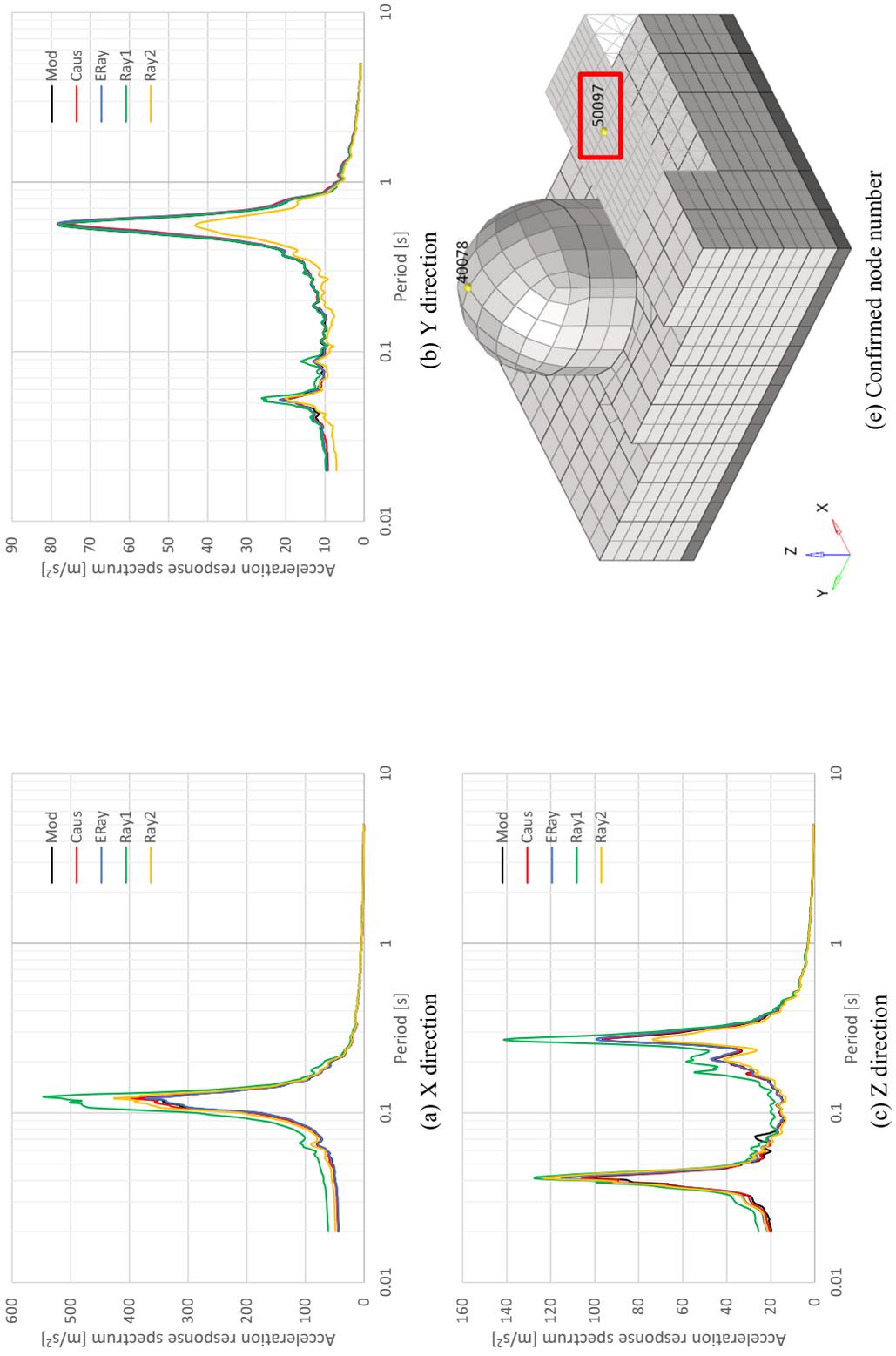


Fig. 4.14 Response acceleration spectrum at the node at the top of FH/B

#### 4.4.2 計算時間

計算時間については、Table 4.6 に示している。比較のため、いずれのケースにおいてもDSS（直接スパースソルバー）の8並列で解析を実施している。Mod（モード減衰）は、かなり計算時間を要しているが、Caus及びERayについては、Ray1及びRay2のような従来の減衰モデルとほぼ同程度の時間で計算できている。

Table 4.6 Calculation time

	Mod	Caus	ERay	Ray1	Ray2
Total time [s]	3253	349.0	331.0	263.0	265.0
Ratio <sup>※</sup>	195.73	1.33	1.26	1.00	1.01

※It is shown as a ratio with case Ray1 set as 1.0.

なお、前述の比較は動的解析のみの時間であるが、Modについてはさらに固有値解析の計算時間が必要となる。今回は、サブスペース法の固有値解析及びモード減衰の等価減衰マトリクスの作成の時間だけで48225[s]かかってしまっている。固有値解析を別の手法等に変更することで計算時間を短縮する余地はあると思われるが、非線形解析を実施した場合では、時々刻々剛性が変化するので、さらなる解析モデルが大規模になると、2章で扱ったような非線形モード減衰で検討することについては、もはや非常に困難であることが分かる。

#### 4.5 4章のまとめ

ここでは、実規模モデルとして仮想の原子力発電所を対象に、梁要素、シェル要素及びソリッド要素で構成された有限要素モデルを作成し、各減衰モデルの精度について検証を行った。

最大合成変位および最大合成加速度の結果については、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰共に、目標とするモード減衰の結果とほぼ一致し、適正な応答値が得られていることが確認できた。

また、加速度応答スペクトルにおいても、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰は、評価対象の振動数帯においても良好にモード減衰の結果と一致している。また、減衰モデルによる固有振動数の変化についても、減衰比が3%ではほとんど影響がないことが確認できた。

計算時間においては、モード減衰は、動的解析や固有値解析にかなり時間がかかっているが、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰は、従来の Rayleigh 減衰とほぼ同程度の時間で計算できていることが確認出来た。次章では、さらに規模の大きなモデルで非線形問題を扱っているが、モード減衰で検討することは非常に困難である。

以上のことから、因果性を有する減衰モデルは、大規模モデルを対象としても、減衰モデルの性能や計算時間に対して、十分な実用性を有していることが確認された。

#### 4章の参考文献

- 4-1) 東京電力ホールディングス株式会社：別紙3 3次元FEMモデルによる地震応答解析, <https://www.nsr.go.jp/data/000331948.pdf> (2023年11月確認)
- 4-2) 山田博幸, 三浦弘道, 蛭澤勝三：地震PRAにおける fragility 評価の高度化—入力地震動のサブ応答係数評価の改善及び建屋の動的非線形特性の考慮による機器の現実的応答評価手法—, 電力中央研究所報告, O18010, 2019.5
- 4-3) 中村尚弘, 鈴木琢也, 中村壮志, 綱島直彦, 秋田昇道, 中野富夫：3次元FEMによる原子力発電所建屋の強非線形域の地震時挙動と fragility 評価の試み, 竹中技術研究報告, No.64, 2008
- 4-4) 秋野金次, 山下利夫：原子力関連施設とコンクリート—原子炉建屋—, 小特集\*原子力施設とコンクリート/1.2, 1989
- 4-5) 東北電力：別紙4 地震応答解析モデルに用いる鉄筋コンクリート部の減衰定数に関する検討, <https://www.nra.go.jp/data/000317837.pdf> (2023年11月確認), p.別紙4-13
- 4-6) 四国電力：III伊方発電所3号機の耐震安全性評価, [https://www.ensc.jp/release\\_info/2009/file/houkokusho-3\\_1.pdf](https://www.ensc.jp/release_info/2009/file/houkokusho-3_1.pdf), (2023年11月確認)



## 第5章

### 実規模モデルを対象とした非線形問題の

### 3方向同時入力による地震応答解析

#### 5.1 解析モデルの概要

##### 5.1.1 解析モデル

本章ではさらに、4章で示した仮想の原子力発電所を対象に、RCの非線形材料を用いて地震応答解析を実施する。4章で用いたモデルではメッシュサイズが粗いので、細かくメッシュを分割させて検討する必要がある。ただし、実規模モデルでメッシュサイズをあまりにも細かくしてしまうと自由度数が増加し、解析時間が膨大となる。実績としては、鉄筋コンクリートの非線形解析時において、1.0~2.0[m]程度でモデル化<sup>5-1)</sup>している例がある。ここでは同様に、4章のモデルに対して、Fig. 5.1のようにメッシュサイズが2.0[m]程度以下となるようにモデルを作成した。階高方向には、4分割程度でメッシュ分割されている。

解析モデルの規模は、節点数が21047、要素数が22773である。

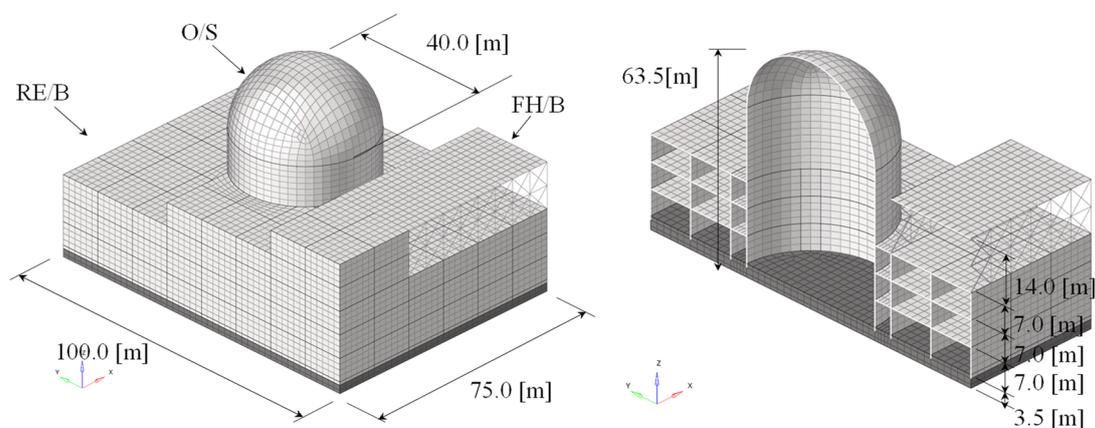


Fig. 5.1 Analytical model of virtual nuclear power plant (detailed mesh)

断面の諸条件は、4章とほぼ同じである。なお、鉄筋については、ダブル配筋で両側の鉄筋比を表 Table 5.1 に示した値で仮定し、積層シェル要素の鉄筋層の層厚を算出している。積層シェル要素は、Fig. 5.2 のように、コンクリート層については7層で設定し、鉄筋層についてはダブル配筋として外側と内側に、それぞれ x 方向と y 方向に独立に単軸方向のみ剛性と耐力を有するモデル化としている。

Table 5.1 Rebar ratio for each reinforced concrete member

		Rebar ratio [%]
O/S	Cylinder	0.8
	Doom	0.4
RE/B	Inner wall	0.4
	Outer wall	0.8
	Slab	0.4
FH/B	Top slab	0.4

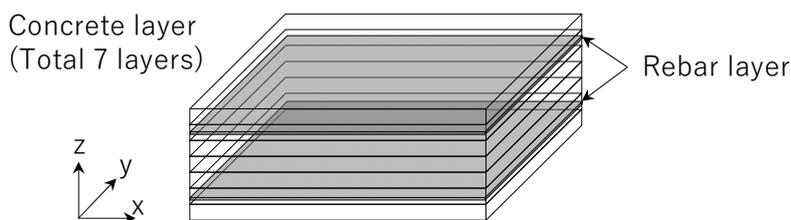


Fig. 5.2 Layer division of laminate shell elements

コンクリートの非線形物性値は、Table 5.2 及び Fig. 5.3 のように設定した。

Table 5.2 Nonlinear physical properties of concrete

Compression		Tension		
Strength [MPa]	Strain [-]	Strength [MPa]	Strain [-]	Softening coefficient [-]
27.0	$2.29 \times 10^{-3}$	2.07	$8.77 \times 10^{-5}$	0.4

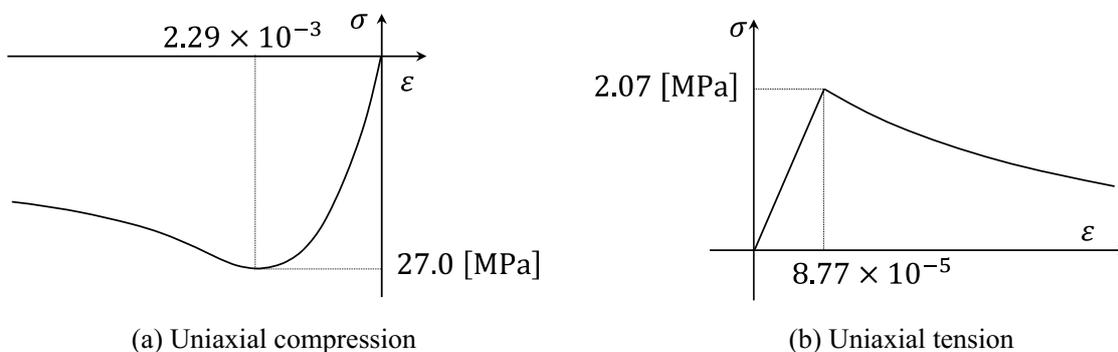


Fig. 5.3 Compressive and tensile stress-strain relationship in concrete

なお、コンクリートの引張強度は、コンクリート示方書<sup>5-2)</sup>の式より算出している。

ここでは、ひび割れの本数の設定で最大6本考慮可能であるが、計算負荷を極力抑えるために、最大4本で多方向入力にも対応できる本数として検討した。

鉄筋については、Table 5.3 及び Fig. 5.4 のように設定している。

Table 5.3 Nonlinear physical properties of rebar

Yield strength [MPa]	Yield strain [-]	Elastic modulus after yielding [GPa]
345	$1.68 \times 10^{-3}$	0.205 (=E <sub>so</sub> /1000)

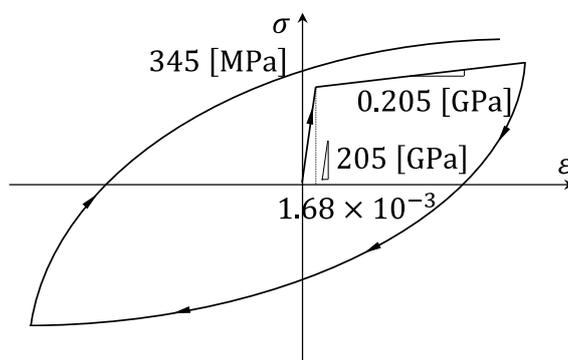


Fig. 5.4 Stress-strain relationship in rebar

ここでコンクリート材料に設定した引張軟化係数は、テンションスティフニング効果を期待した値である0.4となっているが、大断面部材では断面内部のコンクリートが無筋に近い状態が想定されるので、コンクリートの引張破壊エネルギーを考慮した無筋相当の軟化係数を設定される方が設計上では望ましいと考えられる。また、軟化を伴う材料モデルを用いているので、要素寸法依存性がありその影響についても留意が必要であるが、ここでは、5.2節で述べている各減衰モデルの違いを把握するのが目的であるため、3章で設定した方法で検討を行っている。

支持条件や荷重条件は、4章と同じである。

ここでも、三方向に地震動を入力しているが、各非線形レベルで応答を比較したいため、地震動の大きさに対して、0.5、1.0及び1.5の係数倍を乗じて検討する。

### 5.1.2 モデルの固有振動数と固有モード

4.2.2 項と同様に、実固有値解析を実施した。

累積の有効質量比の結果を Fig. 5.5 に示し、低次側の固有モードを Fig. 5.6 に示す。最も低次の振動数は 1.73 [Hz]で、低次側の振動数で有効質量比が大きい振動数は 5.57 [Hz]であった。4 章のメッシュが粗いモデルに比べ、固有振動数が若干低下しているがほぼ同程度である。累積有効質量比や、モードの形状についても低次側ではほぼ同じであったが、高次側では若干異なっている。これは、メッシュが細かくなったことにより、高次の振動数で発生する局所的な床や壁の面外モードが、表現可能になったためだと推察される。なお、Z方向の有効質量比が、30 [Hz]までに過半を超えていることが確認できる。

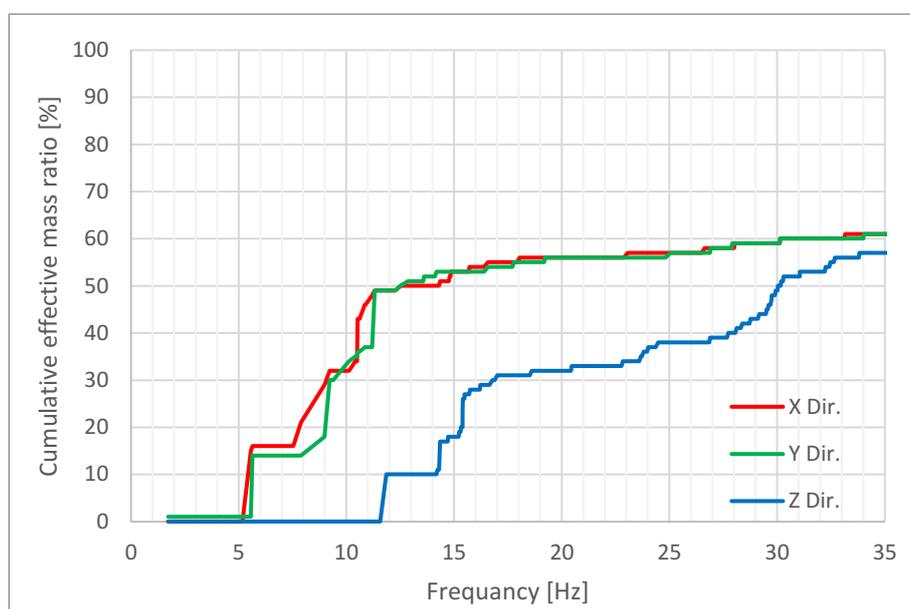
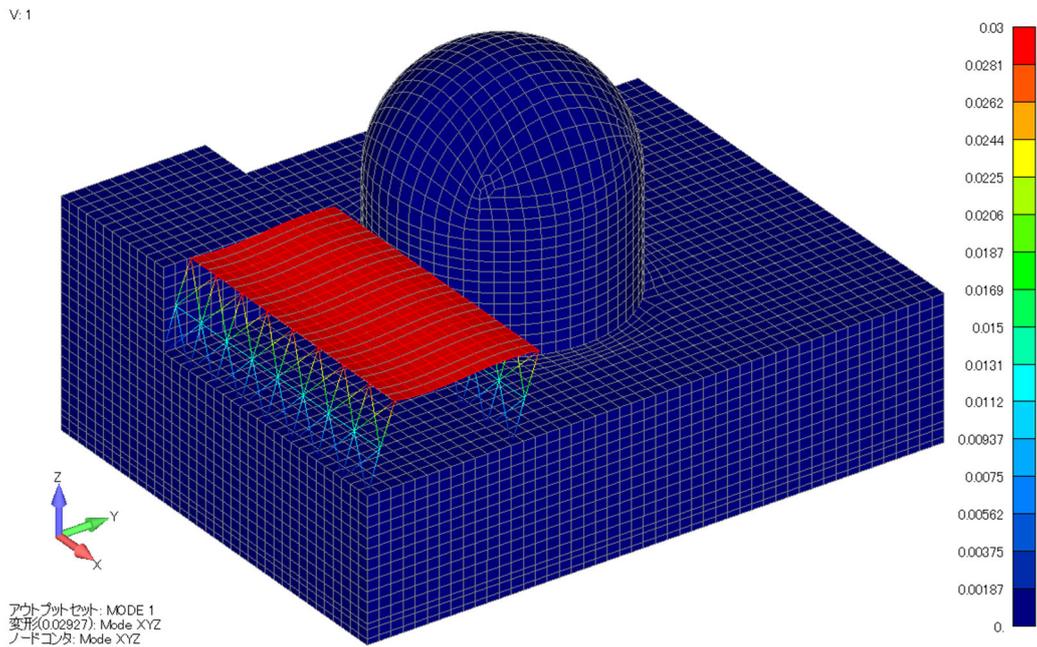
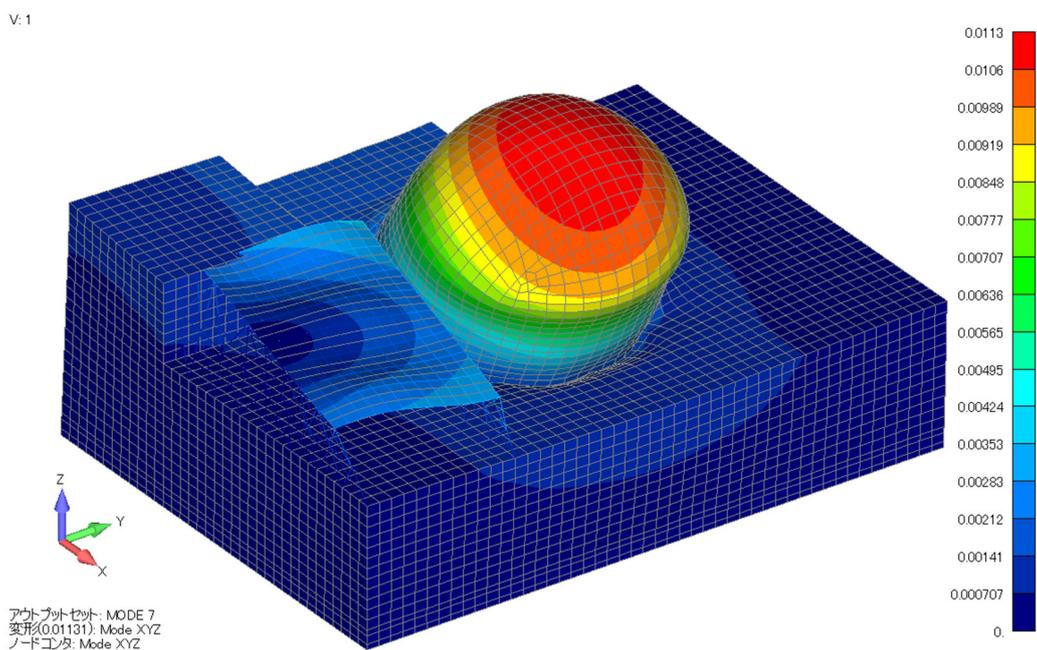


Fig. 5.5 Cumulative effective mass ratio results (detailed mesh)



(a) Lowest eigenmode (1.73 [Hz] in Y direction mode)



(b) Eigenmode with large effective mass ratio at low frequency (5.57 [Hz] in X direction mode)

Fig. 5.6 Eigenmode (detailed mesh)

## 5.2 解析条件

地震応答解析の解析条件は、Table 5.4 のように設定している。今回は、鉄筋コンクリートの非線形解析を実施しているので、4章よりも解析時間刻みを細かく設定している。また、連立方程式の解法としては直接法と反復法があるが、計算上安定して、数値誤差が抑えられ精度の良い解を得るために直接法を採用した<sup>5-3)</sup>。非線形の収束計算の解法は、接線剛性で計算される Newton-Raphson 法<sup>5-4)</sup>を用いており、反復計算は最大で10回を行っている。収束計算は、不釣り合い力（残差力）のノルムから判定しており、その閾値を  $1.0 \times 10^{-9}$  と設定している。これを満たせば収束したことになる。もし満たさなければ、不釣り合い力を次のステップに持ち越して計算している。

Table 5.4 Analysis conditions

Analytical method		Dynamic
Integral method		Newmark- $\beta$ ( $\beta = 0.25, \delta = 0.5$ )
Time step [s]		$5.0 \times 10^{-4}$
Linear	Solver	Direct method (MUMPS)
Non-linear	Solver	Newton-Raphson
	Handling unbalanced forces	Carry over to next step
	Maximum number of iterations	10
	Convergence judgment threshold	$1.0 \times 10^{-9}$

なお、ここでは領域分割法で、領域分割数を32として並列計算を行っている。

比較検討した減衰モデルに Table 5.5 に示す。減衰比は、鉄筋コンクリート部材では  $\xi_{aim} = 0.03$  で、鉄骨部材では  $\xi_{aim} = 0.02$  で検討している。

Table 5.5 Analysis case

	Damping type	Freaquancy [Hz]
Caus	Causul (9 term)	$f_{lim} = 35.0$
ERay	Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 35.0$
TRay1	Tangent Rayleigh	$f_1 = 1.73, f_2 = 30.0$
TRay2	Tangent Rayleigh	$f_1 = 5.57, f_2 = 30.0$

前章では、モード減衰を目標とする結果として検討した。しかし、モード減衰は、大規模モデルだと現実的な時間で検討できない。

従って、ここでは、因果減衰、拡張 Rayleigh 減衰及び2ケースの Rayleigh 減衰で検討した。それぞれの減衰の設定に必要な振動数については、4章と同じ考え方で設定している。なお、減衰マトリクスは、3章の結果から基本的に瞬間剛性マトリクスを用いて検討している。なお、初期型の検討についても後に実施している。

## 5.3 解析結果

### 5.3.1 結果と考察

結果は、最大合成変位、最大合成加速度、鉄筋の最大軸応力、鉄筋の最大軸ひずみ、コンクリートの最大ひび割れ本数、鉄骨の梁柱の最大曲げモーメント及び、O/S と FH/B 頂部における加速度応答スペクトルを確認した。鉄筋の最大軸応力及び軸ひずみについては鉄筋の全層の絶対値最大を取り、コンクリートの最大ひび割れ本数についてはコンクリートの中間層で確認した。また、鉄骨部材の梁柱の最大曲げモーメントについては、両端の値で最大値を取り示している。ここでは、一つ一つの節点や要素の応答の値については、いずれのケースも相違して見えるが、全体的に俯瞰して分布を見ると傾向が把握できる。

Fig. 5.7～Fig. 5.12 に、入力倍率を 0.5 倍でそれぞれの減衰モデルの結果を比較している。それぞれ O/S 部分と FH/B の部分で比較すると傾向が解る。

O/S 部分では、Fig. 5.7～Fig. 5.11 より、今回のモデルでは、ドーム部分において質量を重めに設定しており、さらに部材厚がシリンダー部分よりも薄いので、応答が大きくひび割れが生じている。さらにそれぞれのケースで比較すると、Caus、ERay 及び TRay2 が同等の分布となっており、TRay1 においては他のケースに比べて応答が大きく、ひび割れがより進展している分布となっている。なお、Fig. 5.8 の最大合成加速度について、TRay1 や TRay2 で一部分の節点で応答が大きくなっているが、後で考察する。

FH/B 部分では、特に Fig. 5.7, Fig. 5.8 及び Fig. 5.12 より、Caus、ERay 及び TRay1 が同等の分布となっているが、TRay2 では応答が小さくなっている。

これらの応答の違いは、4 章と同様に設定されている減衰比と関連しており、減衰比が TRay1 では、O/S 部の固有振動数である 5.57 [Hz] 付近で過小な値となっており、TRay2 では、FH/B 部の固有振動数である 1.73 [Hz] 付近で過大な値となり、応答に影響している。Caus 及び ERay については、TRay1 及び TRay2 で目標とした減衰比となっている振動数の応答と同等の結果であるため、適切な減衰比で評価されていると判断できる。

Fig. 5.13 及び Fig. 5.14 の加速度応答スペクトルについても、同様な理由から、TRay1 や TRay2 において、減衰比が小さい振動数帯では応答が大きくなり、逆に減衰比が大きい振動数帯では応答が小さくなる。

これらの結果は、線形問題の4章の結果と整合している。ただし、Fig. 5.13 で O/S 部分の Y 方向の応答 (0.2s 付近) では、TRay1 の応答が他の結果と同等であり、またピークが二つ確認できる。これは非線形の影響であり、損傷し履歴エネルギー吸収 (履歴減衰) により応答が低減するとともに、低振動数側に固有振動数がシフトしているためと考えられる。

Fig. 5.16～Fig. 5.22 に、入力倍率を 1.0 倍の結果を比較している。0.5 倍と同様な結果や考察となる。

Fig. 5.23～Fig. 5.30 に、入力倍率を 1.5 倍の結果を比較している。Fig. 5.25 及び Fig. 5.26 のようにいずれのケースにおいても O/S のドーム部分で多数の要素の応力が降伏強度に達しており、かなり損傷が進展している。ドーム部分におけるひずみの応答が大きい部分の

平均値を算出している。TRay1 に対して他の減衰モデルでは、0.5 倍では 0.35~0.38 倍、1.0 倍では 0.53~0.59 倍であり、1.5 倍では 0.65~0.72 倍となり、非線形レベルが強くなると、減衰モデルによる結果の差が縮まっている。これは、初期減衰よりも損傷による履歴減衰が支配的にシフトしていることが一因として考えられる。

FH/B については、鉄骨材が弾性内に収まったため、0.5 倍や 1.0 倍と同じ傾向であるが、Fig. 5.30 の X 方向加速度応答スペクトルを確認すると、1.0 倍から 1.5 倍において応答の差が小さくなっている。Fig. 5.27 の FH/B の屋根のひび割れ分布をみると、どのケースにおいても柱側の X 方向に連続し二方向ひび割れが生じているが、特に TRay1 ではほかのケースよりも損傷し履歴減衰が発生し、1.0 倍と 1.5 倍でピーク応答がほぼ一緒で頭打ちになったものと推察される。他のケースにおいては、TRay1 に比べれば損傷しにくい状態であり、入力動の増加によってピークが大きくなったものと思われる。この履歴減衰の影響により、1.5 倍のでは差が小さくなったものと考えられる。この履歴減衰については、2 章の検討と同じような傾向であった。

#### ○ 最大加速度分布について

最大合成加速度において、0.5 倍の検討で TRay1 や TRay2 で一部分の節点で応答が大きくなっているが、1.0 倍や 1.5 倍においても、前述の減衰モデルのみならず Caus や ERay でも発生している。コンクリートの非線形解析では、ひび割れに起因する高振動数側の応答によりスパイク上の波形が表れることについて指摘<sup>5-5)</sup>されている。その原因により、局所的な節点においてやむを得ず発生したものと考えらえる。

解析の時間刻みを細かく設定して、スパイク上の応答を抑制させることも場合によっては可能である。ただし、本章の目的としては、減衰モデルの違いを確認することであり、軟化を考慮したコンクリート非線形解析の課題であるため、スパイク上の応答が発生した場合は留意が必要として、ここまでに留める。

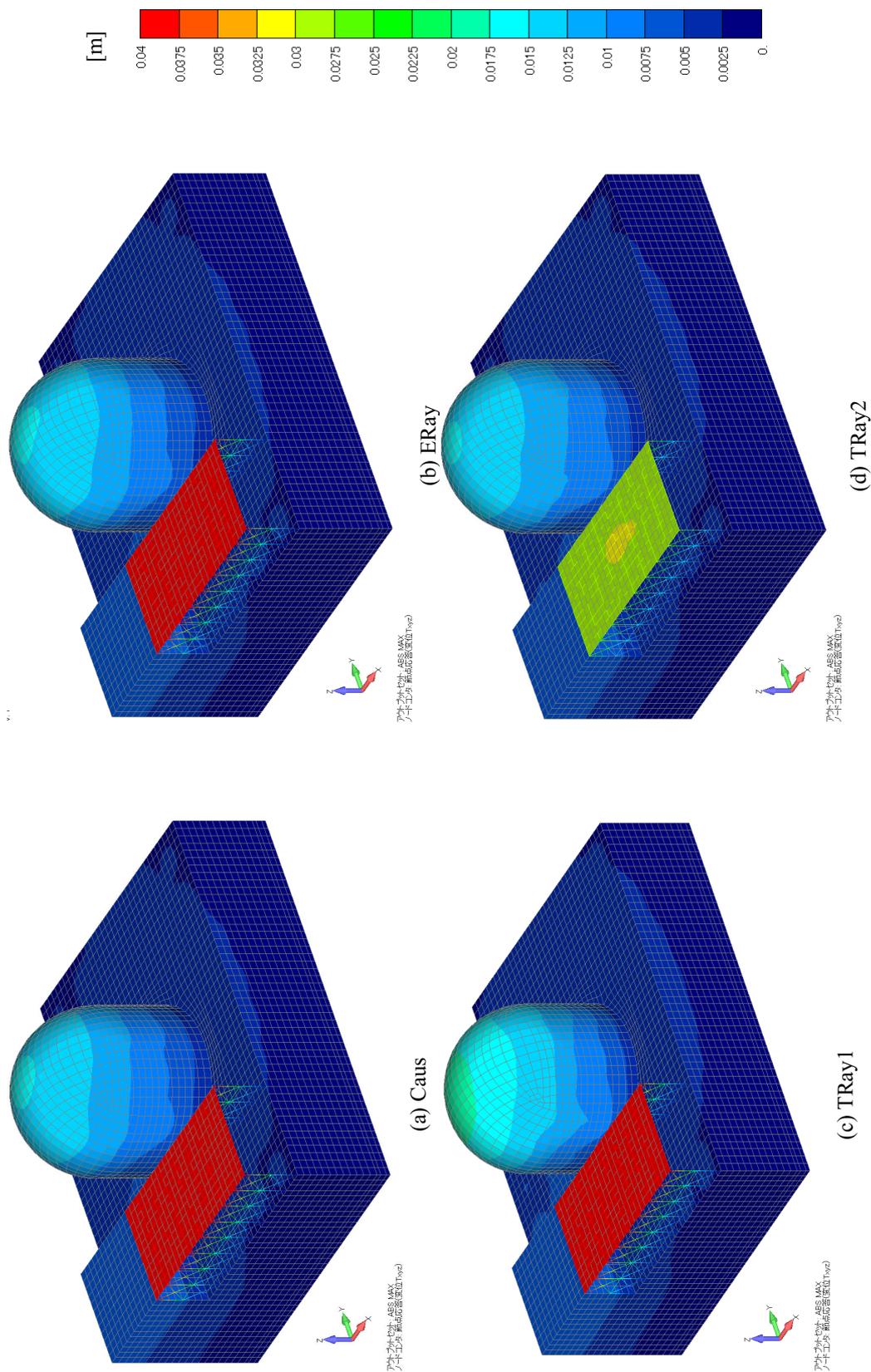


Fig. 5.7 Comparison of maximum resultant displacement (0.5 times)

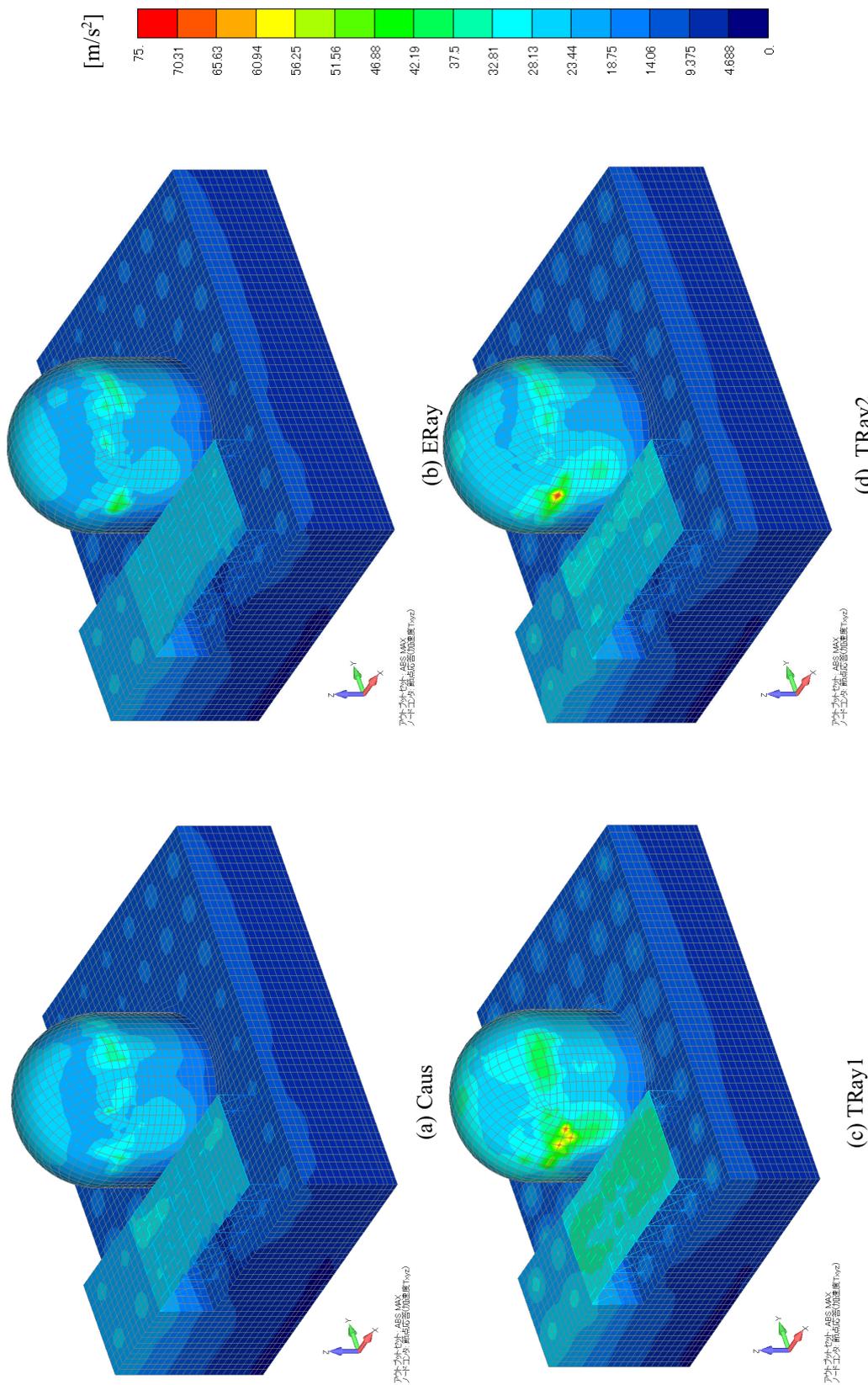


Fig. 5.8 Comparison of maximum resultant acceleration (0.5 times)

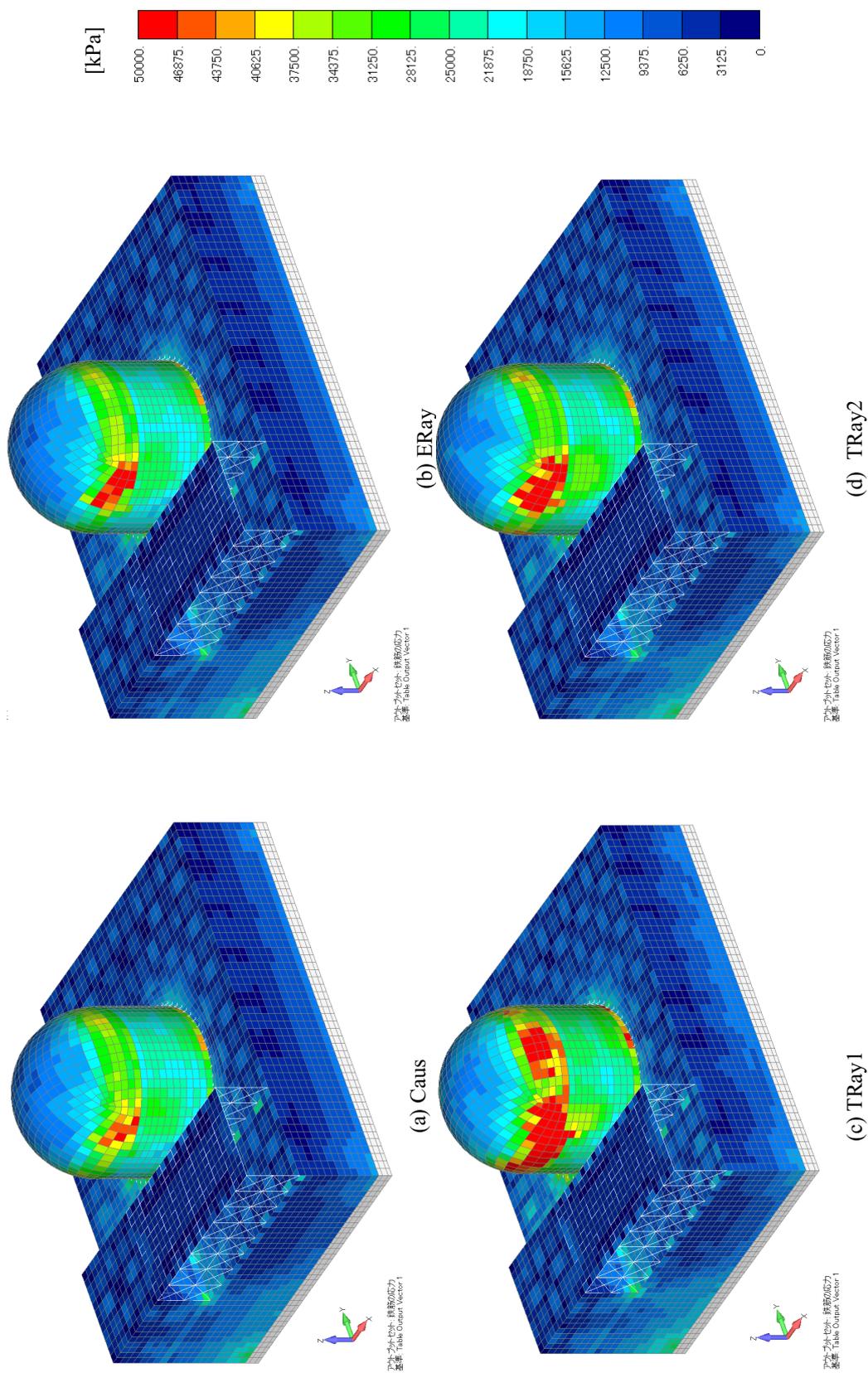
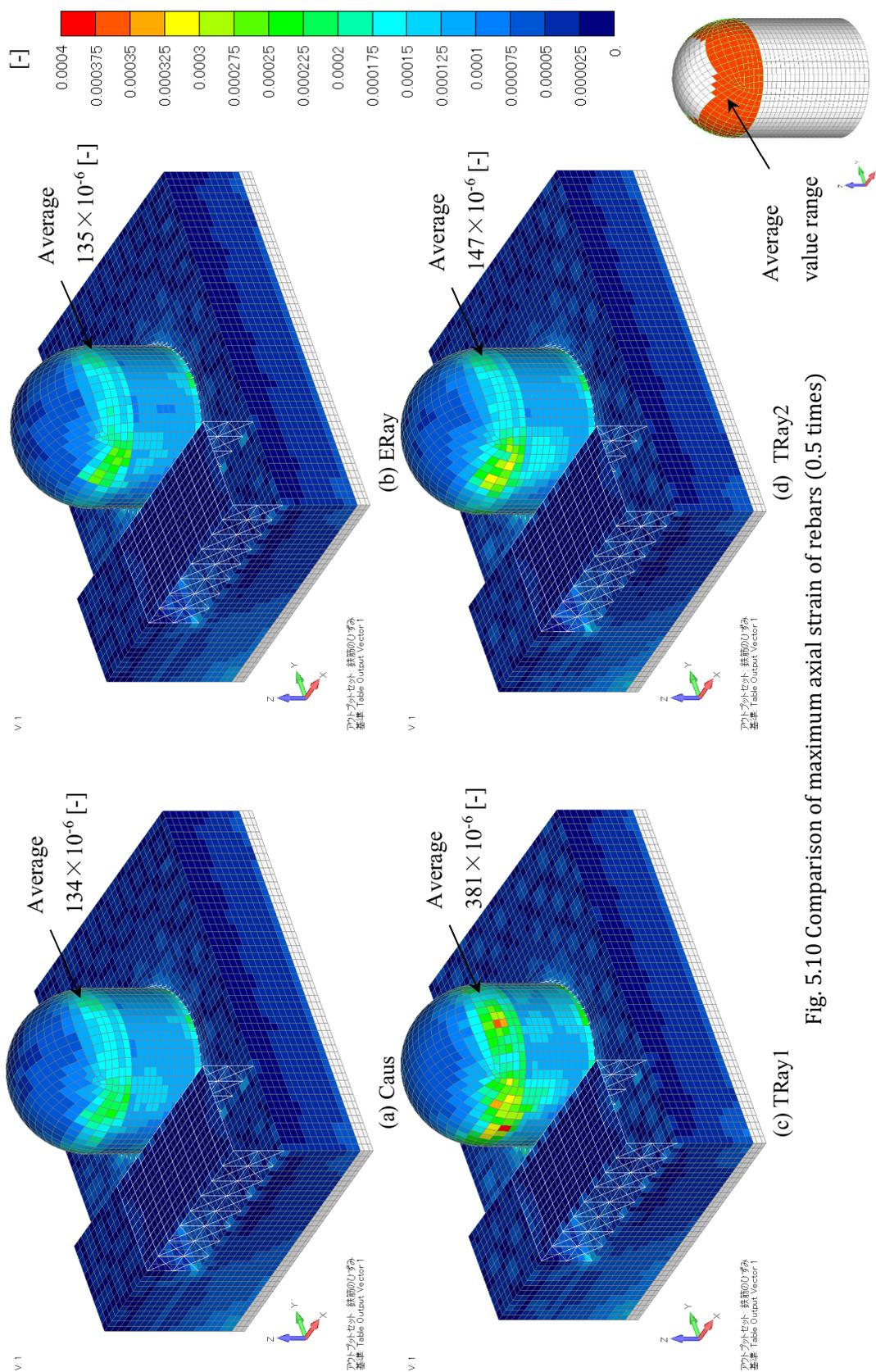


Fig. 5.9 Comparison of maximum axial stress of rebars (0.5 times)



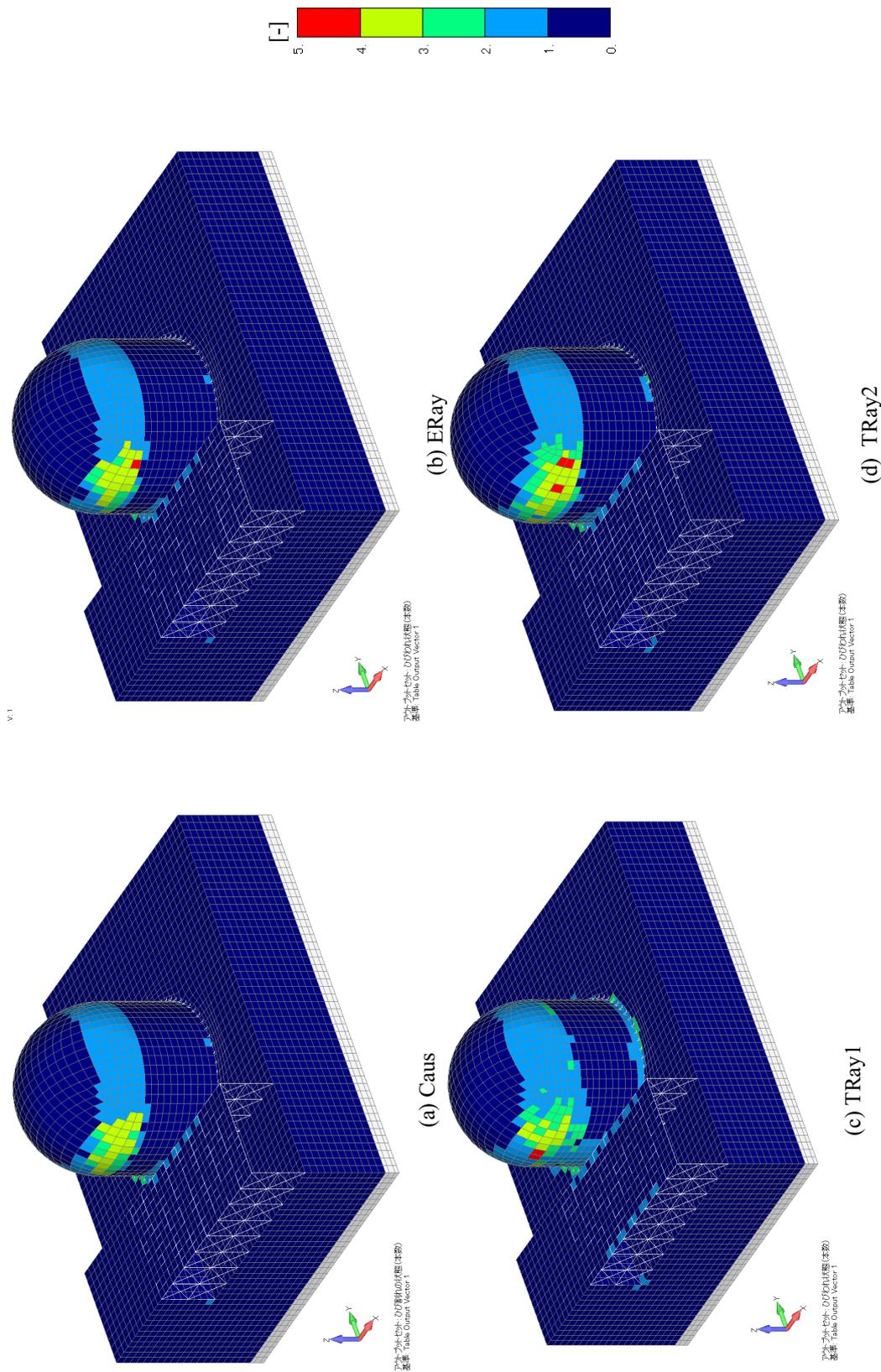


Fig. 5.11 Comparison of number of cracks (0.5 times)

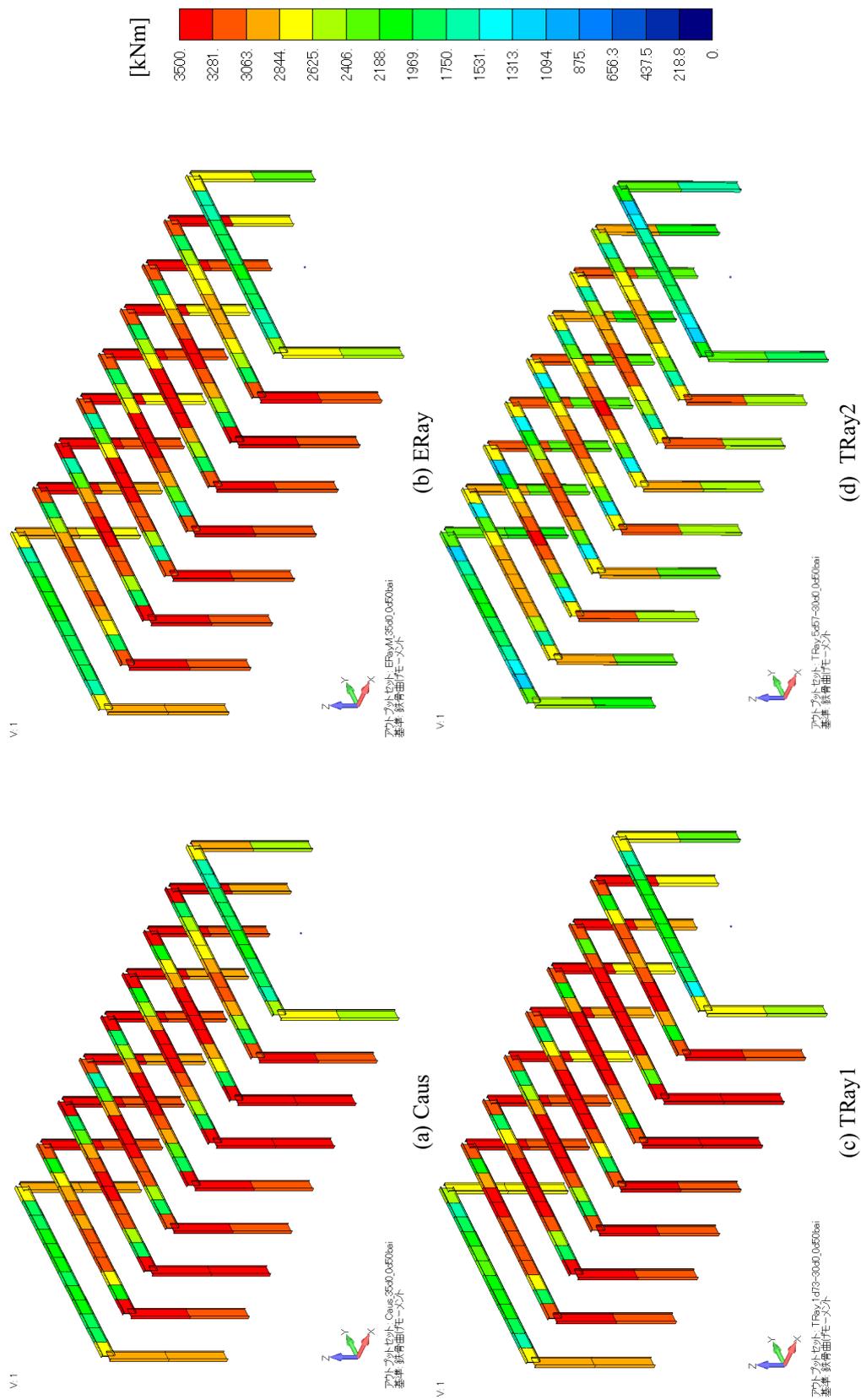


Fig. 5.12 Comparison of bending moment (0.5 times)

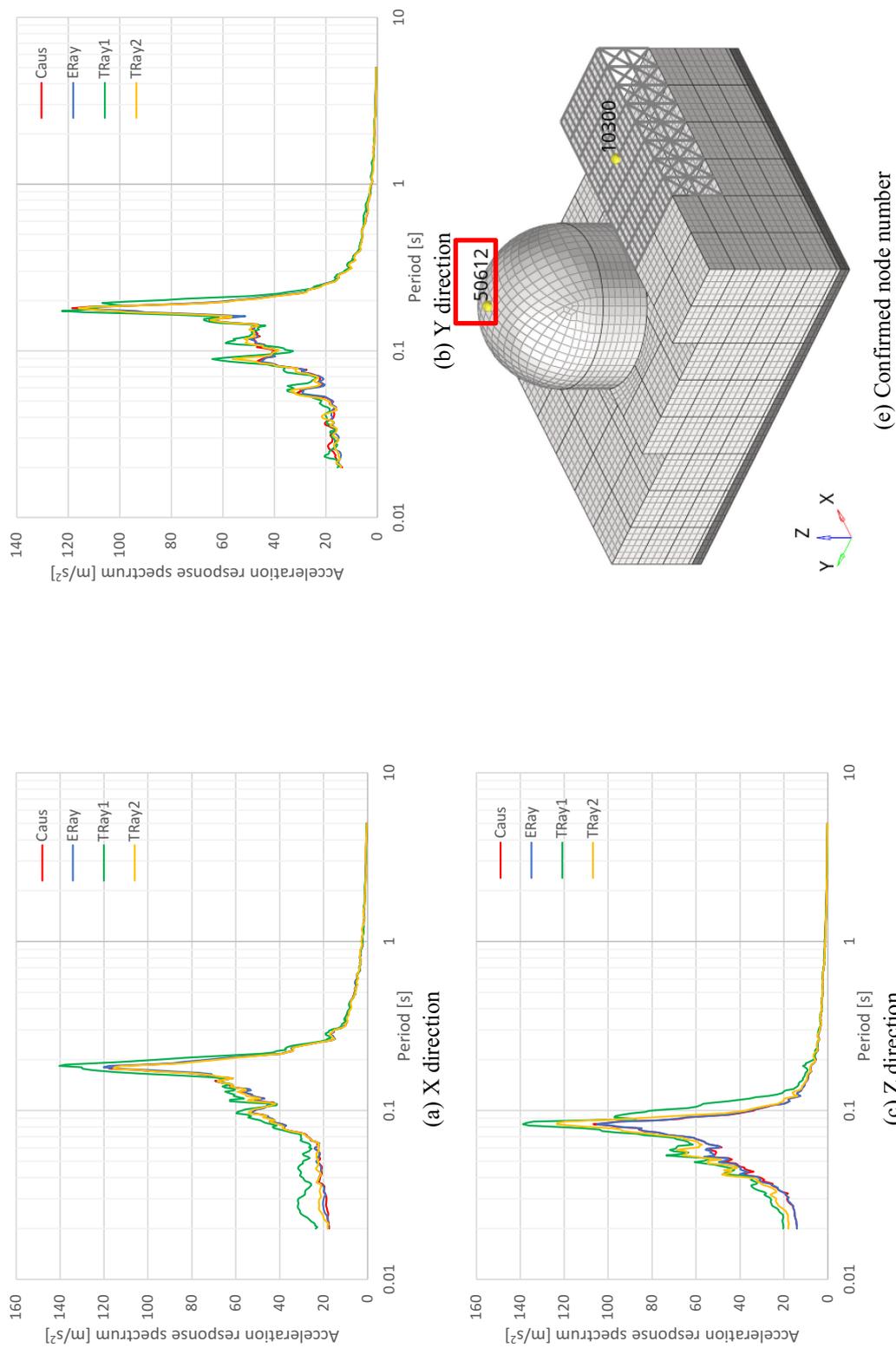


Fig. 5.13 Response acceleration spectrum at the node at the top of O/S (0.5 times)

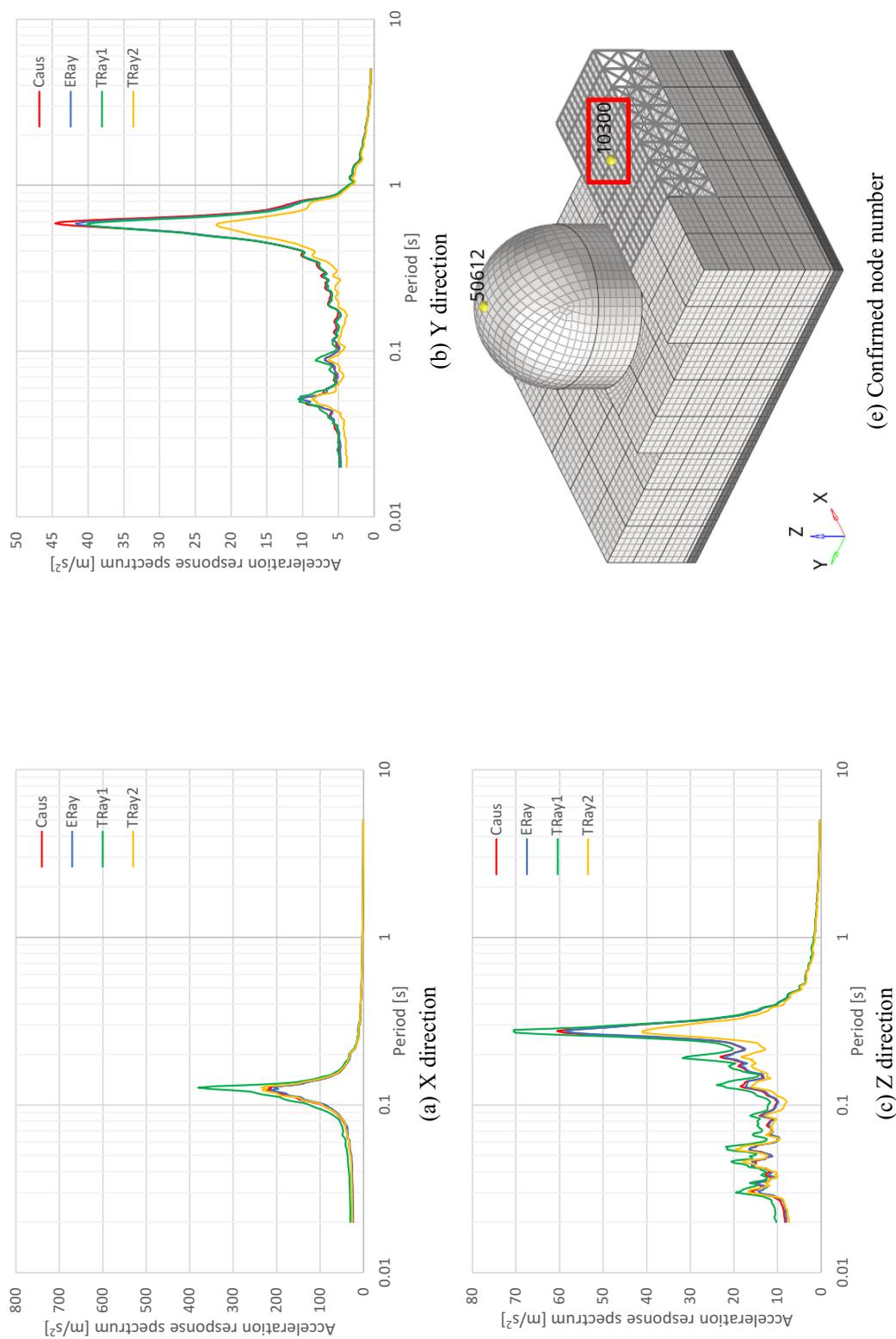


Fig. 5.14 Response acceleration spectrum at the node at the top of FH/B (0.5 times)

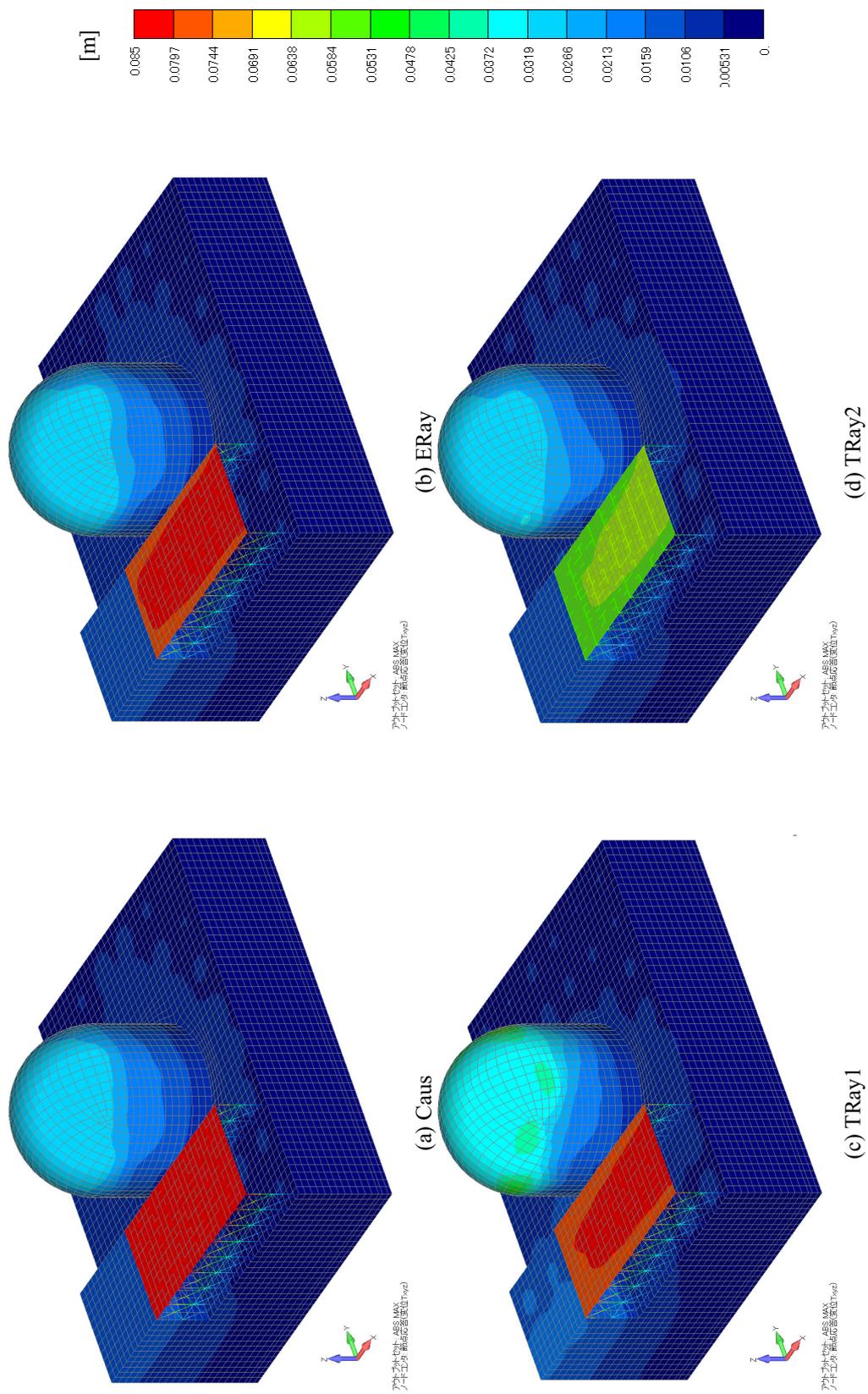


Fig. 5.15 Comparison of maximum resultant displacement (1.0 times)

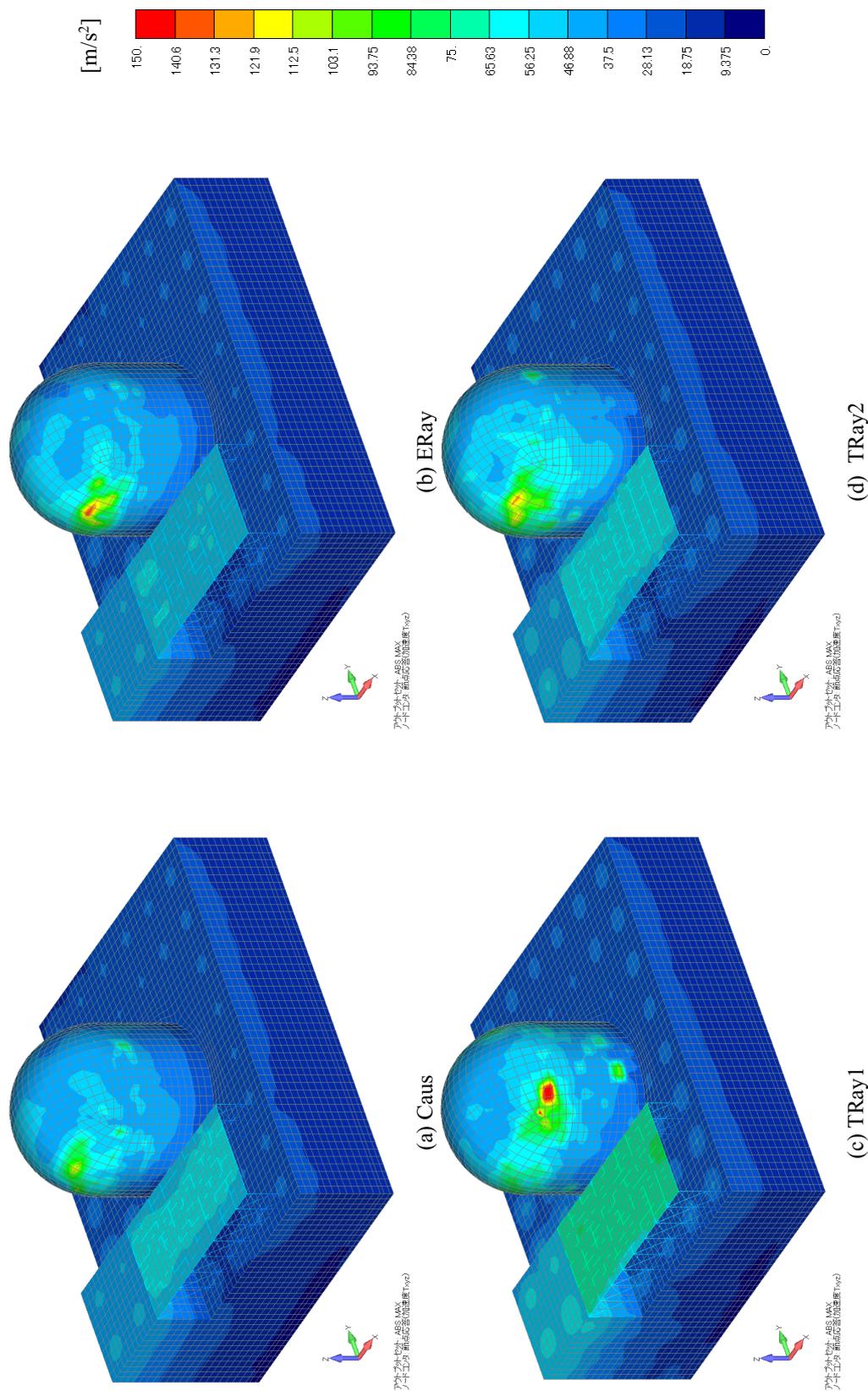


Fig. 5.16 Comparison of maximum resultant acceleration (1.0 times)

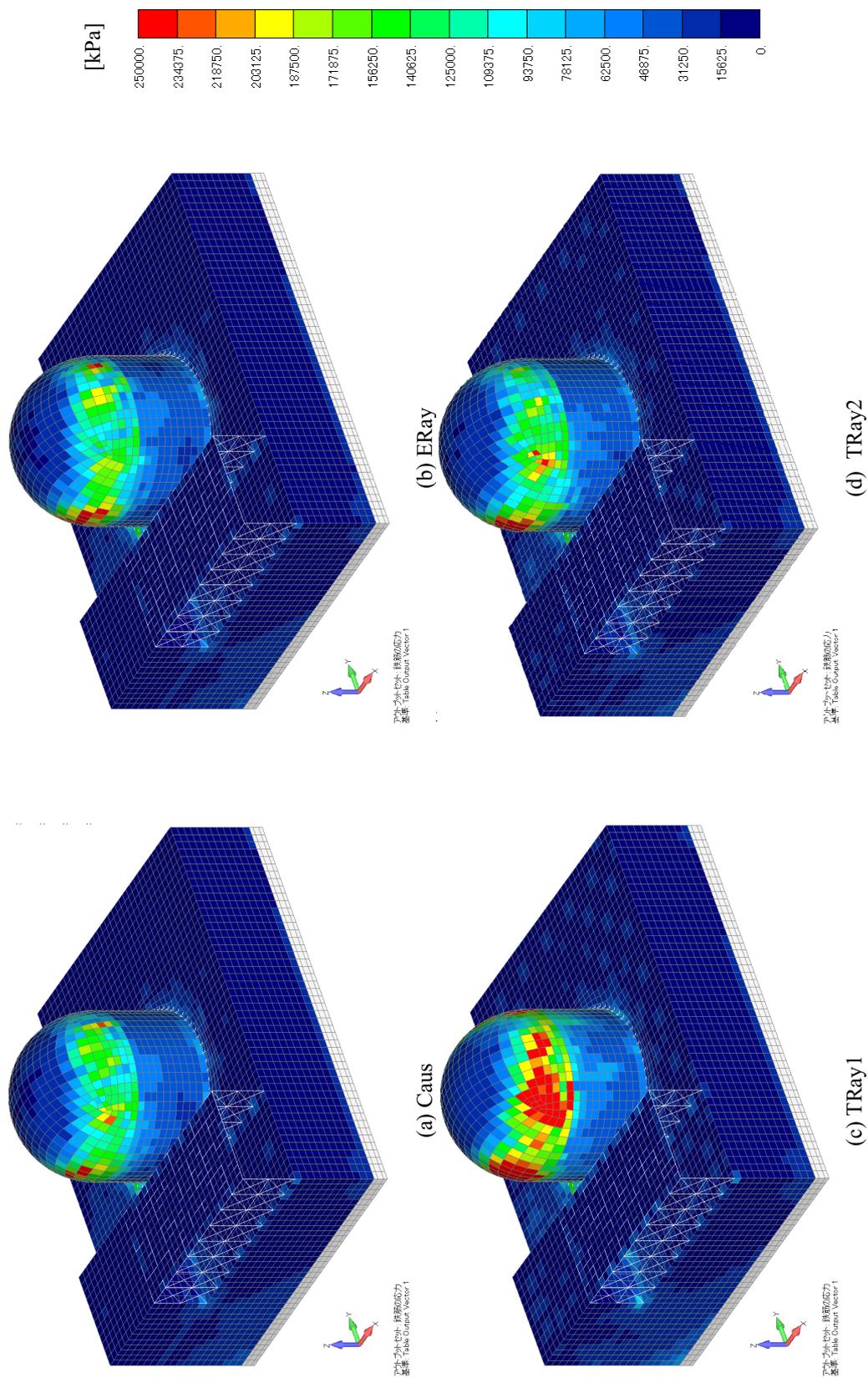


Fig. 5.17 Comparison of maximum axial stress of bars (1.0 times)

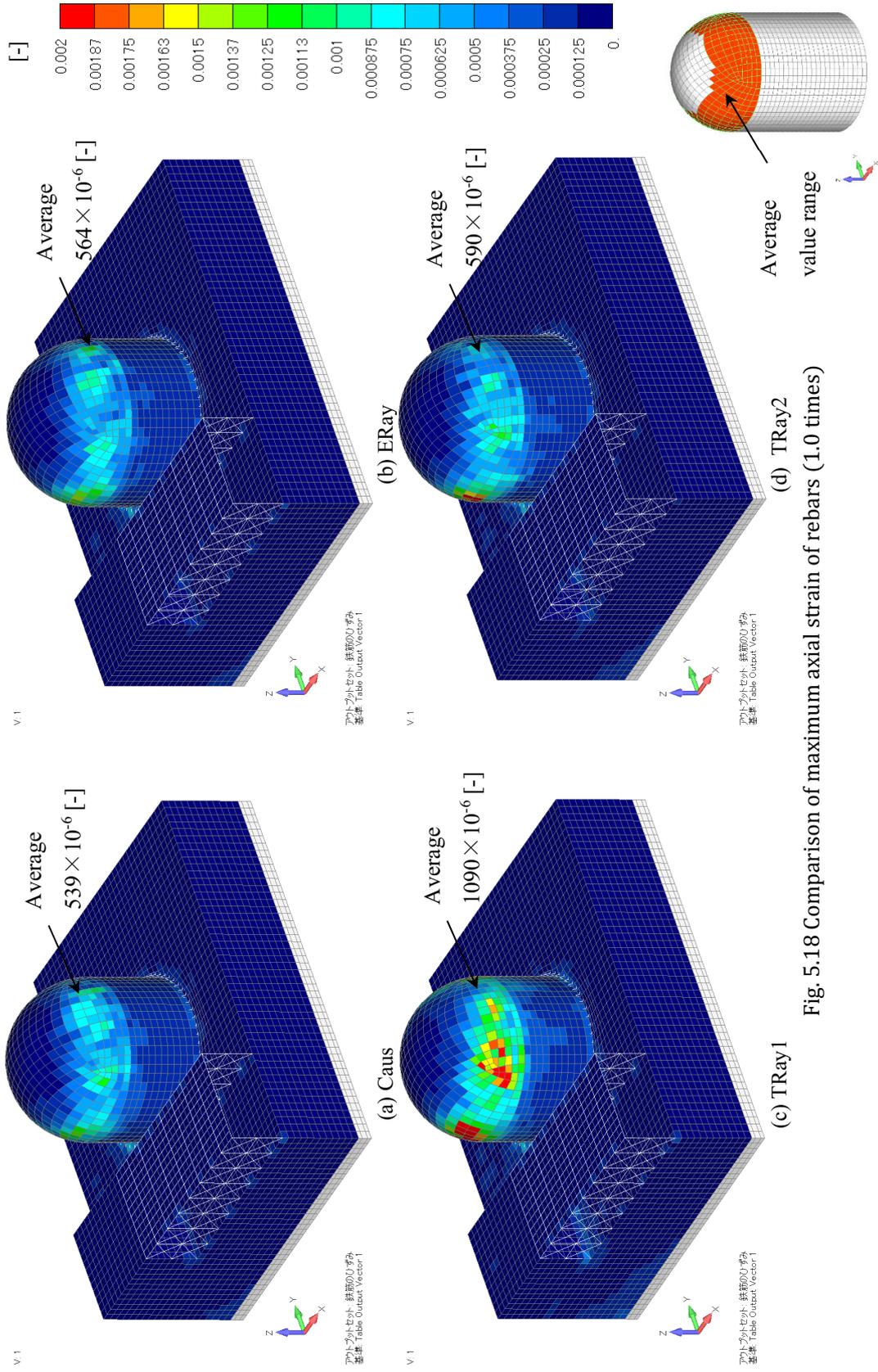


Fig. 5.18 Comparison of maximum axial strain of rebars (1.0 times)

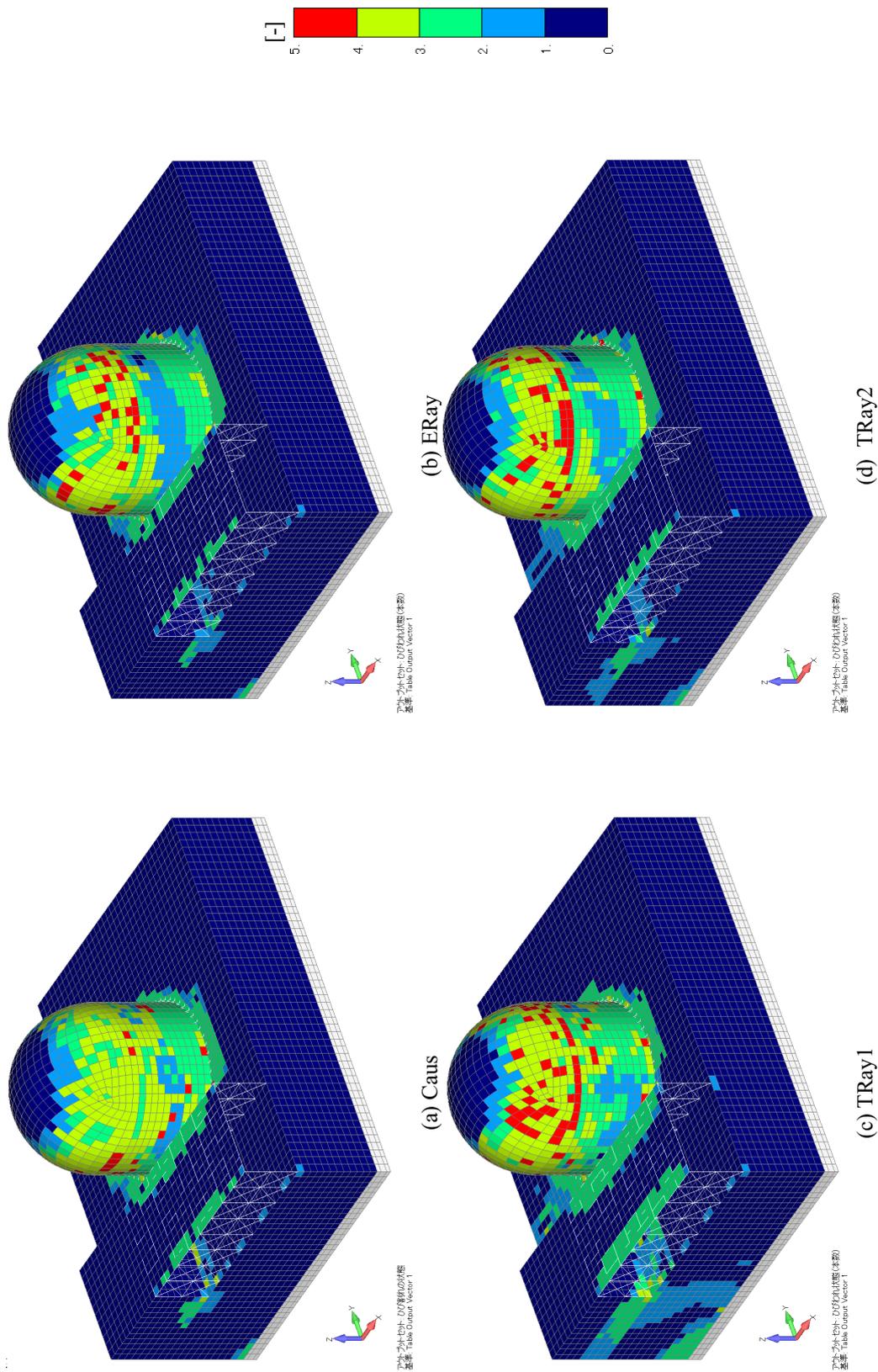


Fig. 5.19 Comparison of number of cracks (1.0 times)

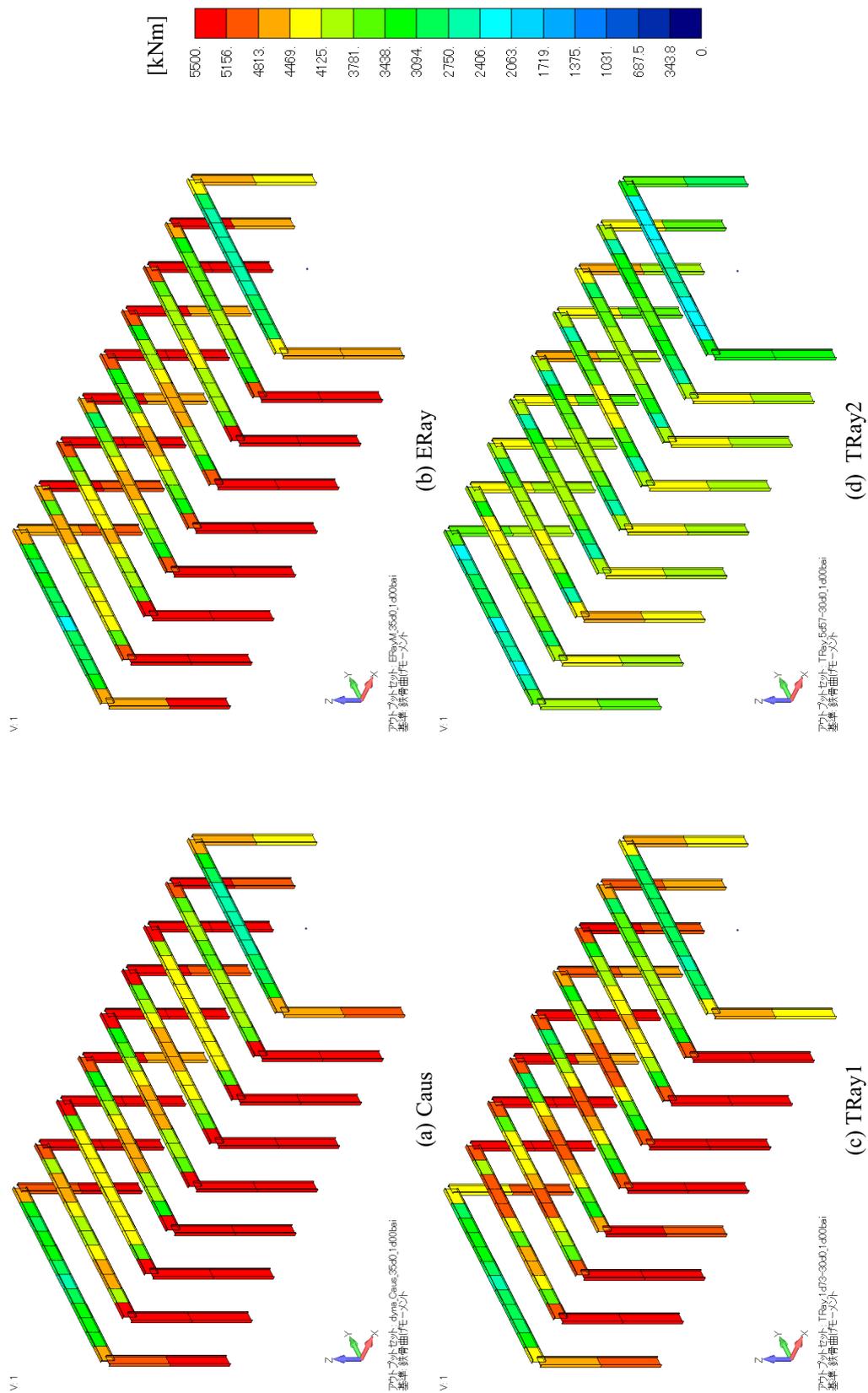


Fig. 5.20 Comparison of bending moment (1.0 times)

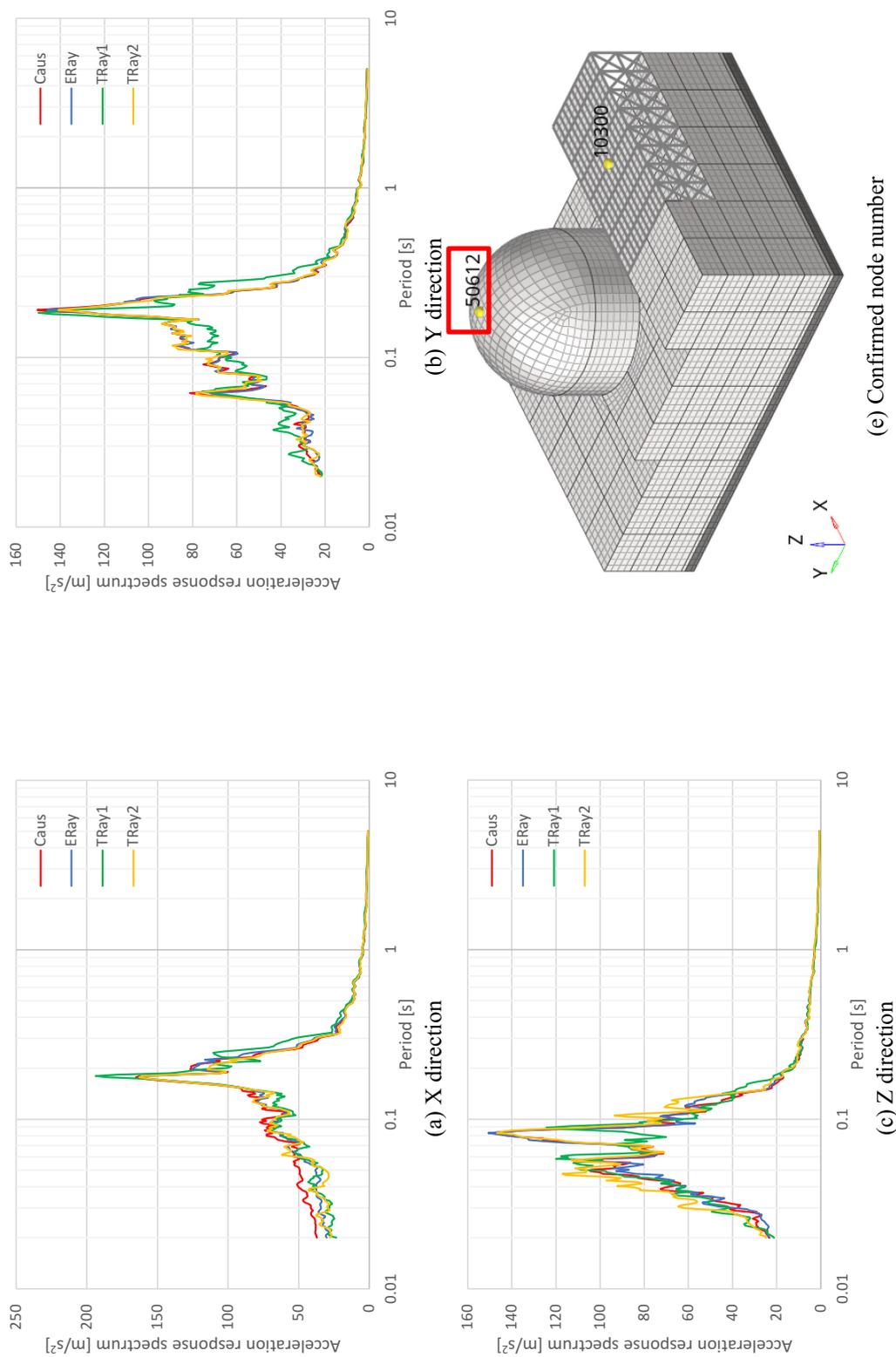


Fig. 5.21 Response acceleration spectrum at the node at the top of O/S (1.0 times)

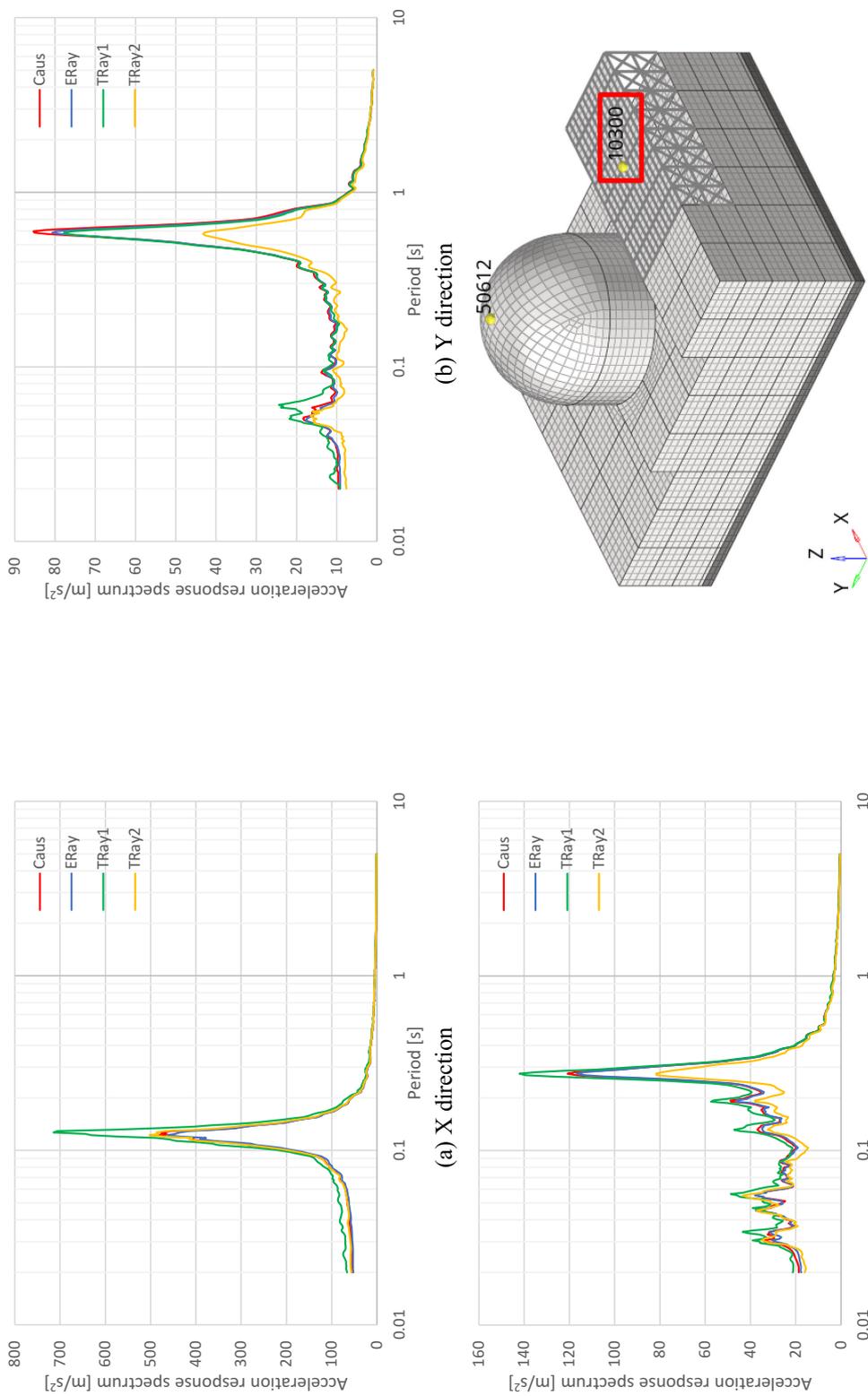


Fig. 5.22 Response acceleration spectrum at the node at the top of FH/B (1.0 times)

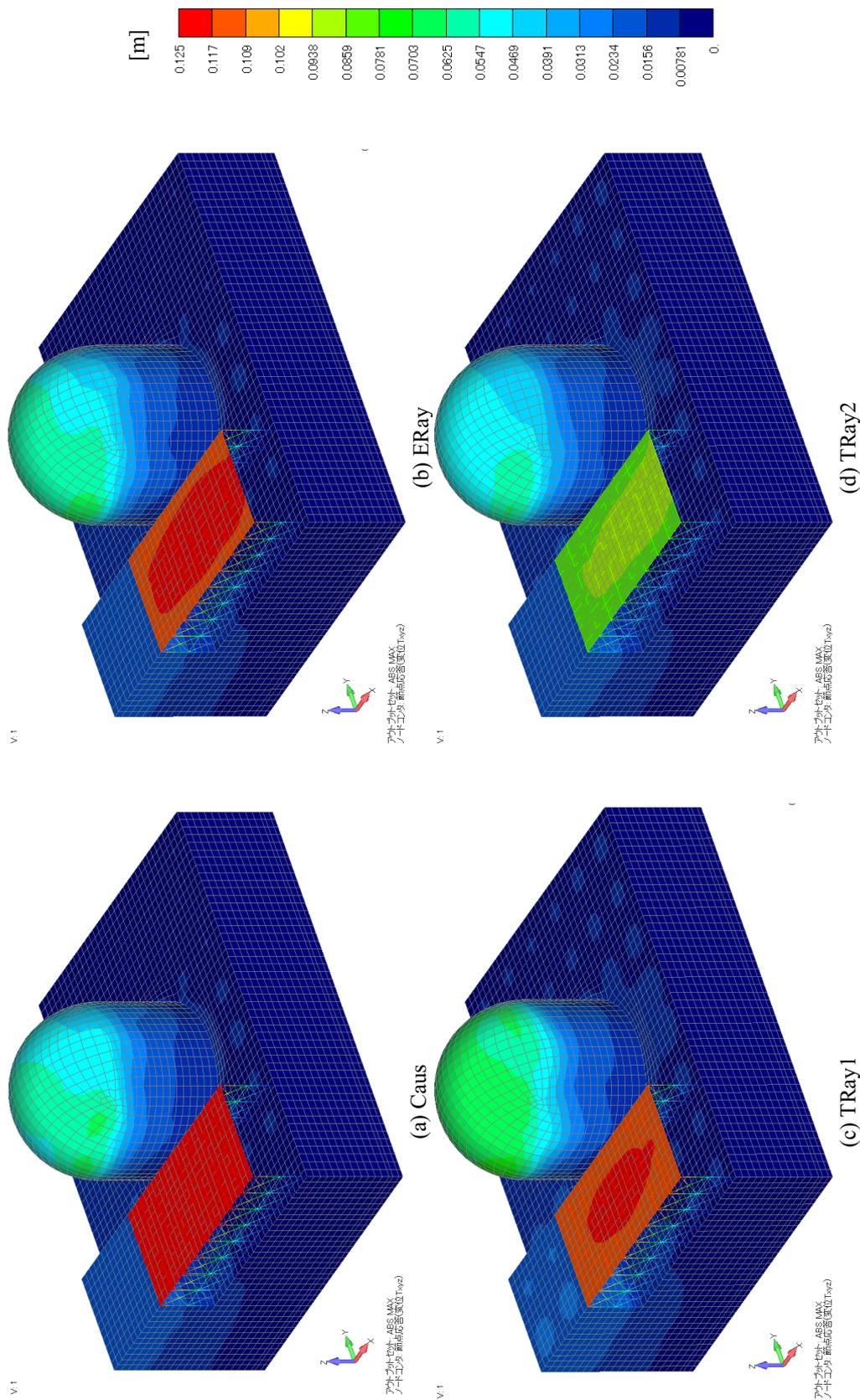


Fig. 5.23 Comparison of maximum resultant displacement (1.5 times)

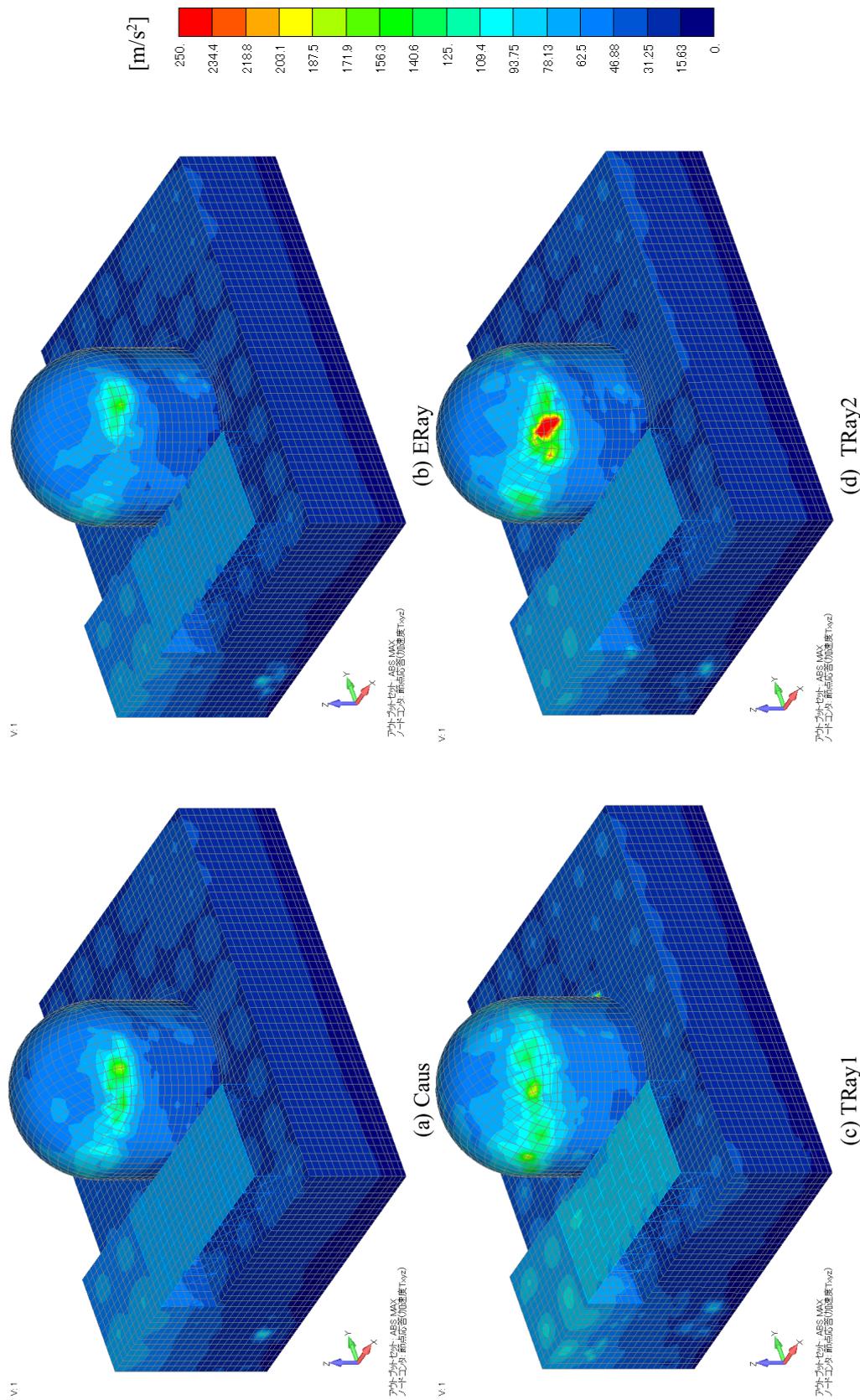


Fig. 5.24 Comparison of maximum resultant acceleration (1.5 times)

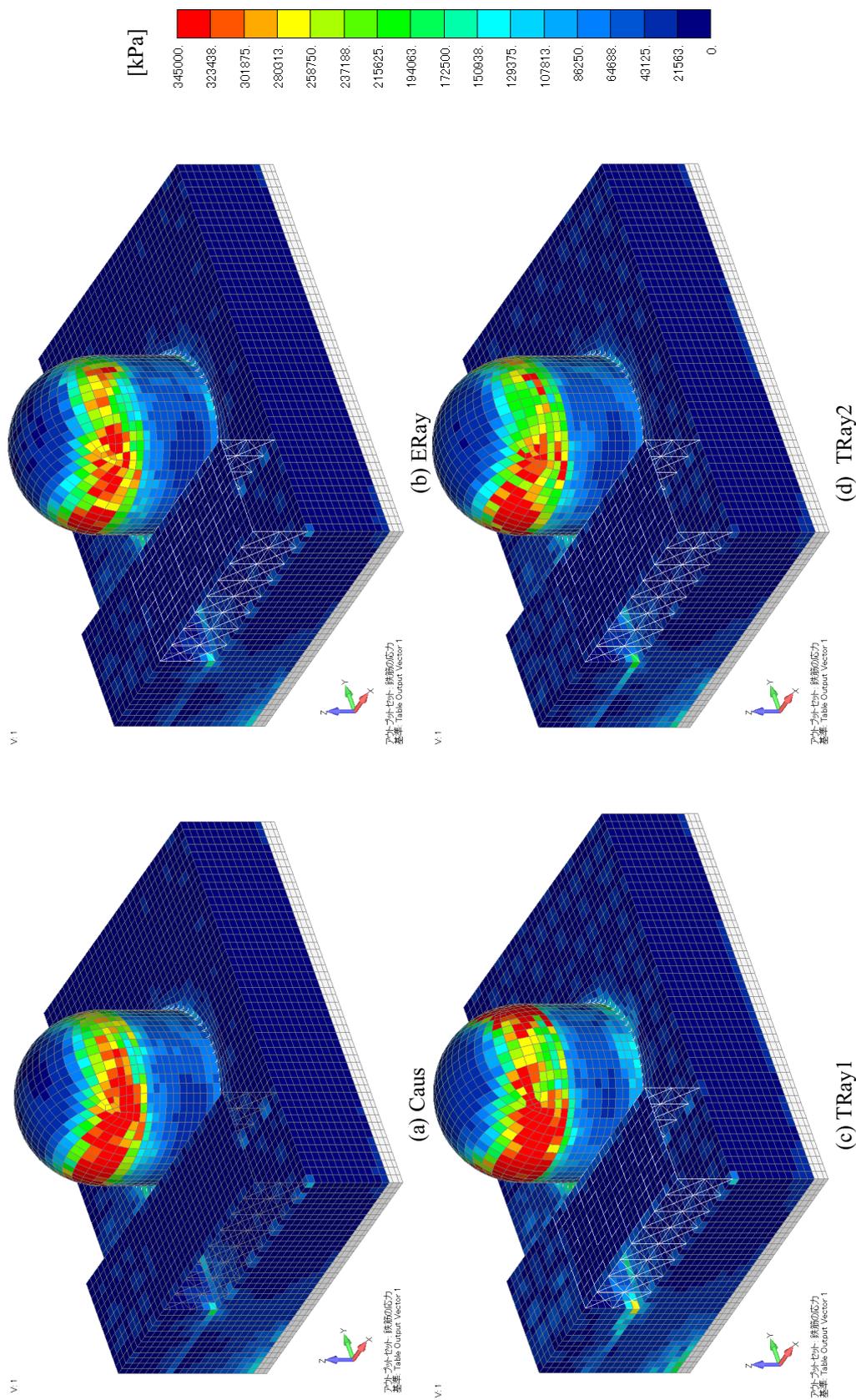


Fig. 5.25 Comparison of maximum axial stress of bars (1.5 times)

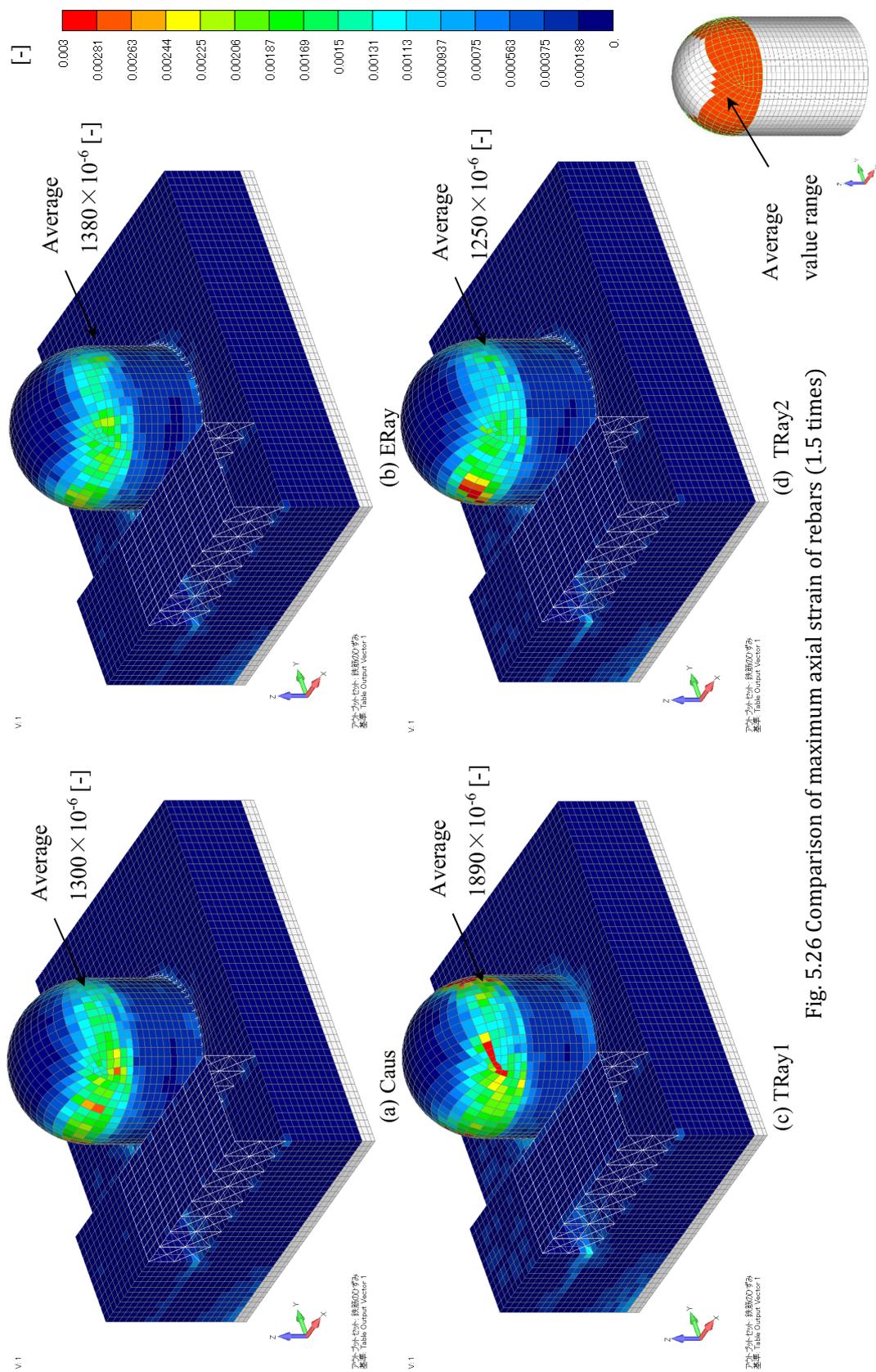


Fig. 5.26 Comparison of maximum axial strain of rebars (1.5 times)

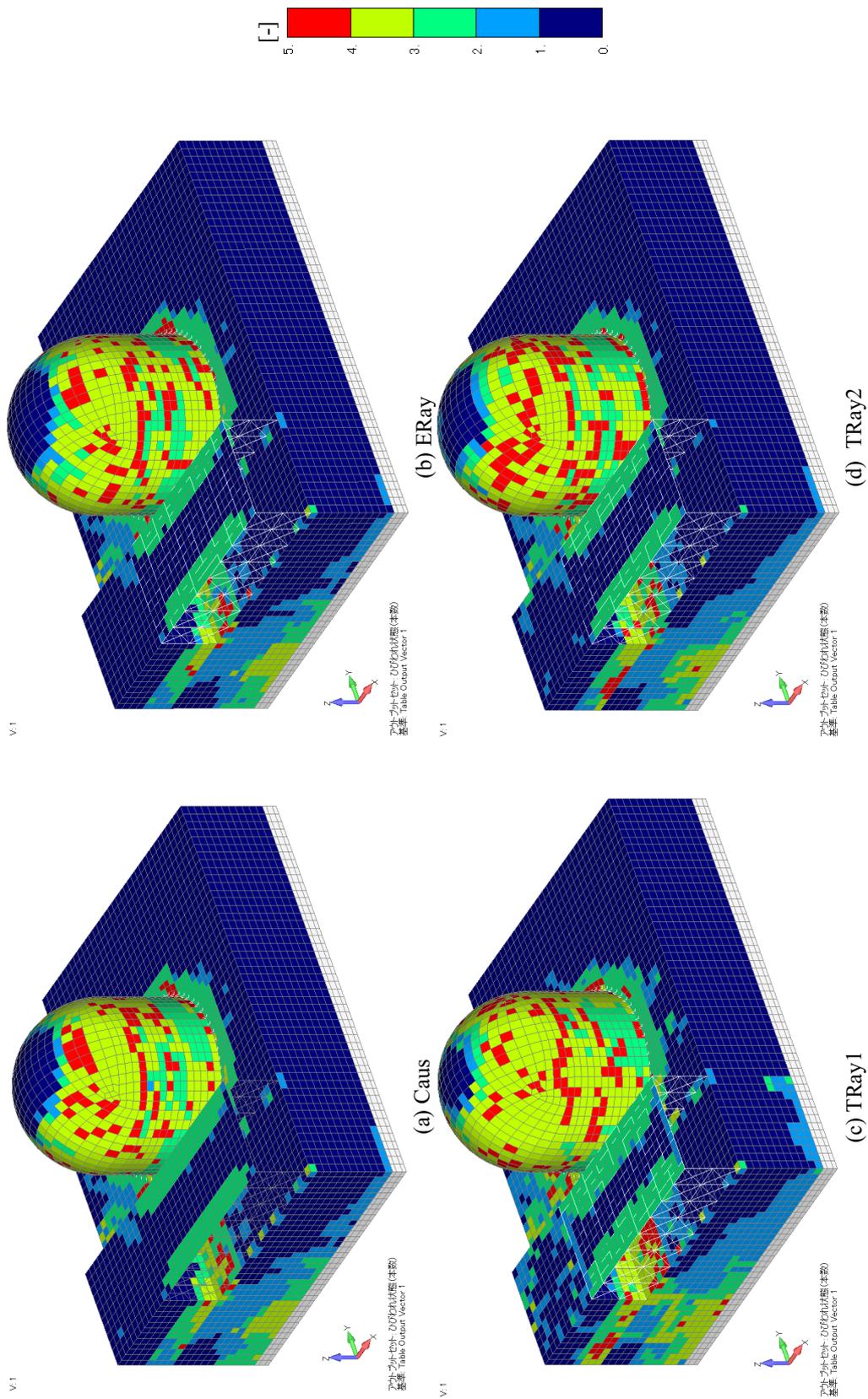


Fig. 5.27 Comparison of number of cracks (1.5 times)

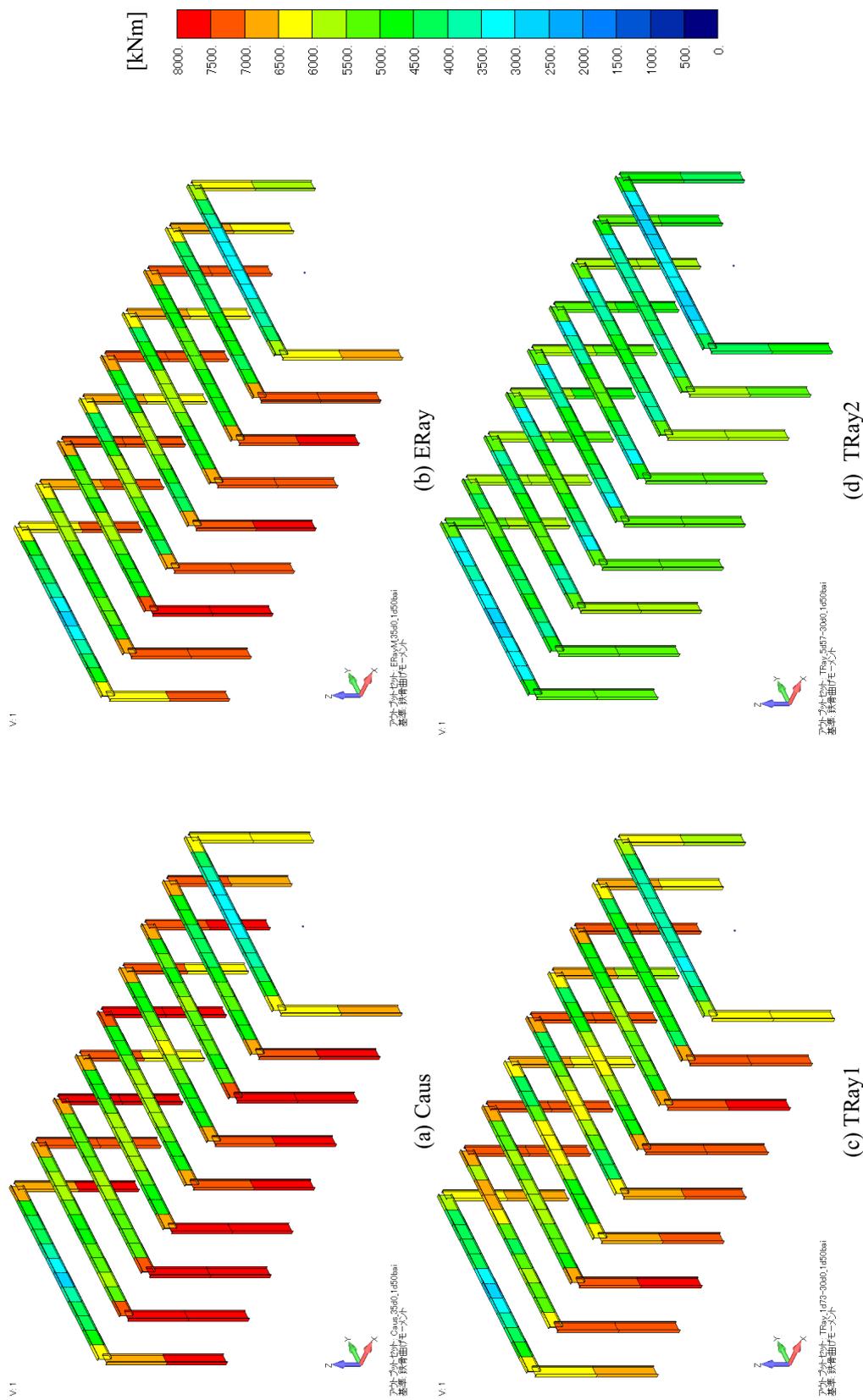


Fig. 5.28 Comparison of bending moment (1.5 times)

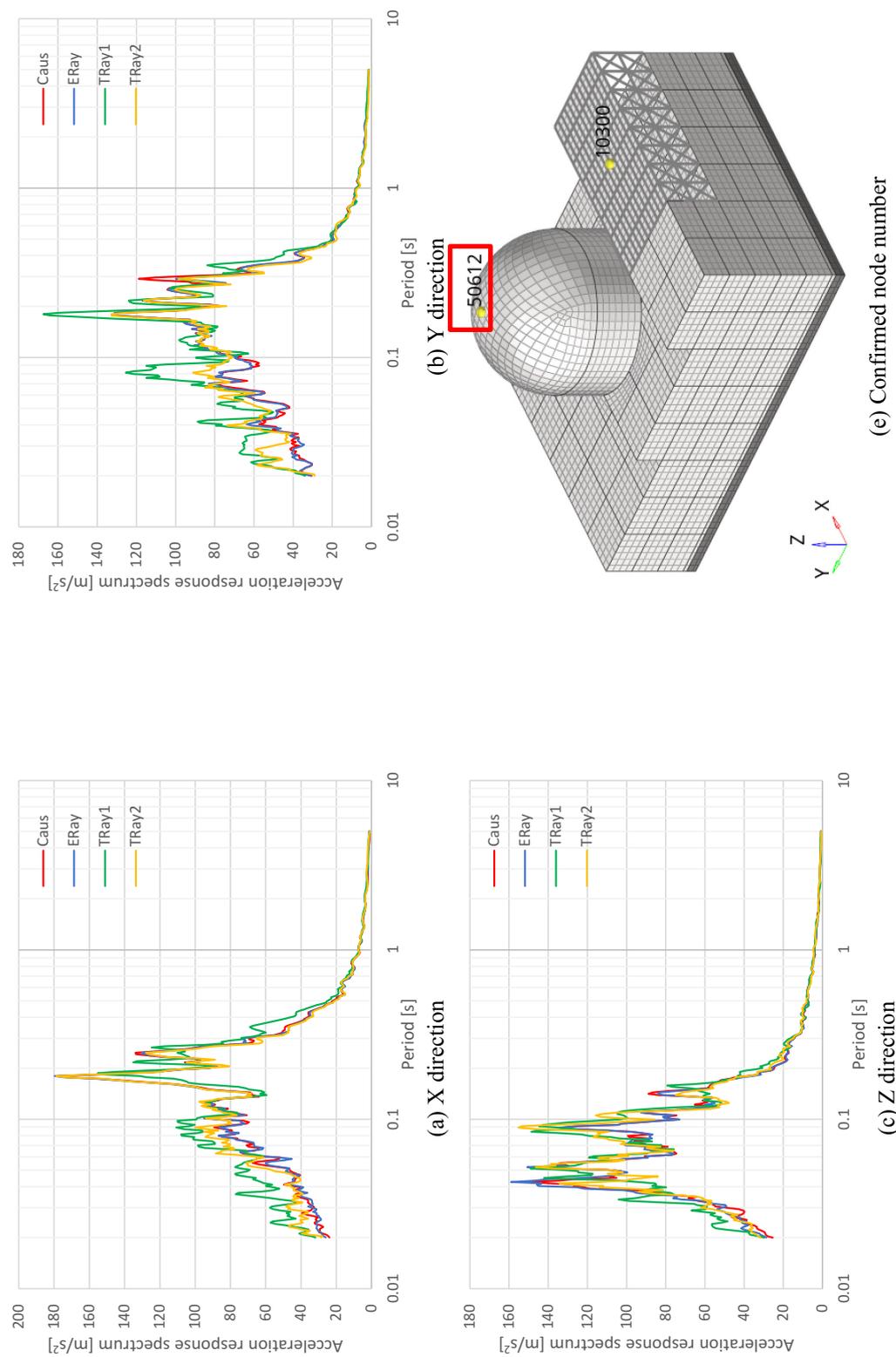
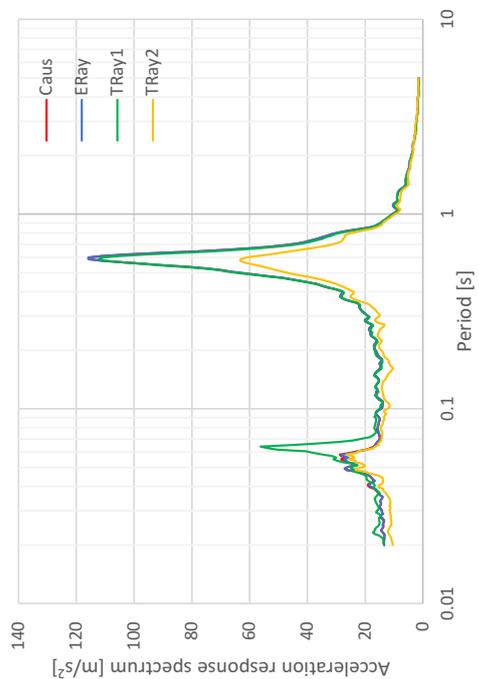
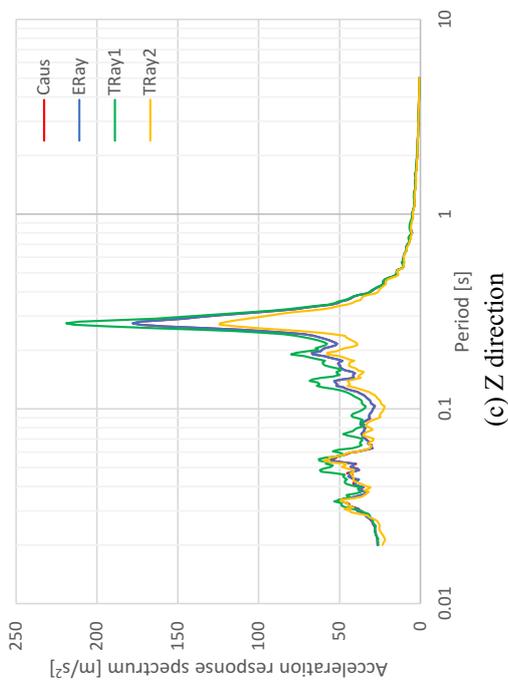


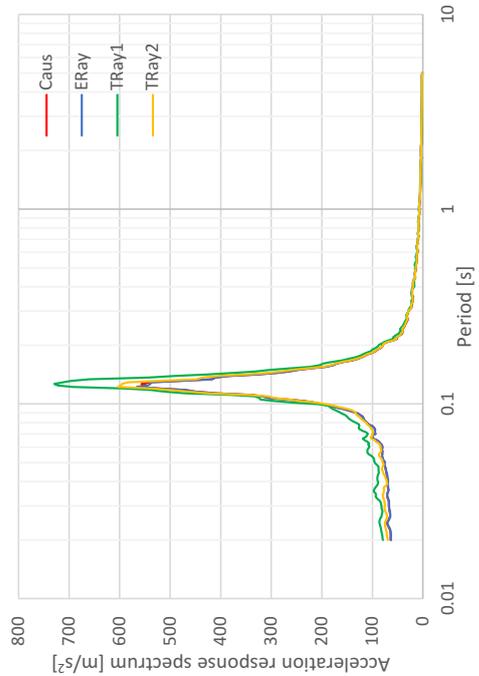
Fig. 5.29 Response acceleration spectrum at the node at the top of O/S (1.5 times)



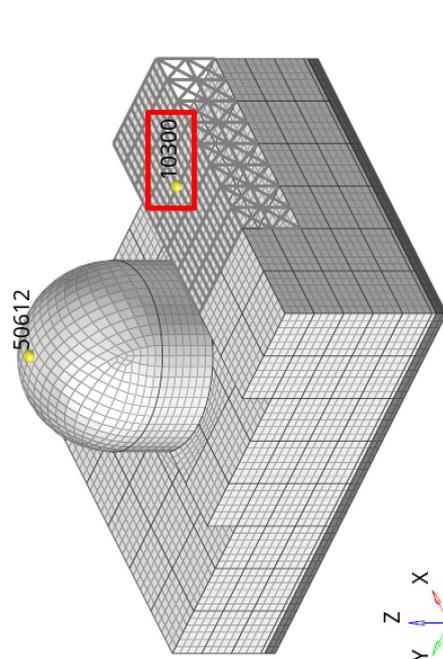
(a) X direction



(b) Y direction



(c) Z direction



(d) Confirmed node number

Fig. 5.30 Response acceleration spectrum at the node at the top of FH/B (1.5 times)

### 5.3.2 各減衰モデルの計算時間

計算時間については、Table 5.6に示している。これらの比較は、入力倍率を1.5倍としたケースである。前述の通り、いずれのケースについても領域分割法で、領域分割数を32として並列計算を行っている。また、線形解法は直接法のMUNPSである。Caus及びERayについては、Ray1及びRay2のような従来の減衰モデルとほぼ同程度の時間で計算できている。非線形問題における全体の計算時間は、線形解法や非線形の処理の時間で要しており、減衰モデルによる時間遅れ項の処理の時間は、ほとんど無視できるレベルになっているものと考えられる。なお、非線形の収束計算の条件や、非線形レベルの状態によっても計算時間に違いが生じると推察される。ただし、因果性に基づく減衰の計算時間は、従来のRayleigh減衰と比較した場合、線形解析が最も差が生じるので、非線形問題ではほとんど問題にならないと考えられる。

Table 5.6 Calculation time

	Caus	ERay	TRay1	TRay2
Total times [s]	380559	383055	384743	383185
Ratio	0.99	1.00	1.00	1.00

※It is shown as a ratio with case TRay1 set as 1.0.

### 5.3.3 瞬間型と初期型の応答の違い

3章のように、強非線形レベルにおいては瞬間型と初期型の応答の違いで、瞬間型の方が、応答が大きく損傷しやすい傾向が確認された。実規模モデルに対してはどのような傾向となるか確認する。

Table 5.7 には、検討ケースを示している。CausT 及び ERayT は、先に検討したケースであり、瞬間型のモデルである。新たに、初期型のモデルである CausI 及び ERayI を追加で検討した。

Table 5.7 Analysis case

	Damping type	Frequency [Hz]
CausT	Tangent Causul (9 term)	$f_{lim} = 35.0$
ERayT	Tangent Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 35.0$
CausI	Initial Causul (9 term)	$f_{lim} = 35.0$
ERayI	Initial Extended Rayleigh (middle accuracy)	$f_{lim} = 35.0$

Fig. 5.31 には、鉄筋の最大軸ひずみの結果を比較している。(a)及び(b)が瞬間型で、(c)及び(d)が初期型である。明瞭に違いが分かるが、実規模モデルにおいても瞬間型の方が初期型に比べ応答が大きくなっている。鉄筋の軸ひずみの平均が、瞬間型では、 $1300 \sim 1400 \times 10^{-6}$ 程度に対して、初期型では、 $950 \sim 1000 \times 10^{-6}$ 程度となっており、1.4倍程度、差異がある結果となった。3章と同様の傾向であった。

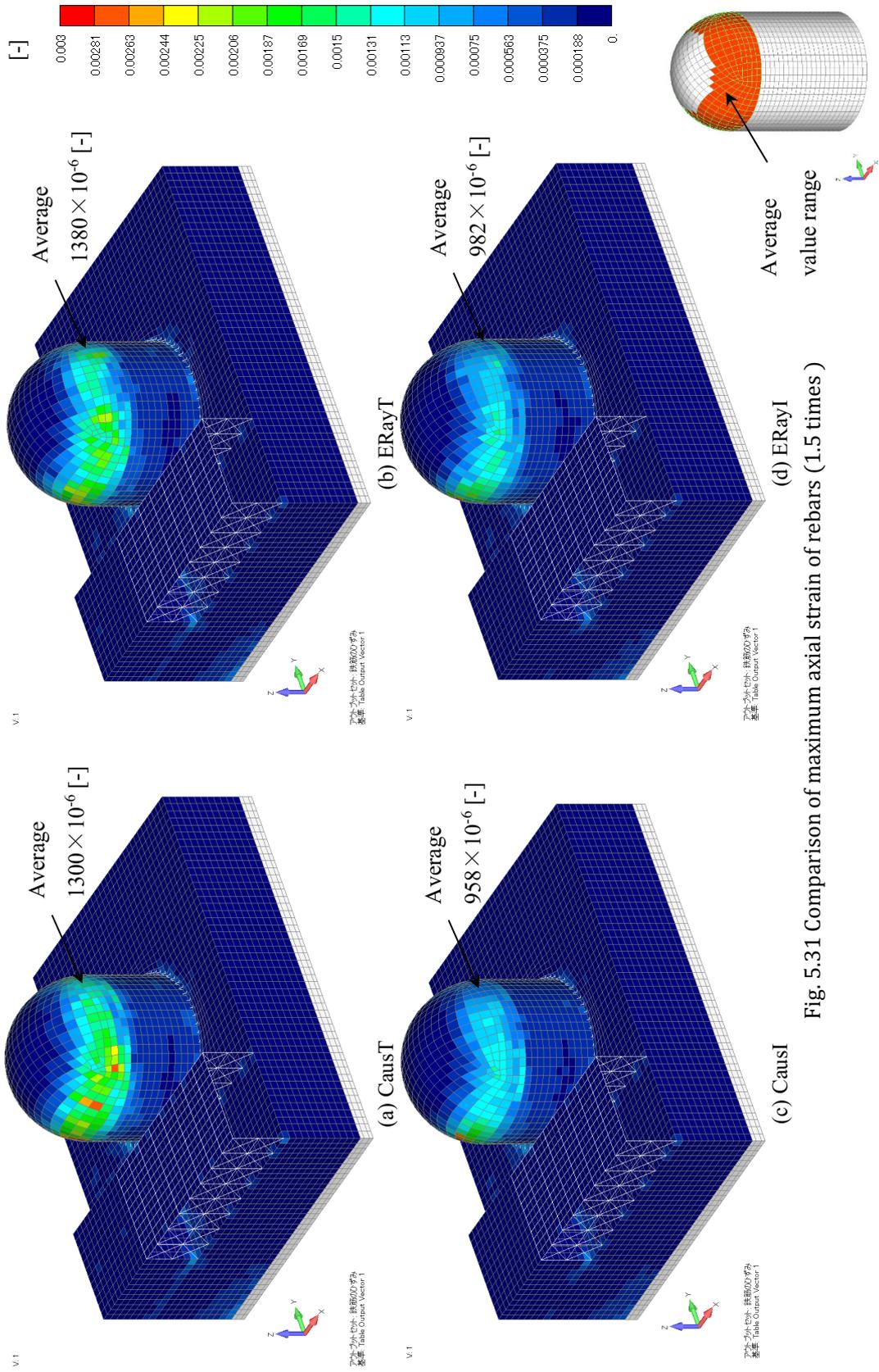


Fig. 5.31 Comparison of maximum axial strain of rebars (1.5 times)

## 5.5 領域分割法と反復法による並列計算の計算速度

近年では、マシン一台の計算速度の向上は頭打ちの状態となっている一方で、多数のマシンを通信で接続し並列処理を行うことで計算速度を向上させている。数値計算の分野では、領域分割法に基づく MPI (Message passing interface) 並列計算<sup>5-6)</sup>が多く行われつつあり、大規模なモデルに対しても高速に計算ができるようになった。例えば、今回のモデルで領域分割数を8とした時では、Fig. 5.32のように分割される。

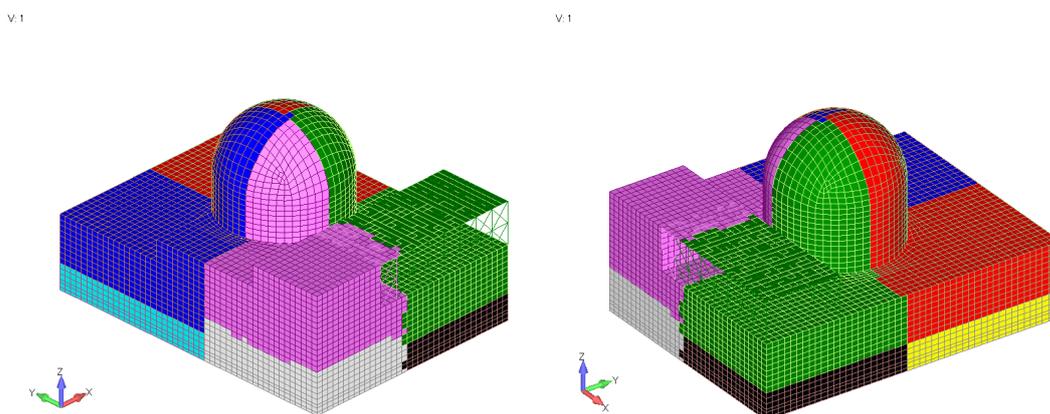


Fig. 5.32 Domain decomposition (Example of 8 domains)

また、動的陰解法では未来の状態を求めるために、未来の状態を未知量として線形の多元連立一次方程式を解くことになるが、一般的にこの処理が最も計算時間を要することとなる。数値計算上での連立方程式の解く方法は、大別すると直接法と反復法がある。直接法は、密行列でも解ける Gauss の消去法や、疎行列でメモリ容量を抑えて解くことができる LU 分解法、さらに疎行列で並列処理が可能な DSS 及び MUMPS がある。反復法では、CG法 (共役勾配法) が良く知られているが、さらに効率よく解くためにマトリクスを不完全 Cholesky 分解により前処理して解くような ICCG 法と呼ばれる手法もある。

直接法では、反復法に比べて安定して精度よく解ける反面、メモリ容量が必要なことと、計算量が増大する。反復法は逆に、収束計算を行って近似的な解を得るので、収束条件によっては解の精度が悪化する恐れがあるが、メモリ使用量は少なく、計算量は直接法に比べれば減少すると言われている。従って、反復法は、大規模なモデルに適していると言える<sup>5-7)</sup>。

ここでは、前節で検討した 1.0 倍の入力動における Caus のケースについて、直接法である MUMPS から ICCG 法に切り替えて検討した。また、Table 5.8 及び Fig. 5.33 には、領域分割数 (並列数) を 8~256 まで変化させ、計算時間を示している。

並列数が 8~64 までは、概ね並列数を増加した分だけ計算時間が減少していることが分かる。128 以上では、並列数分だけの減少効果はないものの、256 で行えば 1 日も掛らずに

計算することができた。

Table 5.8 Calculation time

Parallels	8	16	32	64	128	256
Total time [s] (day)	942698 (10.9)	568753 (6.6)	252003 (2.9)	146206 (1.7)	88588 (1.0)	61429 (0.7)
Ratio*	1.00	0.603	0.267	0.155	0.0940	0.0652

※It is shown as a ratio with the number of parallels 8 as 1.0.

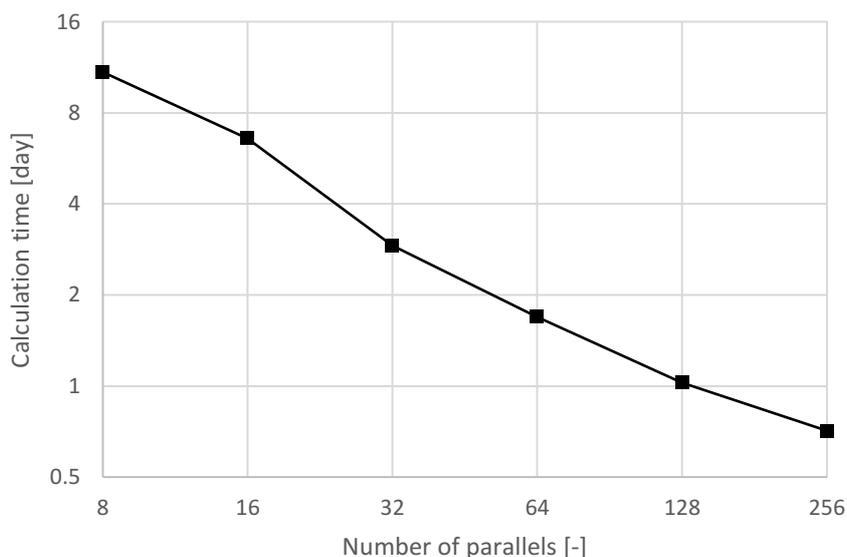


Fig. 5.33 Calculation time

前述の32並列のMUMPSでは、計算時間が376736[s]かかるのに対して、今回の32並列のICCG法では252003[s]であり、反復法によって計算速度が向上している。

以上より、領域分割法と反復法による計算速度の向上を確認した。また、因果性に基づく減衰モデルに対しても何ら操作を行うことなく、並列計算が可能であることも確認できた。

## 5.6 5章のまとめ

実規模モデルとして仮想の原子力発電所を対象に、鉄筋コンクリートによる非線形解析を実施した。因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰と、従来の Rayleigh 減衰モデル（基準振動数を変更した2ケース）と比較した。非線形問題においても、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰共に、2ケースの Rayleigh 減衰の結果と比較することで、4章の線形問題の結果と同様の傾向を示していることから、適切な減衰比で評価が可能であると判断できる。

今回の実機モデルでは、特に O/S で損傷しているが、非線形レベルが強くなると、履歴減衰が初期減衰に比べ支配的となり、非線形レベルが弱い場合と比べて、それぞれ減衰モデルの結果の違いが小さくなることが確認できた。2章の簡易モデルの検討と同様の傾向であった。

なお、2章のまとめと同様で、大部分の FH/B や RE/B ではほとんど線形か弱非線形レベルであるため、非線形問題に対しても、減衰モデルが建屋の応答に及ぼす影響が大きいと考えられる。

瞬間型と初期型の減衰モデルの違いでは、瞬間型の方が初期型に比べて、鉄筋の軸ひずみの応答が大きく評価された。3章と同様の傾向であり、実規模モデルに対しても、瞬間型は構造の健全性に対して保守性のある手法といえる。

領域分割法に基づく MPI 並列計算を実施した。因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰に対しても、何ら操作を行うことなく解析が可能であり、8 並列で 11 日程度かかっていたものが、256 並列で計算すると 0.7 日で、高速に計算することができた。

これらの大規模モデルの検証により、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰の有用性を確認することが出来た。

## 5章の参考文献

- 5-1) 東京電力ホールディングス株式会社: 柏崎刈羽原子力発電所6号及び7号炉 地震による損傷の防止について, 柏崎刈羽原子力発電所6号及び7号炉審査資料, KK67-0100 改 34, 2017.1, <https://www.da.nra.go.jp/file/NR000083395/000180031.pdf>,
- 5-2) 土木学会: コンクリート標準示方書[設計編], 2012
- 5-3) 杉原正顯, 室田一雄: 線形計算の数理, 岩波書店, 2009
- 5-4) Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., Elkhodary, K.I.: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures Second Edition, John Wiley & Sons, Ltd, Chapter 6, 2014
- 5-5) 崔炳賢, 西田明美, 川田学, 塩見忠彦, 李銀生: 原子炉建屋の3次元有限要素モデルを用いた地震応答解析手法に関わる標準的解析要領(受託研究), JAEA-Research, 2021-017, 2022.3, <https://doi.org/10.11484/jaea-research-2021-017>
- 5-6) 奥田洋司, 中島研吾: 並列有限要素解析[I] クラスタコンピューティング, 培風館, 2004
- 5-7) システム計算科学センター, 東京大学人工物工学研究センター: 平成25年度大規模施設の構造を計算科学手法により評価するための基盤技術に関する共同研究開発(共同研究), JAEA-Review, 2015-011, 2015.9, <https://doi.org/10.11484/jaea-review-2015-011>



## 第6章 結 論

本研究では、因果性に基づく減衰（因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰）が、従来の Rayleigh 減衰や、近年提案された Uniform 減衰と比べて、減衰比の精度や計算効率の高さが良好であることを明らかにした。初めて、鉄筋コンクリートを対象とした非線形解析を実施し、因果性に基づく減衰が、精度よく実験結果を再現できることを明らかにした。

仮想原子力発電所の 3DFE モデルを対象に、微小変形レベルで、線形問題から鉄筋コンクリートのような材料の非線形問題に対して地震応答解析を実施し、因果性に基づく減衰モデルの有用性について明らかにした。

以下に、章ごとに得られた知見をまとめる。

第1章「緒言」では、本研究の背景と目的、及び本論文の構成を述べた。

第2章の「時刻歴応答解析の減衰モデル」では、時刻歴応答解析で用いられる従来の Rayleigh 減衰と、今回の検討対象とした近年の減衰モデルである因果性に基づく減衰及び Uniform 減衰の概要を説明した。また、簡易なモデルにより基本的な性状を把握することを目的とし、線形問題と非線形問題に対して検討を行った。

線形問題では、減衰比や固有振動数の変化を確認した。減衰比が一定とみなせる振動数帯（適応振動数域  $W_{\xi} = \text{高次側振動数 } f_{high} / \text{低次側振動数 } f_{low}$ ）は、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰では 23.8 及び 21.3 であり、Uniform 減衰では、可変でかなり幅広く設定可能である。ただし、減衰比の精度に関しては、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰の方が優れていた。これは、減衰による固有振動数の変化が影響し、減衰比 3% で  $W_{\xi} = 20$  と仮定した Uniform 減衰では、適応振動数域の高次側で最大で 8% 程度、固有振動数が増加し、減衰比が低下した。一方で、因果減衰及び拡張 Rayleigh 減衰は、適応振動数域内の端では僅か 3% 及び 2% 程度、固有振動数が減少し、適応振動数域内の中央では僅か 1% 程度増加するが、

固有振動数の増減が小さいためあまり減衰比に影響を与えなかった。

非線形の問題では、ホワイトノイズ波を用いて、各減衰モデルが、**Bi-linear** 形の復元力特性有する解析対象物の塑性率と加速度応答に与える影響を定量的に分析した。その結果では、因果性に基づく減衰モデルが **Uniform** 減衰に比べモード減衰の結果と精度よく対応しており、減衰モデルとして好ましい結果であった。計算時間では、**Uniform** 減衰が高次側の減衰比が小さく評価される影響により、不安定な結果となってしまう、細かく時間刻みを設定しないと安定した結果が得られず時間がかかってしまった。一方で、因果性に基づく減衰モデルでは、**Rayleigh** 減衰と同等の解析時間で良好な結果が得られた。

簡易なモデルにおける線形及び非線形問題に対して、減衰比の精度や解析の安定性の観点で、因果性に基づく減衰が、有力な減衰モデルであることを明らかにした。

第3章の「鉄筋コンクリート材料を対象とした非線形 3DFE 解析」では、初めに FE モデルで採用されている、長沼らの鉄筋コンクリート材料の非線形構成則の概要を説明した。また、解析結果の妥当性を示すことを目的で、過去に実施された動的加振試験の再現解析を実施した。今回初めて、因果性に基づく減衰モデルを用いて、鉄筋コンクリートの非線形材料を与えた 3DFE モデルによる非線形動的解析を実施した。その結果では、良好に実験結果を再現できていることと、減衰マトリクスの作成時において剛性マトリクスを瞬間型にすることによって、実験結果や初期型の解析結果よりも構造物がより損傷している結果が確認された。本結果と既往の知見を勘案して、建屋の構造的な健全性を評価する場合には、瞬間型を採用することが推奨される。ただし、初期型においても良好に実験結果を再現できていることから、初期型を用いる場合は瞬間型よりも応答が過少に評価されることについて留意する必要がある。

第4章の「実規模モデルを対象とした線形問題の3方向同時入力による地震応答解析」では、仮想原子力発電所を模擬した、節点数が2400程度のFEモデルを作成し、地震動を3方向に入力し線形の動的解析を実施した。各減衰モデルであるモード減衰、因果性に基づく減衰及び **Rayleigh** 減衰を対象に、最大変位分布、最大加速度分布及び加速度応答スペクトルの結果を比較した。ここでは、モード減衰を目標とする結果とした。結果については、因果性に基づく減衰モデルが、モード減衰と最も良好に対応しており、適切な減衰比で評価されていることを確認した。また計算時間は、モード減衰が最も遅く、因果性に基づく減衰については、従来の **Rayleigh** 減衰とほぼ同等であった。非線形の問題や更に大きな解析モデルを扱う場合では、モード減衰では現実的な時間で検討することが不可能に近いことが分かった。従って、因果性に基づく減衰は、大規模モデルを対象としても、減衰モデルの性能や計算時間に対して、十分な実用性を有する減衰モデルであることが明らかとなった。

第5章の「実規模モデルを対象とした非線形問題の3方向同時入力による地震応答解析」では、実規模モデルを対象に、鉄筋コンクリートの非線形材料を扱うために、4章で用いたメッシュを細かく分割し、節点数が21000程度の大規模FEモデルを作成した。3章に示した非線形の構成則を適用している。もはや非線形のモード減衰で検討できる規模ではなく、目標とする結果が無い状態であったが、2章から4章までに得られた解析結果やその傾向を踏まえて妥当性を示した。弱非線形レベルでは、4章の線形時とほぼ同様な結果となることが想定されるので、建屋の全体的な変位応答や鉄筋の軸ひずみ分布等の傾向から、因果性に基づく減衰が、従来の Rayleigh 減衰に比べて適切な減衰で評価できていることを示した。非線形レベルが強くなると、初期減衰よりも損傷による履歴エネルギー吸収による履歴減衰が支配的になることが2章の結果により把握されており、5章の結果においても、線形時や非線形レベルが弱い時と比べて、強非線形レベルでは履歴減衰の影響により各減衰モデルによる応答の差が小さくなっていることを鉄筋の軸ひずみや加速度応答スペクトルにより確認した。さらに、3章と同様に、瞬間型の方が初期型に比べて応答が大きくなっており、瞬間型は構造の健全性評価においては保守性のある手法であることを明らかにした。

非線形問題の計算時間は、線形解法や非線形の処理の時間が支配的であるため、因果性に基づく減衰と従来の Rayleigh 減衰で違いがほとんどなかった。さらに、領域分割法と反復法 (ICCG法) を用いることで計算速度を向上させることが可能であるとともに、因果性に基づく減衰に対しても何ら操作を行うことなく、領域分割法に基づく並列計算に適用できることを確認した。

これらの検証により、因果性に基づく減衰モデルは、工学的な観点で、減衰の性能として精度が高いことと、従来の Rayleigh 減衰と同様な計算効率の高さを有しており、今後想定される大規模FEモデルにおいて有用性のある減衰モデルであることが証明された。

### 因果減衰と拡張 Rayleigh 減衰の違いと使い分けについて

本論では、因果性に基づく減衰モデルとして因果減衰と拡張 Rayleigh 減衰を用いて検討したが、3章の再現解析の中で、若干ではあるが RUN5 において因果減衰の方が拡張 Rayleigh 減衰に比べ変位応答が大きく評価される傾向となった。この理由として次のような考察を行っている。因果減衰では低次側の減衰が低く評価されるのに対して、拡張 Rayleigh 減衰では、質量項により低次側の減衰が大きく評価される。RUN5 の最終状況では、構造物がかなり損傷いるため、弾性時の固有振動数から低次側にシフトしていることが考えられるため、低次側の減衰比の影響により、差が生じたものと分析を行った。

従って、この影響については、崩壊時までの強非線形時の問題の他に、次のような構造物や問題に対して留意が必要になるものと想定される。

一つは、免震構造物である。既往の研究により、Rayleigh 減衰の質量項による過大な減衰力が生じることが指摘されている<sup>6-1)</sup>。

また、基礎の浮き上がりや滑りによって、構造物が剛体変位するような問題に対しても、質量項によって応答が過小評価となる場合も懸念される。

このような問題に対しては、茂木<sup>6-2)</sup>が主張しているように、拡張 Rayleigh 減衰よりも因果減衰（瞬間型）が推奨される。

## 今後の課題・展望

最後に、本研究の今後の課題・展望について述べる。大きく2点記載した。

### ○減衰比が一定とみなせる振動数の幅

実規模モデルの検証では、1.7~30 [Hz] (30/1.7=18程度) までの応答に対して減衰比が一定で評価したい問題を扱った。しかしながら、30 [Hz]以上にも局所の固有モードが存在するため、全体モードから局所のモードまで、 $W_{\xi} = 23.8$ 以上の幅広い振動数で減衰率を一定とすることは、現状、提案されている因果性を有する減衰モデルでは対応が困難である。このような問題に対応するには、更なる減衰比が一定とみなせる振動数帯の拡張が期待される。

### ○動的陽解法

今回の積分手法として、動的陰解法 (Newmark $\beta$  法) を用いて検討を実施した。この方法だと、無条件で安定であることから減衰モデルの種類において解析時間刻みを細かくするような制約が無い。一方で、動的陽解法においては、条件付き安定であり CFL 条件を満たす解析時間刻みが要求されるが、さらに減衰モデルで剛性比例型減衰を用いると CFL 条件よりもさらに条件が悪化し、解析時間刻みを非常に細かく設定しなければならないという、減衰モデルの選択に制約のある問題点が存在する。この悪化は、解析モデルの最高時の固有振動数に対して、減衰率が過大に評価される影響であるため、剛性比例型減衰に対して問題となる。この点を踏まえると、因果性を有する減衰モデルは、剛性比例型減衰を用いているため影響があるが、一方で Uniform 減衰は、振動数の高次側は減衰比が 0 に低下するので、ほぼ（高次側で固有振動数が高くなるので少し安定性の条件が厳しくなる）CFL 条件を満たせば問題なく、この問題点に対しては克服しているモデルと言える。

動的陽解法は、連立方程式を解くことなく解を得ることができるので、非常に並列計算にメリットがあるため、今後有力な手法となる可能性を秘めている。因果性に基づく減衰モデルは、今回明らかにしたように減衰モデルとして精度が良く、動的陽解法に適用した場合も考えられるが、解析時間刻みの観点で課題が残っていると見える。

## 6章の参考文献

- 6-1) Anajafi, H., Medina, R.A., Santini-Bell, E.: Effects of the improper modeling of viscous damping on the first-mode and higher-mode dominated responses of base-isolated buildings, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 49, pp.51-73, 2020.1
- 6-2) Mogi, Y.: STUDY ON A DAMPING MODEL SUITABLE FOR INELASTIC RESPONSE HISTORY ANALYSIS OF LARGE-SCALE 3D MOMENT-FRAME, DOCTORAL THESIS (Hiroshima Univ.), 2023.9  
茂木良宏：大規模3次元弾塑性骨組解析に適した減衰モデルに関する研究, 広島大学博士論文, 2023.9



## 付録（動的陽解法）

### A.1. はじめに

近年のコンピュータ技術の進歩により、建築分野では 3 次元のモデルにより動的解析が実施されるようになった。原子力分野では、従来まで多質点系モデルにより時刻歴応答解析が行われてきたが、近年では、原子力発電所の規制基準が強化され、より精緻にシミュレーションするために、大規模な 3 次元の有限要素モデルを用いて時刻歴応答解析を実施することが多く見られるようになった。

時刻歴応答解析の直接積分法では、Newmark- $\beta$  法に代表されるように動的陰解法が用いられることが一般的であるが、最近では、衝突解析でよく用いられる動的陽解法で地震応答解析を試みた事例 A-1, A-2, A-3)がある。特に文献 A-1), A-2)において、これまで解析が困難だった非線形の大規模な 3 次元の有限要素のモデルを対象に、並列計算することで数日程度の現実的な解析時間で検討されている。

動的陽解法<sup>4,5)</sup>は、運動方程式の時間積分を解く際に、質量マトリクスを対角マトリクスとすれば、連立方程式を解く必要がなく、また現在の時刻の値（既知量）から未来の時刻の値（未知量）を算出するため、動的陰解法<sup>4)</sup>の非線形解析で発生するような不釣り合い力の処理が不要である。これらの利点を有することから、計算プログラムをシンプルにでき、高速化が容易となる。また、並列計算にも向いており、近年のクラスタ型のスーパーコンピュータを使った大規模並列計算機に適用しやすいと考えられる。従って、今後の建築構造物の詳細かつ大規模な応答解析において、動的陽解法がより重要となることが考えられる。

一方で、課題としては、以下が挙げられる。動的陽解法では、解析時間刻みを勘案しながら、減衰モデルを採用する必要がある。動的陰解法と異なり、条件付きの安定であるため、安定条件を満足するために解析時間刻みを細かくする必要がある。減衰モデルの設定で、質量比例型減衰を採用すれば、CFL 条件（クーラン条件）を満足する解析時間刻みとなるが、剛性比例型減衰及び Rayleigh 減衰を用いると、CFL 条件よりもさらに安定性の条件が厳しくなってしまう、解析時間刻みをさらに細かく設定する必要が生じ、減衰モデルによって、計算効率が損なわれてしまう。

また減衰モデルの性質に関しては以下がいえ。減衰のメカニズムが不明確な点も多いため、実際の現象を模擬した減衰モデルの設定は難しい。ただし、工学的には、3次元モデルの複数の主要なモードに対して過大あるいは過少の減衰とならないような、減衰定数がほぼ一定となる減衰モデルが望まれる。

中村は、適応する振動数域を限定することで、振動数非依存性を近似的に満たす減衰モデルとして、因果的履歴減衰モデル（因果減衰と呼ぶ）を提案した A-6~A-10)。さらに、因果減衰と質量比例減衰を組み合わせた拡張 Rayleigh 減衰も提案されている。従来の Rayleigh 減衰よりも、遥かに広範囲の振動数域で減衰比が一定で評価できることを確認している。ただし、提案された減衰は動的陰解法を基礎として検討されている。

そこで本報では、最大 50 Hz 程度までを一定とする、2つの因果性を有する減衰モデルの動的陽解法への適用性を検討することを目的とする。また、2つの因果性を有する減衰モデルを用いることで、従来の Rayleigh 減衰モデルを用いるよりも計算効率を高める可能性があることを確認する。最終的には、動的陽解法の利点が発揮される非線形問題での検討を目指す。本報ではその第一歩として線形弾性問題における適用性について検討する。

## A.2. 速度項を後退差分近似した動的陽解法の概要

動的陽解法<sup>A-4, A-5</sup>は、衝撃や衝突現象などでよく用いられる解析手法である。時間方向を中央差分法により離散化することで、運動方程式では質量マトリクス $[M]$ と減衰マトリクス $[C]$ の逆マトリクスを解くことになる。質量マトリクスと減衰マトリクスを対角マトリクスとすれば、陽な形となり連立方程式を解く必要がなくなる。ただし、解の安定性のため、CFL条件(クーラン条件)を満たす必要があるので、解析時間刻みを細かくする必要がある。

一般的な動的陽解法では、質量マトリクスと減衰マトリクスは対角マトリクスしか扱えないため、工夫をしないと非対角項に数値がある剛性比例型減衰が扱えない。

そこで本検討では、因果性に基づく減衰モデルが使用できるように、速度項を後退差分近似した動的陽解法を採用する。

### A.2.1 運動方程式

初めに、一般的な運動方程式については、式(A.1)のように表すことができる。

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (\text{A.1})$$

ここに、速度 $\dot{\mathbf{u}}(t)$ と加速度 $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ を従来の中央差分近似により表すと、

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{2\Delta t} \cdot (\mathbf{u}(t + \Delta t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) \quad (\text{A.2a})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{\Delta t^2} \cdot (\mathbf{u}(t + \Delta t) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t - \Delta t)) \quad (\text{A.2b})$$

また、時刻 $t$ を $n$ ステップ目とすれば、 $t + \Delta t$ では $n + 1$ ステップ目で、 $t - \Delta t$ では $n - 1$ ステップ目を意味している。式(A.2a)及び式(A.2b)を式(A.1)に代入することで、一般的な動的陽解法による運動方程式を式(A.3a)で得ることができる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \cdot \mathbf{C} \right) \cdot \mathbf{u}(t + \Delta t) \\ & = \mathbf{f}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \cdot (2\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}(t - \Delta t) \end{aligned} \quad (\text{A.3a})$$

左辺を未知量で、右辺を既知量で整理している。すると、質量マトリクス $\mathbf{M}$ と減衰マトリクス $\mathbf{C}$ を対角マトリクス(集中化)とすれば、式(A.3a)は陽な形のスカラーで解くことが可能となる。ただし、一般的な動的陽解法では、減衰マトリクスも対角マトリクスにする必要があるため、剛性比例型減衰や、これと同様に速度比例成分を有する因果減衰モデルを用いることができず、質量比例型減衰しか扱うことができない。

そこで、式(A.2a)の速度項を後退差分近似すると、式(A.4a)のようになる。

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{\Delta t} \cdot (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) \quad (\text{A.4a})$$

同様に、式(A.4a)及び式(A.2b)を式(A.1)に代入すれば、速度項を後退差分近似した動的陽解法による運動方程式を式(A.5a)で得る。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t^2} \cdot \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{u}(t + \Delta t) \\ & = \mathbf{f}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \cdot (2\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) + \frac{1}{\Delta t} \mathbf{C} \cdot (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

よって、式(A.5a)であれば、減衰マトリクスに剛性マトリクスを使用することができるので、式(A.6a)のように、式(A.5a)の右辺で、式(2.18)（本論、因果減衰モデルの場合）あるいは式(2.28)（拡張 Rayleigh 減衰モデルの場合）の第一項の係数マトリクスを減衰マトリクス  $\mathbf{C}$  と置き換え、第二項を追加すれば、動的陰解法と同じく 2 つの因果性に基づく減衰モデルを用いることが可能となる。

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \cdot \mathbf{u}(t + \Delta t) \\ & = \mathbf{f}(t) - \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}(t) + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} \cdot (2\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) + \mathbf{f}_{d1}(t) + \mathbf{f}_{d2}(t) \end{aligned} \quad (\text{A.6a})$$

因果減衰モデルの場合：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{d1}(t) &= (\beta' \mathbf{K}) \cdot \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) \\ \mathbf{f}_{d2}(t) &= 2\xi_{aim} \mathbf{K} \cdot \sum_{j=1}^N (b_j \mathbf{u}(t - j \cdot t_{lim})) \end{aligned} \quad (\text{A.7a})$$

拡張 Rayleigh 減衰モデルの場合：

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{d1}(t) &= (\alpha' \mathbf{M} + \beta' \mathbf{K}) \cdot \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t - \Delta t)) \\ \mathbf{f}_{d2}(t) &= \mathbf{K} (\gamma'_1 \cdot \mathbf{u}(t - t_{lim}) + \gamma'_2 \cdot \mathbf{u}(t - 2t_{lim})) \end{aligned} \quad (\text{A.8a})$$

### A.2.2 数値安定性

動的陰解法では絶対安定で解くことが可能であるが、中央差分法より定式化された動的陽解法では、条件付きの安定である。

T.Belytschko<sup>A-4)</sup>らが、制御理論で使用される  $z$  変換を用いて安定性解析を実施している。その結果によれば、式(A.5a)の安定条件は、式(A.9)となる。

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{1}{\pi f_{max}} \left( \sqrt{\xi_{max}^2 + 1} - \xi_{max} \right) \quad (\text{A.9})$$

ここに、添え字  $max$  は、モデルの固有モードの最高次数を表しており、 $f_{max}$  は最高次数の振動数で、 $\xi_{max}$  は最高次数の減衰比を表している。従って、これらの数値が大きくなるほど、安定のための解析時間刻み  $\Delta t_{crit}$  が小さくなる。

なお、一般的な動的陽解法（式(A.10)）の安定条件は、

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{1}{\pi f_{max}} \tag{A.10}$$

であり、一般に CFL 条件（クーラン条件）と呼ばれる。

### A.3. 例題解析

#### A.3.1 簡易モデルによる検証

##### A.3.1.1 概要

因果性に基づく減衰モデルの検証のために、Fig. A.1 に示す簡易な多質点モデルの時刻歴応答解析による数値解析を行い、各振動数で実現している減衰比と共振振動数の精度を確認する。

解析モデルは、Table A.1 に示すように、質点が 100 個で、非減衰の固有振動数が 0.6Hz, 1.2Hz, 1.8Hz, ..., 60Hz（0.6Hz 刻み）となるように、ばねの剛性を一定で質量を調整させている。ばねは、それぞれの質点と固定端を結び付けてモデル化している。

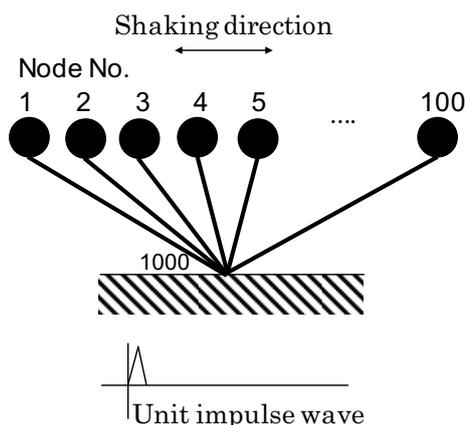


Fig. A.1 Multi DOF model

Table A.1 Property of multi DOF model (linear)

Node No.	Mass [ton]	Natural frequency [Hz]
1	$7.036 \times 10^1$	0.6
2	$1.759 \times 10^1$	1.2
3	$7.818 \times 10^0$	1.8
...	...	...
100	$7.036 \times 10^{-3}$	60.0

Spring stiffness  $k(f)$  is 1000 [kN/m].

減衰については、本論の因果減衰の 9 項モデルと拡張 Rayleigh 減衰（高精度モデル）とし、減衰比を $\xi_{aim} = 0.01, 0.02, 0.03, 0.05$ で、 $f_{lim}$ を 60 Hz とする。

解析の時間積分手法は、A.2 節で定式化した速度項を後退差分近似した動的陽解法と、文献 A-6)から文献 A-9)で検証されている Newmark- $\beta$  ( $\beta = 0.25$ )（動的陰解法）とする。解析の時間刻みは、高振動数域の応答を評価するために、動的陽解法及び動的陰解法ともに 0.0005 [s]とする。なお、十分に時間刻みが細かいため、動的陽解法で安定した解が得られる。出力時間刻みも同様に 0.0005 [s]とする。

地動加速度として 0.0005 [s]の間に 0 から 1 となるような、単位パルス波を与えて、各質点の応答を確認している。

確認する伝達関数は、振動数領域で各質点の応答加速度時刻歴を地動加速度で除することによる算出される。算出された伝達関数のピーク値 $p$ を用いて、理論式である 1 自由度系の伝達関数のピーク高さと減衰比の関係の式(2.48)（本論記載の式）により、実現している減衰比 $\xi(f_0)$ が計算できる。 $\xi(f_0)$ と目的とする減衰比 $\xi_{aim}$ の比をとることで、減衰比の精度 $R_{\xi}(f_0)$ を算定する。

また、減衰を有する振動系の共振振動数 $f_0'$ は非減衰系の共振振動数 $f_0$ の関数より、式(2.49)（本論記載の式）となる。解析で算定された各振動系のピーク値が現れる振動数と、式(2.49)で得られる $\xi(f_0) = \xi_{aim}$ とした $f_0'$ から、実現している共振振動数の精度 $R_{res}(f_0)$ を算定する。

### A.3.1.2 結果

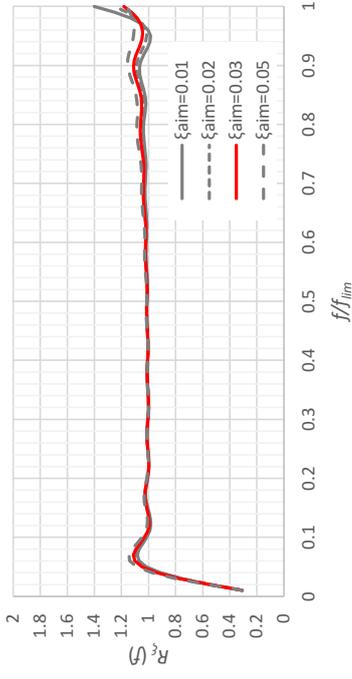
Fig. A.2(a)～(d)に減衰比の精度を、Fig. A.3 (a)～(d)に共振振動数の精度を示す。それぞれの図で、(a)及び(b)には、減衰を因果減衰 9 項モデルとした、動的陽解法と動的陰解法との比較を行い、同様に、(c)及び(d)には、拡張 Rayleigh 減衰高精度モデルとした比較の結果を示している。

いずれの図を見ても、動的陽解法でも、動的陰解法と同程度の精度で減衰比と共振振動数が評価できていることが確認できる。

動的陽解法及び動的陰解法ともに共通する結果としては、2 章で説明した特徴が得られている。減衰比の精度と共振振動数の精度に着目して以下に示す。

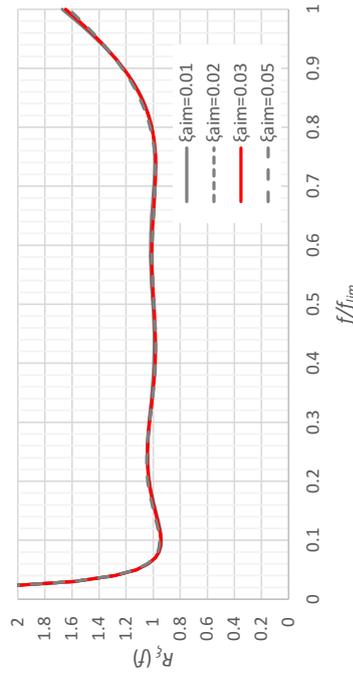
減衰比の精度としては、Fig. A.2(a)及び(b)より因果減衰 9 項モデルでは、Fig. A.2(c)及び(d)のような因果減衰 2 項モデルをベースに提案された拡張 Rayleigh 減衰に比べ、過去の因果減衰力を多く使用しており、減衰が広範囲で一定となる。高振動数側の結果に着目すると、2 章の結果よりも解析で得られた結果が 1.0 に近くなっている。それは、応答が最も大きくなる時刻が高振動の質点であるほど早期に生じるが、因果減衰力が生じるまで 1 項目で最も早くて $1/f_{lim}$  (1/60 s)であり、最も遅くて $N/f_{lim}$  (9 項モデルでは 9/60 s)かかり、初期の時刻では因果減衰力が生じていないためである。ただし、今回のような初期の時刻に瞬時的な入力でも結果を見る限り、応答結果に与える影響は小さいことが確認できる。

共振振動数の精度としては、Fig. A.3a)～(d)のように、振動数域  $0 \sim f_{lim}$  ( $f/f_{lim} = 1.0$ )の両端部において、 $R_{res}$ が 1.0 を下回り共振振動数がより低振動数側に評価される。因果減衰 9 項モデル (Fig. A.3 (a),(b)) に比べ、拡張 Rayleigh 減衰モデル (Fig. A.3(c),(d)) の方がより 1.0 に近い値であることが確認できる。これは、時間遅れ成分の項数  $N$  の違いのためであり、項数が少ないほど 1.0 に近い評価となる。また、2 つの因果性に基づく減衰モデル共に減衰比  $\xi_{aim}$  を大きくすると、 $R_{res}$ の精度が 1.0 から離れることが確認できる。



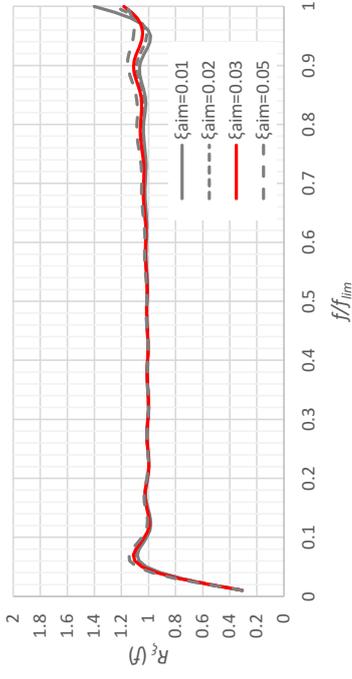
(a) Explicit

(Causal damping 9 term model)



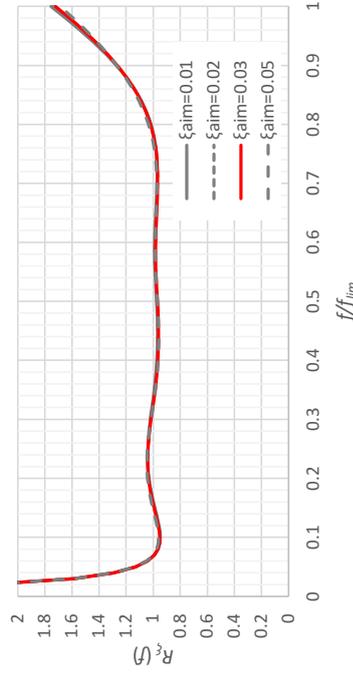
(b) Implicit

(Causal damping 9 term model)



(c) Explicit

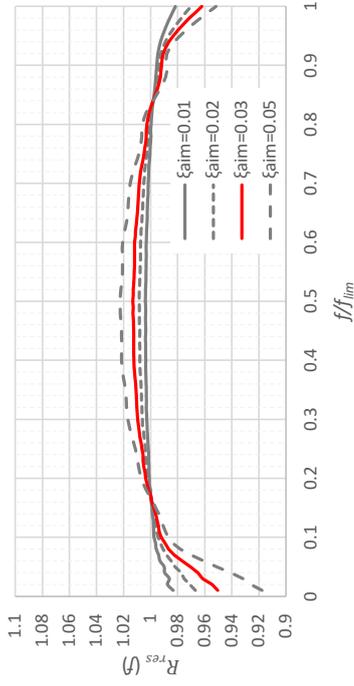
(Extended Rayleigh damping proposed high accuracy model)



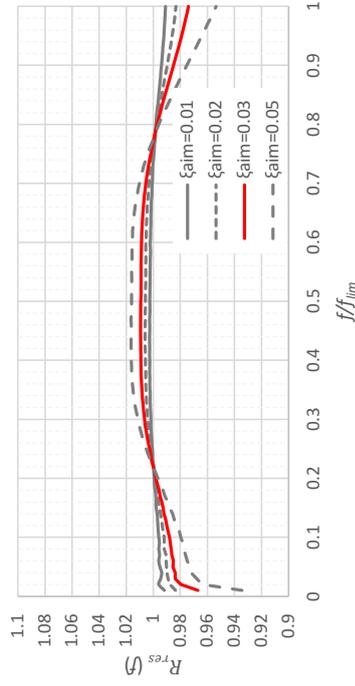
(d) Implicit

(Extended Rayleigh damping proposed high accuracy model)

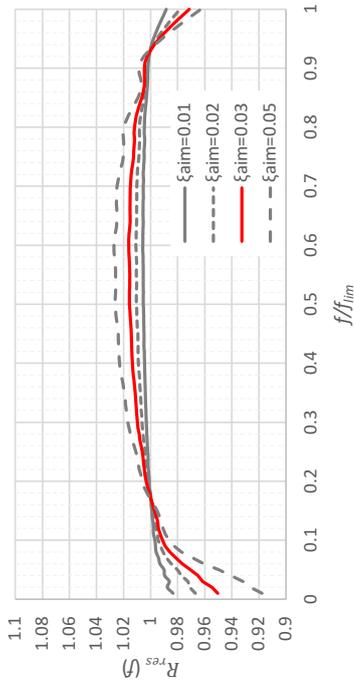
Fig. A.2 Damping ratio



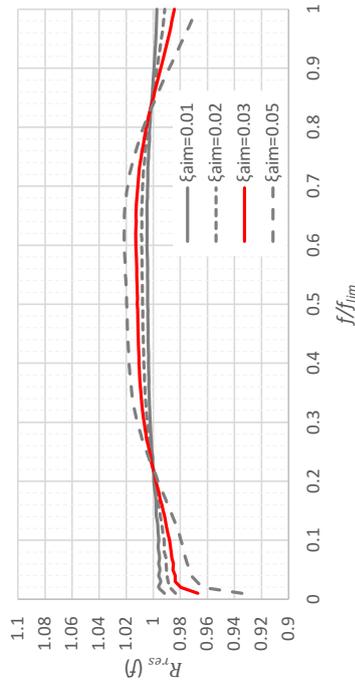
(a) Explicit  
(Causal damping 9 term model)



(b) Implicit  
(Causal damping 9 term model)



(c) Explicit  
(Extended Rayleigh damping proposed high accuracy model)



(d) Implicit  
(Extended Rayleigh damping proposed high accuracy model)

Fig. A.3 Damping frequency ratio

### A.3.2 3次元有限要素モデルへの適用

#### A.3.2.1 モデルの概要

次に、実機への適用性を確認するために、3次元有限要素モデルによる検討を実施する。解析モデルを Fig. A.4 に示す。ドーム状の構造体（シリンダー部とドーム部で構成）とし、直径を 44 m、高さを 58 m とする。シリンダー部の部材厚は 1.5 m とし、ドーム部は 0.75 m としている。要素は Mindlin-Reissner 理論によるシェル要素を使用している。メッシュは、シリンダー部では概ね 2 m 程度で均一にし、ドーム部では中心に向かって徐々に要素が細くなるような分割としている。最小の要素サイズが 0.17 m となった。節点数は 2665（全自由度数は 15558）で、要素数は 2664 であった。拘束条件は、シリンダー脚部の節点を、並進方向及び回転方向全て拘束している。弾性材料とし主要な物性値を Table A.2 に示している。また、モデルの質量の合計は約 11600 ton である。

また、動的陽解法を効率よく解析を行うため、質量マトリクスは対角マトリクスとなるように配慮した。併せて回転慣性質量についても検討と修正を行った。これらについては補足資料（質量マトリクスの扱い）にまとめて示す。

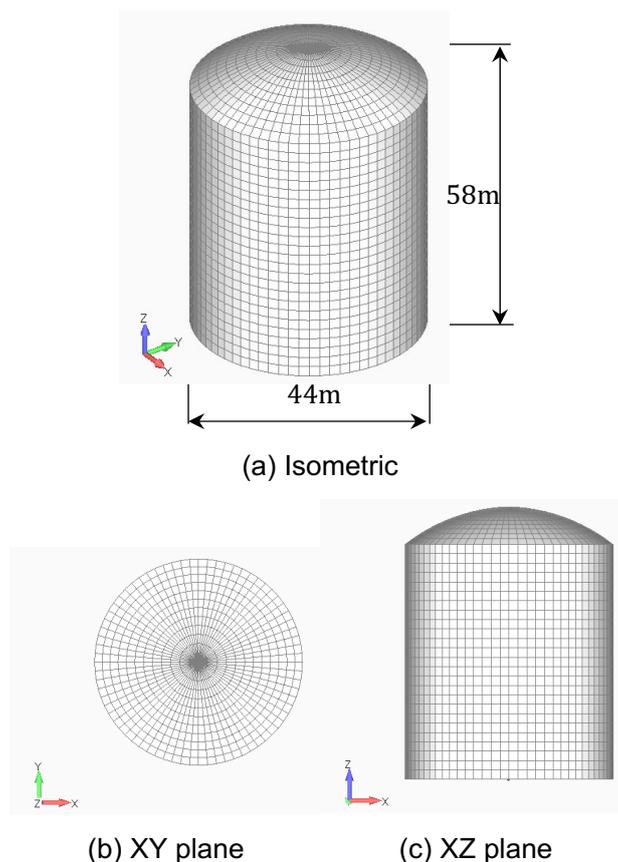


Fig. A.4 Analysis Model

Table A.2 Property of analysis model

	Value	Unit
Young's modulus	$2.27 \times 10^7$	[kN/m <sup>2</sup> ]
Poisson's ratio	0.2	[-]
Density	2.35	[ton/m <sup>3</sup> ]

また、実固有値解析結果は、Fig. A.5 及び Fig. A.6 となった。低次のモードから有効質量比が大きい固有モードで示すと、水平方向（X 方向及び Y 方向）では、1 次モードが 4.81 Hz、2 次モードが 12.5 Hz となり、鉛直方向（Z 方向）では、1 次と 2 次で有効質量比が僅差であり、それぞれ、10.4 Hz と 14.9 Hz となった。変形モードは、水平の一次で構造物底部から頂部に行くほど水平に変形し、二次では、シリンダーの中間で X+ かつ Y-側（45 度方向）に変形し、シリンダー頂部で X- かつ Y+側に変形するような逆対称であった。鉛直の一次では、特にドーム頂部が全体的に変形し、二次では、ドーム頂部が Z+側に変形し、シリンダー頂部で Z-側に変形している。

#### A.3.2.2 時刻歴応答解析の設定

解析に用いる条件は、4.1 節と同じように設定する。荷重は、地動加速度を水平方向（X 方向）と鉛直方向（Z 方向）にインパルスを与えている。応答としては、ドーム頂部の節点に生じる加速度時刻歴で、振動数領域においてこの応答を地動加速度で除することにより、伝達関数を算出し確認する。

Table A.3 に示すケースで結果を比較する。減衰の設定では、全てのケースで減衰比を 0.03 とし、Mode では、モード減衰とし、Mass では、質量比例型減衰で基準振動数を 4.81 Hz、Ray.では、Rayleigh 減衰で 1 つ目の基準振動数を 4.81 Hz で、二つ目を 10.4 Hz（係数の値は  $\alpha = 1.24, \beta = 6.28 \times 10^{-4}$ ）とした。また、Caus.及び ERay.では、因果減衰 9 項モデル及び拡張 Rayleigh 減衰高精度モデルとし文献 A-6)で設定された値と固有値結果を参考に、一番低次の主要なモードが適切に評価できるように  $f_{lim}$  を 60 Hz とする。

解析時間刻み  $\Delta t$  は高振動数側の応答を評価するために  $5.0 \times 10^{-4}$  [s] を基準とするが、動的陽解法では条件つき安定であるため、基準の解析時間刻みから、切りが良くなるように 2,5,10,20,50,100, … のように除した時間刻みを設定し、解が収束した時間刻みを採用する。

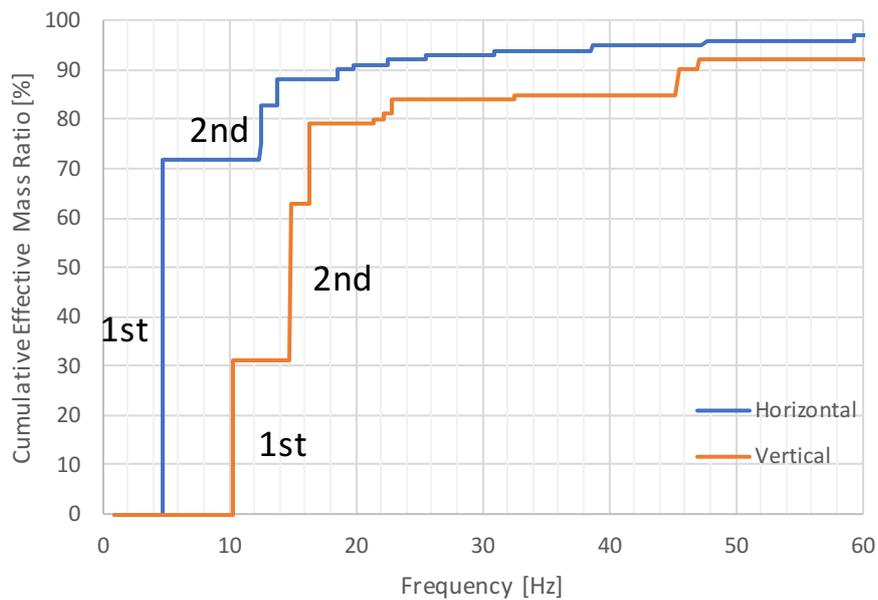


Fig. A.5 Results of real eigenvalue analysis

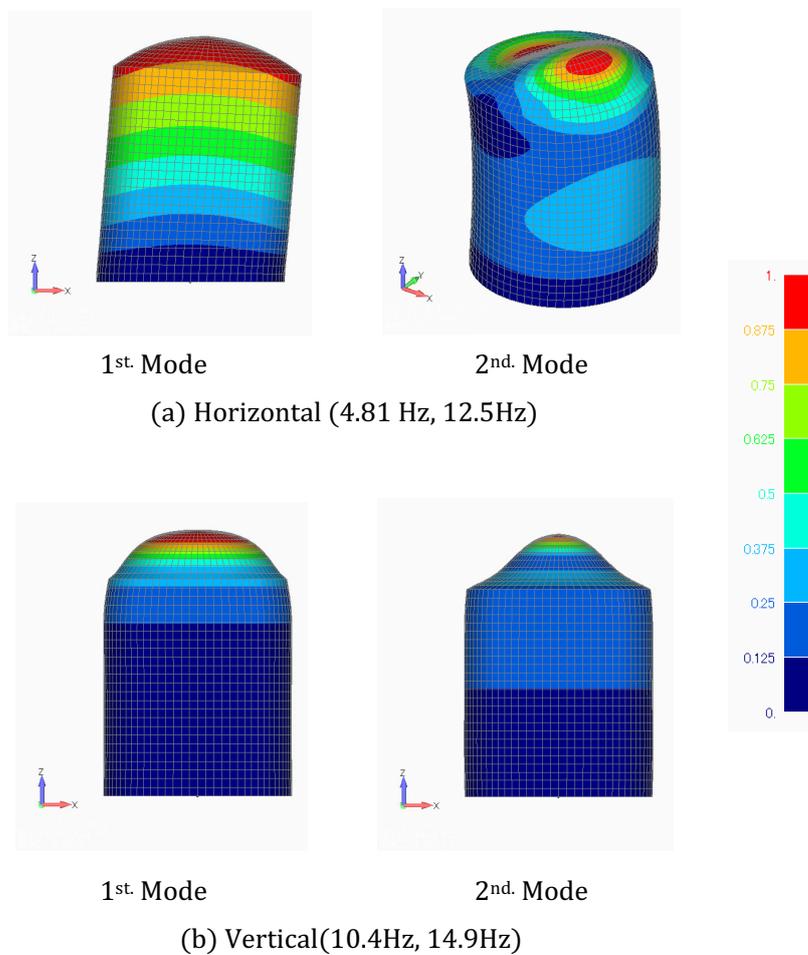


Fig. A.6 Principal Eigen Mode(1st mode,2nd mode)

Table A.3 Analysis case

Case Name	Damping Type	Direct Numerical integration method		$\Delta t$ [s]
Mode	Mode	Implicit		$5.0 \times 10^{-4}$
Mass	Mass proportional	Explicit	Central <sup>※</sup>	$5.0 \times 10^{-5}$
Ray.	Rayleigh	Explicit	Backward <sup>※</sup>	$2.5 \times 10^{-6}$
Caus.	Causal hysteric (9term)	Explicit	Backward <sup>※</sup>	$5.0 \times 10^{-6}$
ERay.	Extended Rayleigh (high accuracy)	Explicit	Backward <sup>※</sup>	$5.0 \times 10^{-6}$

※ Difference method of velocity term

なお、Mode では、高振動数の応答が発生しないように全てのモード（15558 モード）を考慮した減衰マトリクスを作成している。最高次の振動数は、5030 [Hz]程度であった。

### A.3.2.3 数値安定性の検討

動的陽解法の数値安定性について検討する。それぞれのケースの安定条件の時間刻み  $\Delta t_{crit}$  と解析時間刻み  $\Delta t$  の関係については、Table A.4 となる。Mass では後退差分近似は行っていないのと質量比例型減衰なので、安定条件が CFL 条件となり、最高次の振動数及び式(A.9)より、 $\Delta t_{crit} = 6.33 \times 10^{-5}$  [s] と計算できることから、設定した解析時間刻みが  $\Delta t_{crit}$  よりも細かいことが確認できる。なお、今回はモード減衰を設定する過程において最高次の振動数の値を得ることができたが、この値を得ることは難易が高く、文献 A-4)及び文献 A-5)等では、要素の種類ごとに近似的な値で  $\Delta T_{crit}$  を得る方法が示されている。ここでは説明を割愛する。

次に Ray. では、Rayleigh 減衰に関する係数より、最高次の減衰比が  $\xi_{max} = 9.92$  となる。よって、式(A.9)より、 $\Delta t_{crit} = 3.18 \times 10^{-6}$  [s] となり、解析時間刻みはその値よりも細かい。なお、最高次の減衰比は、剛性に関する係数  $\beta'$  でほぼ決まるので、 $\beta'$  が大きくなると  $\Delta t_{crit}$  が小さくなる。

また、Caus.及びERay.についても同様に、それぞれ  $\beta' = 3.27 \times 10^{-4}$  (式(2.19)と式(2.20)より) 及び  $\beta' = 2.85 \times 10^{-4}$  (式(2.29b)より) となることから、 $\xi_{max} = 5.17$  及び  $\xi_{max} = 4.50$  となる。さらに式(A.9)より、 $\Delta t_{crit} = 6.07 \times 10^{-6}$  [s] 及び  $\Delta t_{crit} = 6.95 \times 10^{-6}$  [s] となることから、これらのケースも解析時間刻みが、安定条件を満足していることが確認できる。本設定では、Caus.及びERay.がRay.に比べ、剛性に関する係数  $\beta'$  を小さく設定できたので  $\Delta t_{crit}$  が大きくなり、解析時間刻み  $\Delta t$  を大きく設定することができた。

Table A.4 Stable condition time step  $\Delta t_{crit}$  and analysis time step  $\Delta t$

Case	$\beta$	$\xi_{max}$	$\Delta t_{crit}$ [s]	$\Delta t$ [s]
Mass	-	-	$6.33 \times 10^{-5}$	$5.00 \times 10^{-5}$
Ray.	$6.28 \times 10^{-4}$	9.92	$3.18 \times 10^{-6}$	$2.50 \times 10^{-6}$
Caus.	$3.27 \times 10^{-4}$	5.17	$6.07 \times 10^{-6}$	$5.00 \times 10^{-6}$
ERay.	$2.85 \times 10^{-4}$	4.50	$6.95 \times 10^{-6}$	$5.00 \times 10^{-6}$

減衰比 $\xi_{aim} = 0.03$ 、上限振動数 $f_{lim} = 60$  Hzとし、Rayleigh 減衰の一点目の振動数を $f_1 = 0.08f_{lim}$  (= 4.8 Hz)で、二点目の振動数を、一つ目の振動数の  $a$  倍 ( $f_2 = a \cdot f_1$ ) と仮定する。この $0.08f_{lim}$ は、4.2.2 の時刻歴応答解析で設定した値とほぼ同じである。縦軸 $\beta$ とし、横軸を $a = f_2/f_1$ とすると、Fig. A.7 のような結果を得る。今回の設定では、Ray.で $f_2/f_1 = 2.16$ となるので、 $\beta = 0.00063$ 程度と確認できる。(図中に破線で追記)

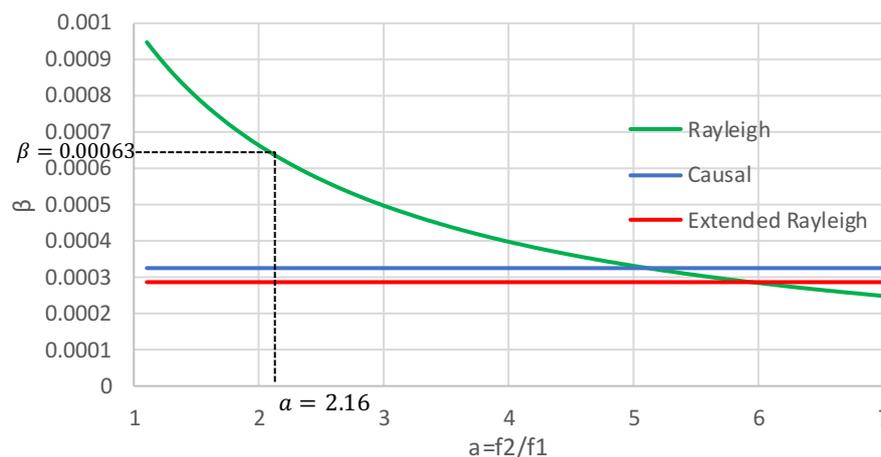


Fig. A.7 Relationship between the  $\beta$  of each damping

従って、 $\beta$ の値は、 $f_2/f_1$ が5以下であれば、Rayleigh 減衰の方が、2つの因果性に基づく減衰よりも大きくなる。さらに、 $\beta$ の値が、 $f_2/f_1$ が5~6では、因果減衰 > Rayleigh 減衰 > 拡張 Rayleigh 減衰となり、 $f_2/f_1$ が6を超えると、Rayleigh 減衰が2つの因果性に基づく減衰よりも小さくなる。即ち、Rayleigh 減衰で、 $f_2/f_1$ が5以下の場合、2つの因果性に基づく減衰モデルは、Rayleigh 減衰よりも、より安定条件を緩和して計算できる。

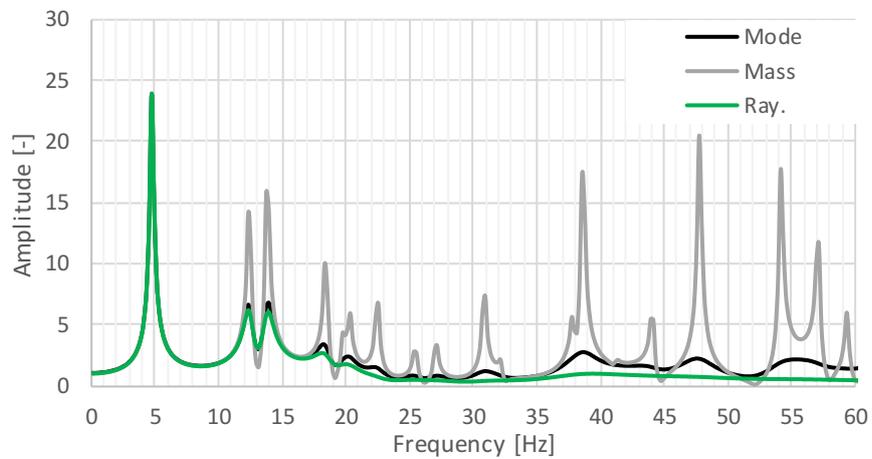
例えば、構造物の評価で2方向同時加振のような問題に対して、水平1次と鉛直1次の振動数を $f_1$ と $f_2$ として Rayleigh 減衰を設定する場合、原子力発電所に関連する建物では、壁式構造が多く、水平剛性が鉛直剛性くらいまで高いため、 $f_2/f_1$ が5以下となる可能性が高い。

#### A.4.2.4 結果

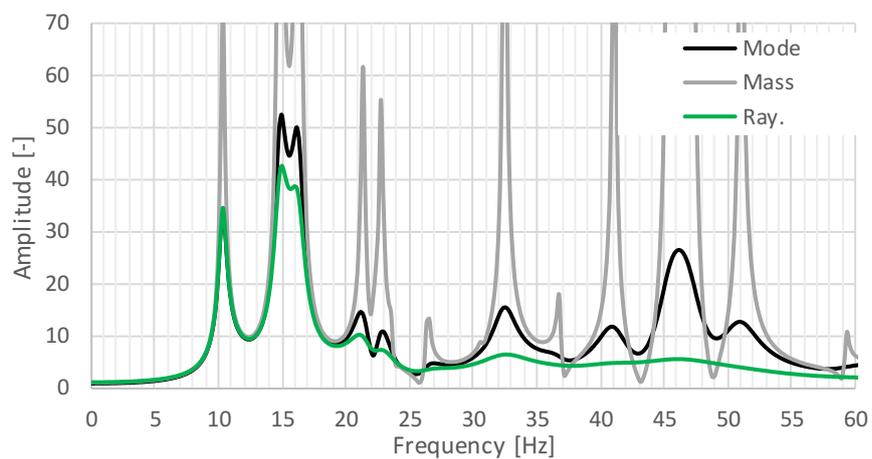
Fig. A.8～Fig. A.10 に、水平方向及び鉛直方向の伝達関数の大きさを 0～60 Hz まで示した結果である。

Fig. A.8 では、Mode を目標値とし、Mass 及び Ray.の結果である。Mass では、4.81 Hz で 3%となるように設定しているため、それより高振動数側の伝達関数は、水平方向及び鉛直方向共に、Mode よりも遥かに大きくなっている。Ray.では、二つ目の基準振動数を 10.4 Hz と設定しているため、4.81 Hz と 10.4 Hz の値は Mode と一致しているが、10.4 Hz よりも高振動数側の減衰は大きく考慮されるため、伝達関数の大きさが小さくなっている。特に、鉛直方向で 14.9 Hz の主要なモードにおいて 3%よりも大きな減衰となることから、応答を過小に評価されていることが確認できる。

Fig. A.9 及び Fig. A.10 には、Caus.及び ERay.の結果である。両者ともに、振動数の広範囲で Mode の結果と良く整合した結果となっている。また、共振振動数のずれについて、特に目立つような応答が表れておらず、問題ないことが確認できるが、わずかなずれに着目すると、 $f_{lim}$ の中央では、3章の結果と同じように振動数が高い側にずれていることが確認できる。

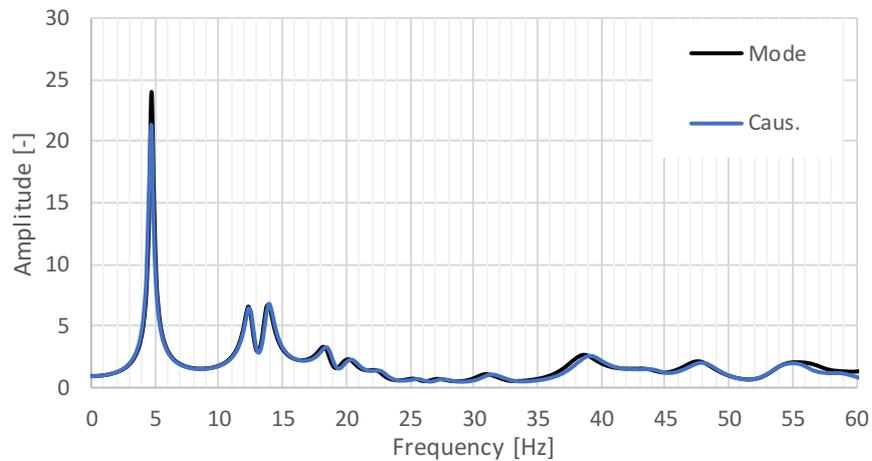


(a) Horizontal

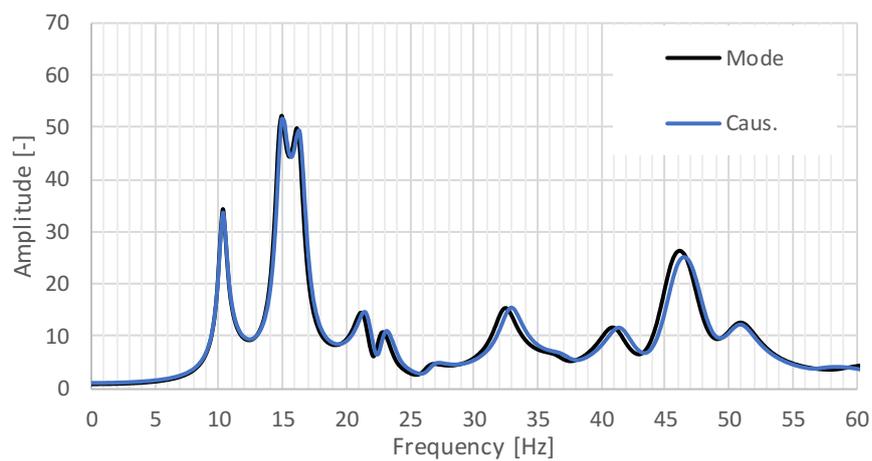


(b) Vertical

Fig. A.8 Transfer function (Mode vs Mass vs Ray. )

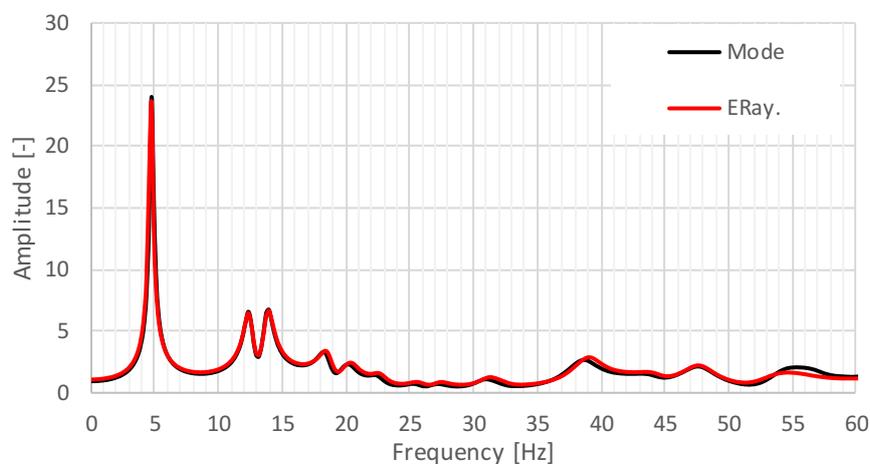


(a) Horizontal

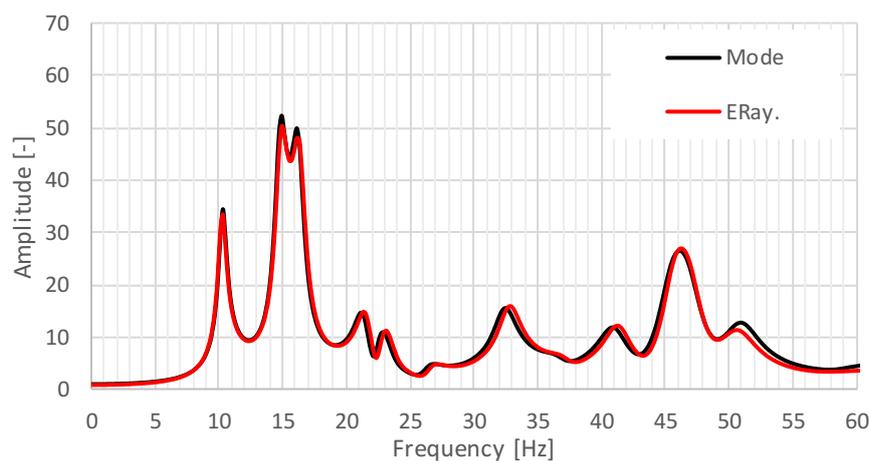


(b) Vertical

Fig. A.9 Transfer function (Mode vs Caus.)



(a) Horizontal



(b) Vertical

Fig. A.10 Transfer function (Mode vs ERay.)

## A.5. まとめ

本報では、2章で2つの因果性に基づく減衰（因果減衰・9項モデルと拡張 Rayleigh 減衰・高精度モデル）の概要を、3章で速度項を後退差分近似した動的陽解法の概要を整理した。

4章以降では、4.1節で、2章の減衰を使用し、簡易な多質点系モデルにより、動的陽解法でも動的陰解法と同程度の減衰の機能を発揮することを確認した。

さらに、4.2節で、実機への適用性を確認するために、シェル要素でモデル化したドーム状の構造物を対象に、いくつかの数値積分法と減衰を変えたケースで時刻歴解析を実施した。その中では、動的陽解法の安定条件を示した上で、減衰モデルによる結果の違いを明らかにし、2章の減衰の適用性について示した。要約すると、減衰の違いの観点では、

① 一般的な動的陽解法で利用可能な質量比例型減衰では、一つの基準振動数に対して一

つの減衰比しかフィッティングさせることができず高振動数側の減衰が小さくなるため、高振動数側の応答が過大に評価されてしまう。

- ② また、速度項を後退差分近似した動的陽解法であれば、従来の Rayleigh 減衰を用いることが可能であるが、本例題のように、二つ目の基準振動数の設定によって、主要なモードの応答を過小に評価する恐れがある。
- ③ モード減衰の結果を目標値とすれば、速度項を後退差分近似した動的陽解法においても、2つの因果性に基づく減衰モデルでは、広範囲の振動数域に対して、減衰比を一定で精度よく評価できる。

安定条件の観点では、

- ④ 質量比例型減衰であれば、一般的な動的陽解法で解くことができるため、安定条件が CFL 条件となる。
- ⑤ 2つの因果性に基づく減衰及び従来の Raleigh 減衰では、速度項を後退差分近似した動的陽解法で解く必要があり、安定条件が一般的な動的陽解法に比べ厳しくなる。そのため、解析時間刻みをかなり細かく設定する必要がある。
- ⑥ ただし、従来の Raleigh 減衰の設定よりは、2つの因果性に基づく減衰の方が、剛性比例型減衰の係数 $\beta$ の値を小さくすることができ、今回は 2.0 倍ほど安定条件の時間刻みが大きくなることを確認した。

以上のことから、本報により、動的陽解法においても、線形弾性問題に対して動的陰解法と同等の広範囲で減衰比が一定となるような2つの因果性に基づく減衰を適用することが可能であることを確認した。

また、速度項を後退差分近似した動的陽解法においては、2つの因果性に基づく減衰を用いた方が、従来の Rayleigh 減衰の設定よりも剛性比例型減衰の係数 $\beta$ を小さく設定できる場合があるので、より安定条件を緩和して計算できる場合を有することが確認された。

今回は線形弾性問題に対して確認したので、今後は、動的陽解法に利点がある非線形の問題に対して検討する必要があると考える。

## 参考文献

- A-1) Mizushima, Y., Mukai, Y., Namba, H., Taga, K., Saruwatari, T.: SUPER-DETAILED FEM SIMULATIONS FOR FULL SCALL STEEL STRUCTURE CAUSED FATAL RUPTURE AT ITS JOINT PARTS BETWEEN MEMBERS, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 81, No. 719, pp. 61-70, 2016.1 (in Japanese)  
水島靖典, 向井洋一, 難波尚, 多賀謙蔵, 猿渡智治: 詳細有限要素モデルによる接合部破断を生じた実大鋼構造物の応答シミュレーション, 日本建築学会構造系論文集, 第 81 巻, 第 719 号, pp. 61-70, 2016.1
- A-2) Mizushima, Y., Tachibana E.: Large-Scale Simulation of the Dynamic Behavior of Building Structure, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan., B-1, pp.401-402, 2009.7  
水島靖典, 橋英三郎: RC 建築構造物を対象とした大規模並列解析に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1 分冊, pp. 401-402, 2009.7
- A-3) Takeda, S., Kanai, Y., Manabe, Y., Niwa, K., Narita, Y., Tubota H., Kasai, Y.: Examination of Applicability of Impact Analysis Code based on the Explicit Time Integration to the Shaking Table Tests of Full-Scale Six Story RC Building, Summaries of Technical Papers of Annual Meeting, Architectural Institute of Japan., B-1, pp.227-228, 2011.7  
武田滋史, 金井喜一, 眞鍋慶生, 丹羽一邦, 成田悠, 坪田張二, 河西良幸: 実大 6 層 RC 建物の振動台実験結果への陽解法衝撃解析コードの適用性の検討, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1 分冊, pp. 227-228, 2011.7
- A-4) Belytschko, T., Liu, W.K., Moran, B., Elkhodary, K.I.: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures Second Edition, John Wiley & Sons, Ltd, Chapter 6, 2014
- A-5) The Japan Society for Technology of Plasticity ed.: Nonlinear Finite Element Method for Metal Forming Analysis, CORONA PUBLISHING CO., LTD., pp.105-128, 1994.12  
社団法人日本塑性加工学会編: 非線形有限要素法—線形弾性解析から塑性加工解析まで—, 株式会社コロナ社, pp. 105-128, 1994.12
- A-6) Nakamura, N.: A PRACTICAL METHOD FOR ESTIMATING CASUAL HYSTERETIC DAMPING, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 70, No. 596, pp. 33-39, 2005.10 (in Japanese)  
中村尚弘: 因果的履歴減衰の実用的評価法, 日本建築学会構造系論文集, 第 70 巻, 第 596 号, pp. 33-39, 2005.10
- A-7) Nakamura, N.: Practical Causal Hysteretic Damping, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 36, pp. 597-617, 2007.4
- A-8) Nakamura, N.: STUDY ON UPGRADING OF RAYLEIGH DAMPING, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol. 79, No. 706, pp. 1751-1761, 2014.12 (in Japanese)

中村尚弘： Rayleigh 減衰の高度化に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第 79 卷, 第 706 号, pp. 1751-1761, 2014.12

A-9) Nakamura, N.: Extended Rayleigh Damping Model, *Frontiers, Built Environment*, <http://dx.doi.org/10.3389/fbuil.2016.00014>, 2016.6, (accessed 2020.5.18)

A-10) Nakamura, N.: TRANSFORM METHODS FOR COMPLEX STIFFNESS TO TIME DOMAIN USING REAL OR IMAGINARY DATA ONLY, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 72, No. 612, pp. 79-86, 2007.2 (in Japanese)

中村尚弘： 実部もしくは虚部のデータのみを用いた複素剛性の時間領域変換法, 日本建築学会構造系論文集, 第 72 卷, 第 612 号, pp. 79-86, 2007.2

## 補足資料（質量マトリクスの扱い）

動的陽解法では、スカラーで解けるように質量マトリクスを対角マトリクス（集中質量マトリクス）とする必要がある。また、数値積分法の安定条件で最高次の振動数により解析時間刻みが決定されることから、動的陰解法に比べ質量の設定が重要である。

### (1) 要素質量マトリクス

要素質量マトリクスは、体積積分の形で式(A.11)となる。

$$\mathbf{M}_e = \int_{V_e} \rho \cdot \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \cdot dV \quad (\text{A.11})$$

ここに、 $\rho$ は要素の質量密度で、 $\mathbf{N}$ は要素の形状関数である。この質量マトリクスは、整合質量マトリクスと呼ばれる。

ただし、この整合質量マトリクスには、対角成分以外に非対角成分にも値が入っており、動的陽解法ではこのマトリクスを用いることはできない。

そこで、式(A.11)の要素の整合質量マトリクスで、並進方向の行の値を合計し、集中化した質量（集中質量）を得ることができる。要素を構成する節点番号 $\alpha$ に関する並進質量 $_{Trs}M_e^\alpha$ は、式(A.12)となる。

$$_{Trs}M_e^\alpha = \int_{V_e} \rho \cdot N^\alpha \cdot dV \quad (\text{A.12})$$

この値をマトリクスの並進三成分の対角項に入力すれば、集中質量マトリクスが作成できる。

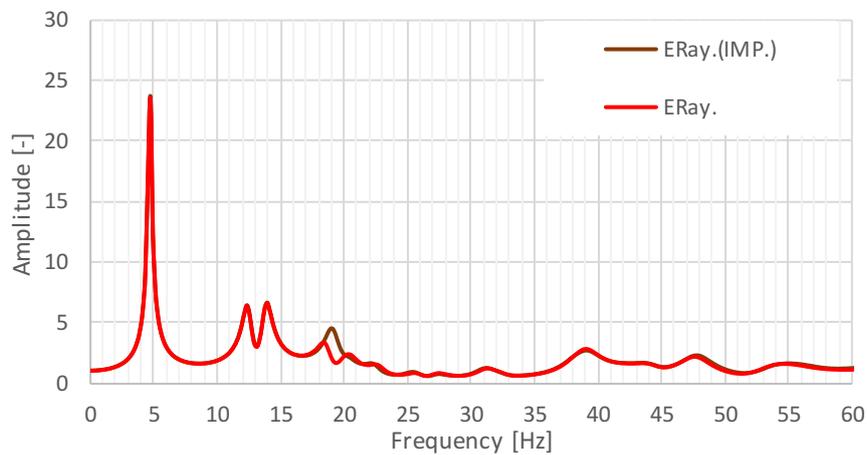
### (2) 回転慣性質量

動的陰解法で、ビーム要素やシェル要素等の回転自由度含んだ要素（構造要素とも呼ばれる）を用いて、集中質量マトリクスで解析を行う場合では、よく回転自由度に関する回転慣性質量を微小な値あるいは 0 で設定されることがある。ただし、動的陽解法では、前述のように安定性の条件から、質量を 0 で設定することはできない。従って、回転慣性質量 $_{Rot}M_e^\alpha$ を並進質量に比例する形で、式(A.13)のように設定する方法がある。

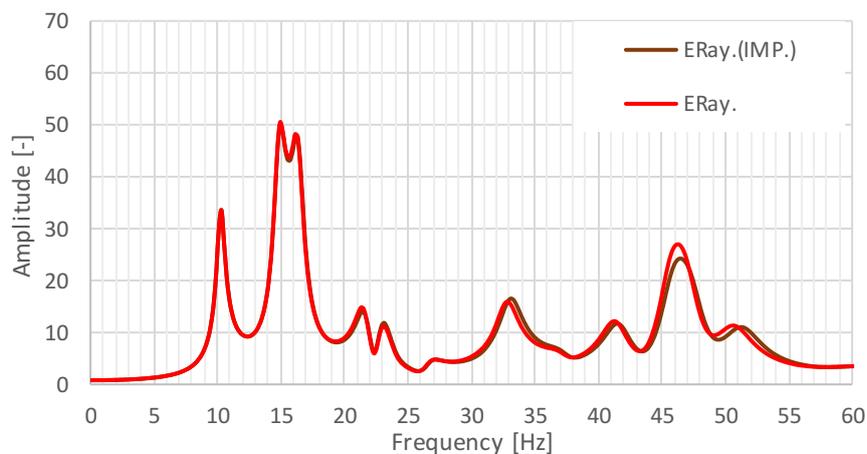
$$_{Rot}M_e^\alpha = \alpha \cdot _{Trs}M_e^\alpha \quad (\text{A.13})$$

ここに、 $\alpha$ は比例係数であり、シェル要素では文献 A-3)に算出方法が記載されているが、本報では簡易に 0.1 倍として設定した。この値は、回転慣性質量によって解析時間刻みに殆ど影響を与えない程度に大きく、解析精度へ殆ど影響がない程度に小さい値であること確認している。実際に、回転慣性質量による影響を確認した。4.2.4 項の ERay.と、ERay.をベースに回転慣性質量を 0 に近い値で動的陰解法により解析（ERay.(IMP.)と呼ぶ）を行った。結果を Fig. A.11 に示す。(a)水平方向及び(b)鉛直方向と共に、回転慣性質量に値を入れた場合と 0 に近い値とした場合で、主要なモードの振動数では一致しており、また振動数 60 Hz までは殆ど差がないことが確認できた。

よって、動的陽解法で、回転慣性質量を並進質量の 0.1 倍程度のような小さい値で設定すれば、動的陰解法で一般的に回転慣性質量を 0 に近い値としたケースの結果と、同程度の応答を得ることが可能であると考えられる。



(a) Horizontal



(b) Vertical

Fig. A.11 Transfer function (ERay. vs ERay.(IMP.))

### 補足資料 (Uniform 減衰による検討)

Uniform 減衰は、先の検討では取り扱わなかったが、動的陽解法においても利用可能である。ここでは、A.3.1 で検討した簡易モデルの検討と、A.3.2 の安定性条件の確認を行う。

#### ○簡易モデルの検討

Fig. A.4 のモデルとほとんど同じであるが、60 [Hz]以上の高振動数側の応答を確認するために、Fig. A.12 及び Table A.5 のような、新たに2つの質点を追加した簡易モデルで検討した。なお、解析プログラム LS-DYNA を用いている。

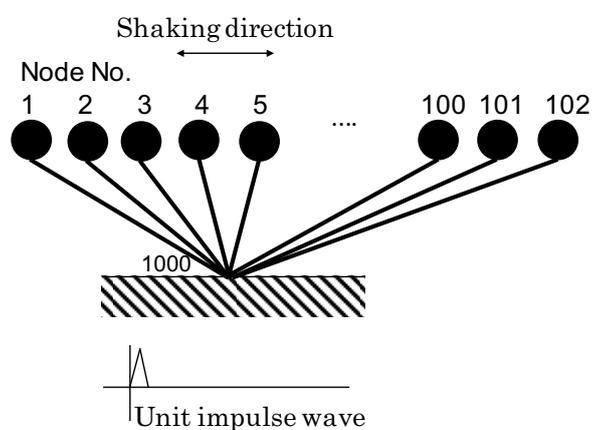


Fig. A.12 Multi DOF model

Table A.5 Property of multi DOF model (linear)

Node No.	Mass [ton]	Natural frequency [Hz]
1	$7.036 \times 10^1$	0.6
2	$1.759 \times 10^1$	1.2
3	$7.818 \times 10^0$	1.8
...	...	...
100	$7.036 \times 10^{-3}$	60.0
101	$2.533 \times 10^{-3}$	100.0
102	$2.537 \times 10^{-4}$	316.0

Spring stiffness  $k(f)$  is 1000 [kN/m].

Uniform 減衰に与える減衰比 $\xi_{aim}$ は、0.01、0.02 及び 0.03 の3ケース実施し、 $f_{low}$ は5Hzで、 $f_{high}$ は50Hzとした ( $f_{high}/f_{low} = 10$ )。

解析の時間刻みは、LS-DYNA の内部計算 (自動で要素ごとに最高振動数を計算し、最小のタイムステップを計算する) で実施されてしまい直接時間刻みを指定することができな

いが、最小のタイムステップに対して倍率で指定することは可能であるため、 $1.0 \times 10^{-5}$  [s] 付近の刻みになるように設定している。なお、十分に時間刻みが細かいため、動的陽解法で安定した解が得られる。出力時間刻みは、前の検討と同様に 0.0005 s 付近の値を出力する。

結果は、Fig. A.13 及び Fig. A.14 に示す。

Fig. A.13 は、振動数と減衰比の精度を表しており、1.0 に近いほど、目標とする減衰比 $\xi_{aim}$  になっていることを表している。

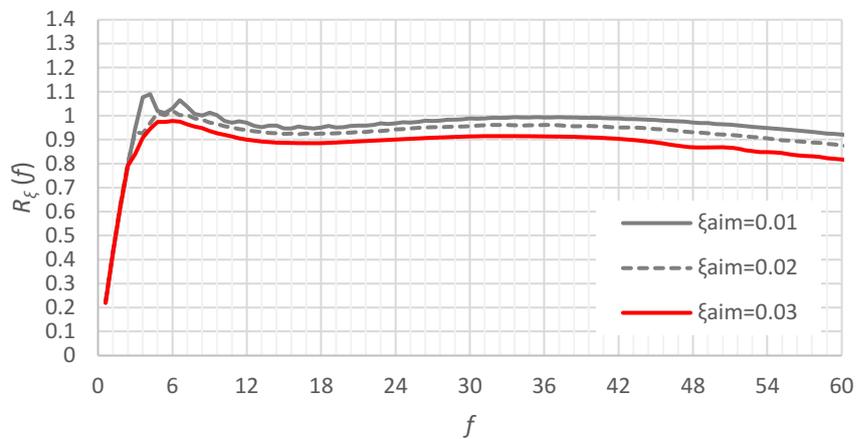
減衰比が一番小さい 0.01 では、 $f_{low}$  (5Hz) から $f_{high}$  (50Hz)の振動数帯で、概ね 1.0 となっていることが確認できる。ただし、減衰比が大きくなる（特に 0.03）につれて、1.0 よりも下回り精度が悪くなるような傾向であった。

また $f_{low}$ 以下の振動数帯と $f_{high}$ 以上の振動数帯では、減衰比が設定した減衰比 $\xi_{aim}$ よりも減少していることが確認できる。

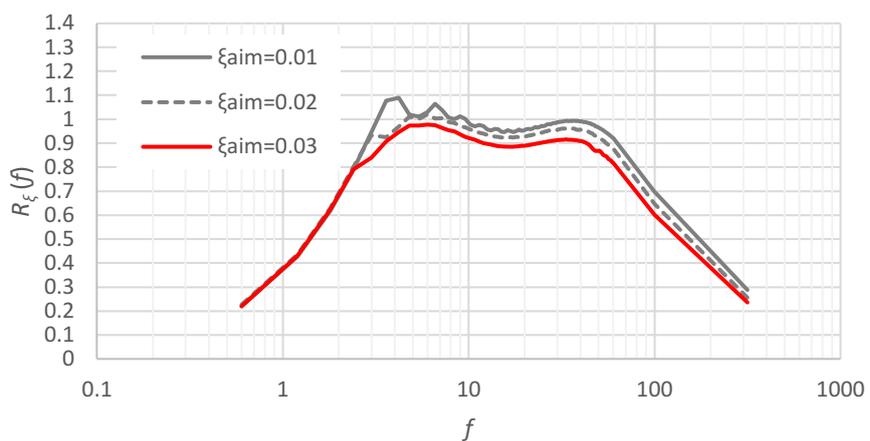
Fig. A.14 に振動数と固有振動数（動的剛性）の精度を表している。 $f_{low}$ 以下では、1.0 付近となっており、固有振動数がほとんど変化しないが、 $f_{low}$ 以上では、振動数が大きくなるほど固有振動数が増加する傾向であり、減衰率を 0.03 と設定した場合では、 $f_{high}$ では 8% 程度増加する結果となっている。

いずれの結果においても、本編の動的陰解法とほとんど同じ結果であり、また、Huang et al.\*に示された傾向と同様であることが確認できる。

※ Huang, Y., Sturt, R., Willford, M.: A damping model for nonlinear dynamic analysis providing uniform damping over a frequency range, Computers and Structures, 2019

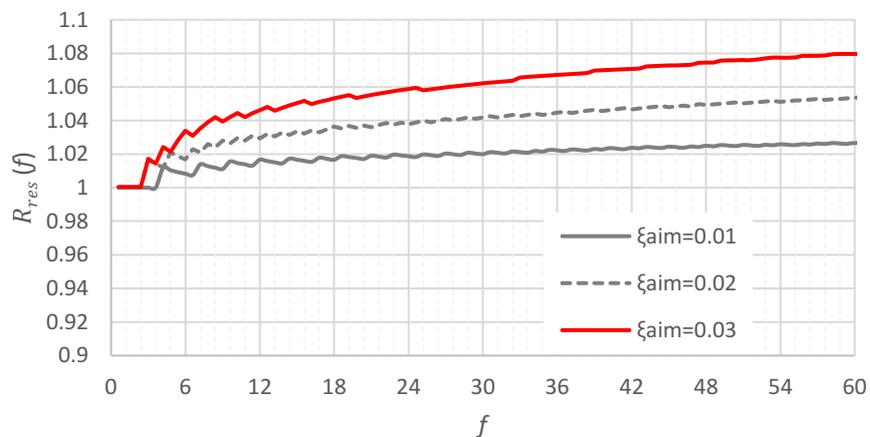


(0~60 [Hz] Linear axis)

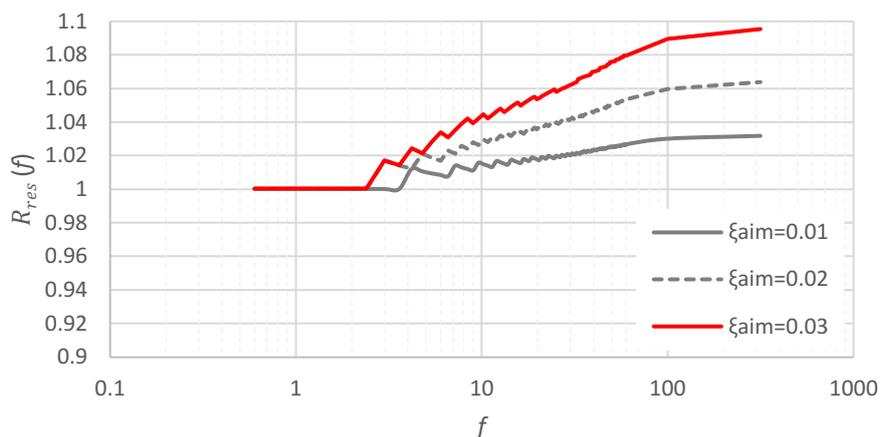


(0.1~1000 [Hz] Logarithmic axis)

Fig. A.13 Damping ratio



(0~60 [Hz] Linear axis)



(0.1~1000 [Hz] Logarithmic axis)

Fig. A.14 Damping frequency ratio

○安定性条件の確認

Table A.4 のように、各減衰モデルにおいて安定性の条件を満たす解析の時間刻みが示されている。ここでは、Uniform 減衰の場合においてどの程度タイムステップが増加するか確認する。

最高時の固有振動数は、5030 [Hz]と分かっている。また、Uniform 減衰による増加した固有振動数は、本編 2 章の式(2.26),式(2.27)及び式(2.46a),(2.46b)より算出できる。ξ<sub>aim</sub> = 0.03では、R<sub>res</sub> = 1.10程度となるので、式(A.10)に代入すれば、Δt<sub>crit</sub> = 5.75 × 10<sup>-5</sup> [s]となる。

参考までに、各減衰モデル安定条件の時間刻みΔt<sub>crit</sub>を Table A.6 に比較する。質量比例型減衰のΔt<sub>crit</sub>とほとんど変わらずに、安定性条件を満たすことが可能である。

Table A.6 Stable condition time step  $\Delta t_{crit}$  and analysis time step  $\Delta t$ 

Case	$\beta$	$\xi_{max}$	$\Delta t_{crit}$ [s]
Mass	-	-	$6.33 \times 10^{-5}$
Ray.	$6.28 \times 10^{-4}$	9.92	$3.18 \times 10^{-6}$
Caus.	$3.27 \times 10^{-4}$	5.17	$6.07 \times 10^{-6}$
ERay.	$2.85 \times 10^{-4}$	4.50	$6.95 \times 10^{-6}$
Unif	-	-	$5.75 \times 10^{-5}$

## ○まとめ

以上より、動的陽解法における Uniform 減衰（ARUP 減衰、DAMPING\_FREQUENCY\_RANGE\_DEFORM）について、簡易モデルにより減衰モデルの性状と、動的陽解法の数値安定性を満たすタイムステップについて確認した。

Uniform 減衰は、若干、CFL 条件よりもタイムステップを小さくする必要があるものの、ほとんど無視できるレベルであり、動的陽解法で検討するうえでは大きな利点を有することが分かった。

一方で、 $f_{low}$  及び  $f_{high}$  は任意で指定でき幅広い振動数帯で、減衰比を一定にすることはできるものの、減衰の精度では、 $f_{high}/f_{low} = 50$  [Hz]/5 [Hz] = 10 の場合においては、減衰比を大きくするにつれて、 $f_{low}$  から  $f_{high}$  の間の減衰比が過少に評価されることが確認された。

また、固有振動数の精度では、 $f_{low}$  以下では固有振動数の変化がほとんどないものの、 $f_{low}$  以上では固有振動数が増加し、減衰比が 0.03 の場合において、 $f_{high}$  の付近では約 8% 増加してしまう。

また、本編の動的陰解法と同じような結果が得られた。

## 研究実績

### 学術雑誌

- 1) Mogi, Y., Nakamura, N., Ota, A.: APPLICATION OF EXTENDED RAYLEIGH DAMPING MODEL TO 3D FRAME ANALYSIS, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 86, No. 783, pp. 738-748, 2021.5 (in Japanese)  
茂木良宏, 中村尚弘, 太田成: 拡張 Rayleigh 減衰モデルの 3 次元骨組解析への適用, 日本建築学会構造系論文集, 第 86 巻, 第 783 号, pp. 738-748, 2021.5
- 2) Ota, A., Nakamura, N., and Mogi, Y.: EXAMINATION OF APPLICABILITY OF CAUSALITY-BASED DAMPING MODEL TO DYNAMIC EXPLICIT METHOD, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 86, No. 786, pp. 1168-1179, 2021.8 (in Japanese)  
太田成, 中村尚弘, 茂木良宏: 因果性に基づく減衰モデルの動的陽解法への適用性検討, 日本建築学会構造系論文集, 第 86 巻, 第 786 号, pp. 1168-1179, 2021.8
- 3) 茂木良宏, 中村尚弘, 鍋島国彦, 太田成: 最大応答復元力に基づいたキャップ減衰モデルの開発, 日本建築学会技術報告集, 第 29 巻, 第 71 号, pp.115-120, 2023.2
- 4) Mogi, Y., Nakamura, N., Nabeshima, K., Ota, A.: Vibration Characteristics of Capped Viscous Damping Based on Frame Restoring-Force Amplitude, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 8, doi: 10.3389/fbuil.2022.858029, Accessed 2022.3
- 5) Nakamura, N., Nabeshima, K., Mogi, Y., Ota, A.: Applicability of Time Domain Transform Methods for Frequency Dependent Dynamic Stiffness, *Frontiers in Built Environment*, Vol. 8, doi: 10.3389/fbuil.2022.854838, Accessed 2022.4
- 6) Ota, A., Nakamura, N., Nabeshima, K., Mogi, Y., Kawabata, M.: FUNDAMENTAL STUDY OF DAMPING MODELS WITH ENHANCED FREQUENCY INDEPENDENCE IN NONLINEAR SEISMIC RESPONSE ANALYSIS, *Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ)*, Vol. 88, No. 811, pp. 1348-1359, 2023.9 (in Japanese)  
太田成, 中村尚弘, 鍋島国彦, 茂木良宏, 川端昌史: 非線形地震応答解析における振動数非依存性を高めた減衰モデルの基礎的検討, 日本建築学会構造系論文集, 第 88 巻, 第 811 号, pp. 1348-1359, 2023.9
- 7) Mogi, Y., Nakamura, N., Nabeshima, K., Ota, A.: Performance of inherent damping models in inelastic seismic analysis for tall building subject to simultaneous horizontal and vertical seismic motion, *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, Vol. 52, pp.3746-3764,

2023.10

#### 学術会議

- 1) 太田成, 中村尚弘, 鍋島国彦, 茂木良宏: 因果性に基づく減衰モデルの動的陽解法への適用性検討, 第 66 回理論応用力学講演会, 2022
- 2) 石田貴之, 太田成, 伊藤晶, 市川大真, 小野英雄: 鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 1 TDAPIII の RC 非線形構成則, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.205-206, 2023.7
- 3) 伊藤晶, 太田成, 小野英雄, 市川大真, 石田貴之: 鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 2 静的加力試験の再現解析, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.207-208, 2023.7
- 4) 太田成, 伊藤晶, 小野英雄, 市川大真, 石田貴之: 鉄筋コンクリートの壁式構造を対象とした非線形解析の精度検証 その 3 動的加振試験の再現解析, 日本建築学会大会学術梗概集, pp.209-210, 2023.7

※筆頭著者の論文については、太字で示している。

## 謝 辞

本論文は、著者が、広島大学大学院の博士課程に入学してからの 2 年間で研究したものをまとめたものです。こうして、博士論文を完成できたのも、様々出会った方々のおかげであり感謝いたします。

特に、広島大学大学院先進理工学研究科 中村尚弘 教授には、因果性に基づく減衰モデルの基礎的な理論について丁寧にご教授頂き、また論文の執筆に関して多大なるご指導とご高配頂きました。心より感謝いたします。

また、大成建設株式会社 茂木良宏 氏には、減衰モデルについて共に研究を実施し、解析プログラムのご提供並びに、プログラミングのご指導をいただきました。深く感謝いたします。

また、広島大学大学院先進理工学研究科 田川浩 教授、三浦弘之 准教授、茨城大学大学院理工学研究科 肥田剛典 准教授、並びに神戸大学大学院工学研究科 鍋島国彦 助教には、論文に対する数多くのアドバイスやご指導いただきました。深く感謝いたします。

大成建設株式会社原子力本部副本部長 宇賀田健 氏、部長 猪野晋 氏には、快く社会人博士課程への進学を承諾頂き、また、今回用いた減衰モデルの研究を推進頂きました。こうして、大成建設株式会社の研究費から、TDAPIII へ減衰モデルを導入することが出来、研究を行うことができました。深く感謝いたします。

TDAPIII への導入には、株式会社アーク情報システム 計算技術開発部 部長 坂口剛 氏、グループリーダー 石田貴之 氏並びに 今井連 氏のお力添えがあり可能となりました。感謝いたします。

大成建設株式会社原子力本部 主任 松原稔 氏には、4 章と 5 章で用いた入力地震動をご提供いただきました。また、大成建設株式会社 原子力本部 中込柚季 氏には、数多くの図の作成を手伝っていただきました。感謝いたします。

最後に、大学への進学や学位取得に対して賛同してくれた妻 江梨奈と、休日に研究の時間を与えてくれた長男 真翔、次男 悠真並びに長女 愛梨には感謝いたします。

2024 年 2 月

太田 成