# 論　文　の　要　旨

題　目　　Tropical lifting problem for the intersection of plane curves
（トロピカル平面曲線の交わりの実現問題）

氏　名　　助永　真之

トロピカル幾何学とはトロピカル代数に基づく代数幾何学の類似である。これはトロピカル多項式の定める区分的線形凸関数の、線形でない部分から定められる多面体的集合からなるトロピカル多様体を扱うものである。非自明な付値を持つ代数閉体上の代数多様体に対し、各点の付値を取ることによりトロピカル化が得られる。実現問題とは一般に、トロピカル化したものから元の代数多様体に関する情報がどれくらい得られるか、というものである。これは代数幾何学とトロピカル幾何学を結びつけるときに重要となる問題である。

一般に、2 つの代数多様体 V, W が与えられたとき、交わりをトロピカル化したものは V と W をそれぞれトロピカル化した後で交わりを取ったものに含まれる。代数曲線の場合には特に、2 つの代数曲線のトロピカル化の交わりが有限個であるならば、交わりのトロピカル化とトロピカル化の交わりが等しいことが知られている。しかし、元の交わりが有限個でもトロピカル化の交わりは 1 次元になることがある。そこで、実現問題の 1 つとして次の問題が考えられている.

「2 つの代数多様体 V, W をトロピカル化したものの交わりの上のどのような“因子”が V と W の交わりのトロピカル化として実現可能か？ただし、それぞれをトロピカル化したものを動かさない範囲で V と W を動かすものとする。」

本論文では、2 つの曲線の交わりについて考察し、トロピカル平面曲線の交わり方にどのような制限を加えれば実現可能であるか調べた。結果として、トロピカル曲線に双対な多面体的複体において、トロピカル曲線の交わりに対応する 1 次元 cell に印をつけ、その組み合わせ論的情報から実現可能性の十分条件を与える方法を構成することができた。

以下、主定理の詳細を述べる。問題設定として、零点のトロピカル化が X となる多項式 f を固定し、零点のトロピカル化が Y となる多項式 g を動かして、2 つのトロピカル平面曲線 X と Y の交わりの上の因子 D の実現を考える。X と Y の交わりの連結成分の内、交叉重複度が 1 の半直線または交叉重複度が 2 の線分 L であって、「X または Y の辺で L と 1 次元の交わりを持ち、かつ L の端点をその頂点として含むものの重みは 1」という条件を満たすもの全体の集合を A と定める。B を A の部分集合とし、次の 2 つの条件を仮定する。

・条件 1（Morrison の条件[1]）

「D は成分を値群に持つ点の形式和、E は X と Y の安定交叉因子であり、X 上のトロピカル有理関数で付随する主因子が D − E であり、そのサポートが X と Y の交わりに含まれるようなものが存在する。また、B に含まれる各半直線 L に対して、D を L に制限したものは 1 点からなる。」

トロピカル超曲面に関する双対定理により、トロピカル多項式 F の係数から定まる 2 次元複体と F

から定まるトロピカル平面曲線は双対になる。A の元 L を含む Y の辺は一意に定まるので、L をそれを含む Y の辺に双対な 1 単体に送ることで、A から双対複体の 1 単体への写像Φを定める。

・条件 2（B に関する非輪状性）
「写像Φを B に制限したものは単射かつΦ(B)の要素の和からなるグラフは forest。すなわち、B の元に双対な辺に印をつけたとき、印に重複はなく、また、印のついた辺の和からなるグラフは forest。」

次が主定理の主張である。
「D は条件 1 を満たすとし、条件 2 も仮定する。B の各元 L に対し、L 上に D を制限した点と L の端点の距離は十分小さいとする。このとき、そのトロピカル化が g のトロピカル化と等しくなるような多項式 h が存在して、B の任意の元 L に対して、f と h の共通零点のトロピカル化を L へ制限したものは D を L へ制限したものと等しい。」

また、B およびΦに関する組み合わせ論的な条件を加えることにより、L 上に D を制限した点と L の端点の距離に関する条件を取り除いた形の定理も成り立つ。

参考文献
[1] Morrison, R., *Tropical images of intersection points*, Collect. Math. **66** (2015) no. 2, 273--283.