

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	助永 真之
学位授与の要件	学位規則第 4 条第①・2 項該当		
論 文 題 目 Tropical lifting problem for the intersection of plane curves (トロピカル平面曲線の交わりの実現問題)			
論文審査担当者 主 査 准教授 高橋 宣能 審査委員 教 授 島田 伊知朗 審査委員 教 授 寺垣内 政一			
〔論文審査の要旨〕 本論文では、2つのトロピカル平面曲線の交わりに含まれるトロピカル因子の実現に関する研究が行われている。 実数の集合 \mathbf{R} に記号 “ $-\infty$ ” を付け加えた集合 \mathbf{T} 上で、和と積のかわりに最大をとる演算と和を考えることにより、 \mathbf{T} 上の半体 (semifield) 構造が定まり、この演算に関する \mathbf{T} 上の n 変数多項式の集合から \mathbf{R}^n 内のトロピカル多様体が定まる。 $n=2$ で1つの多項式から定まるものをトロピカル平面曲線と呼び、これはいくつかの線分と半直線の和集合であって、ある条件を満たすものになっている。Mikhalkin による平面代数曲線の数え上げへのトロピカル曲線の応用など、トロピカル多様体には様々な応用があり、盛んに研究されている。 トロピカル多様体は、以下のように代数多様体と関係付けられる。 k を非自明な付値の与えられた代数閉体、 X を $(k^*)^n$ 内の曲線として、 X の点の各座標の付値の (-1) 倍を取る写像の像の閉包として \mathbf{R}^n 内のトロピカル多様体 $\text{Trop}(X)$ が定まる。 逆向きの対応を考えるのが、トロピカル多様体の実現問題である。本論文では、2つのトロピカル平面曲線の交わりに含まれるトロピカル因子の実現問題を扱っている。トロピカル平面曲線 Γ_1, Γ_2 が与えられたとき、平面代数曲線 C_1, C_2 で $\Gamma_1 = \text{Trop}(C_1), \Gamma_2 = \text{Trop}(C_2)$ が成り立つものを考えると、 $C_1 \cap C_2$ のトロピカル化 $\text{Trop}(C_1 \cap C_2)$ は $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ に含まれる。ここで、 C_1 と C_2 が有限個の点で交わっても、 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ は有限個の点で交わるとは限らず、線分や半直線を含みうる。そこで、 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ の部分集合 D であって、 C_1 と C_2 を適切にとると $\text{Trop}(C_1 \cap C_2)$ として現れるものはどのようなものか、という問題が考えられる。 Morrison は、 D が適切な「トロピカル有理関数の因子」であることが必要条件であることを示した。しかしながら、この条件は十分条件ではないことを示す例が Len-Satriano			

や Brugalle により与えられている。

本論文では、 $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ がいくつかの点・線分・半直線の非交和である等の条件を満たす場合に、 D から定まる組合せ論的なデータにある種の非輪状性の仮定を置くと D が実現可能であることを示している。

本論文は、5つの節からなる。第1節では、トロピカル平面曲線の交わりの実現問題に関する概観の後、主結果の主張が述べられる。

第2節では、トロピカル幾何学に関する基礎事項として、トロピカル多項式とトロピカル超曲面の定義、トロピカル曲線とその双対複体の対応がまとめられている。

第3節では、主結果の証明の準備として、 Γ_1 と Γ_2 に関する仮定の帰結が述べられている。また、多項式のある種の割り算を用いた、付値体に係数を持つ2つの多項式に関する近似的な消去法のアルゴリズムが与えられている。ここでは、係数の付値の注意深い取り扱いが鍵となっている。

第4節では、まず付値体上の平面曲線の交点のトロピカル化を記述している。この記述は曲線の定義方程式から具体的に計算できる形で与えられており、本論文を離れても、曲線の交点の計算や分析に有用であると思われる。この記述を用いて、主定理である、 D がある組合せ論的条件を満たす場合の実現可能性が証明される。これまでには $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ が有限集合である場合の結果や散発的な例以外にまとまった十分条件は知られておらず、本論文の結果は具体例の構成や解析に非常に有用であると言える。

第5節では、定理の仮定において非輪状性を落とすと成り立たないことを示す興味深い例が与えられている。これにより、本論文の結果において非輪状性の仮定が本質的であることがわかる。

このように、本論文は、トロピカル幾何学における実現問題について、独創的な貢献をなすものである。

以上のことから、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認められる。

備考：審査の要旨は、1,500字以内とする。