

## 論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 ( 理 学 )	氏名	西村 勇哉
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1 ・ ② 項該当		
論 文 題 目 The computational complexity of the solid torus core recognition problem (トーラス体のコア判定問題の計算量について)			
論文審査担当者 主 査 教 授 藤森 祥一 審査委員 教 授 寺垣内 政一 審査委員 教 授 古宇田 悠哉 (慶應義塾大学)			
〔論文審査の要旨〕 本論文は、トーラス体内の与えられた結び目がトーラス体のコアかどうかを判定する問題である、トーラス体のコア判定問題について、非決定性多項式時間アルゴリズムを構成し、この問題が NP かつ co-NP に属することを論じたものである。 結び目の自明性判定問題とは、3 次元球面内の結び目の図式が与えられたとき、その結び目が自明結び目かどうかを判定する問題である。Hass-Lagarias-Pippenger (1999) により、この問題は NP に属すること、すなわち、この問題を解く非決定性多項式時間アルゴリズムが存在することが示されている。さらに、Lackenby (2021) はこの問題が co-NP に属すること、すなわち、結び目の非自明性判定問題に対する非決定性多項式時間アルゴリズムが存在することを示した。これらの結果から、結び目の自明性判定問題は決定性多項式時間で解けると予想されているが、この問題は現時点で未解決であり、計算論的位相幾何学を牽引する問題となっている。本論文で扱うトーラス体のコア判定問題は、その多様体内の結び目で「最も基本的」な結び目であるかを問うという点で、結び目の自明性判定問題のトーラス体における類似の問題とみなせる。一方で、結び目の自明性判定は、その外部空間にある本質的円盤を見つけることで解くことが出来るのに対し、トーラス体のコアの外部空間には本質的円盤が存在しないことから、トーラス体のコア判定問題に対し結び目の自明性判定と同様のアプローチをとることはできない。 Haraway-Hoffman (2019) の未出版の報告によると、与えられた多様体が厚みづけられたトーラスと同相であるかを判定する問題は NP に属し、さらに、入力を既約な多様体に限定すれば co-NP に属する。この結果から、トーラス体のコア判定問題は NP に属することが帰結される。本論文では、トーラス体のコア判定問題に対し、これとは全く異なる新たな非決定性多項式時間アルゴリズムが構成され、この問題が NP に属することについて			

別証明が与えられている。具体的には、トーラス体のコア判定問題が、その結び目のトーラス体におけるホモロジー類の計算、外部空間内の本質的アニュラスの存在および入力結び目から構成される種数 1 の 3 次元多様体内の結び目に関する判定問題、という 3 つの問題に帰着できることを示している。本論文で与えられたトーラス体のコア判定問題解決へのアプローチは、Lackenby (2021) の 100 ページにも及ぶ論文の複雑な手法を適用した Haraway-Hoffman のアプローチより遥かに直接的であり、与えられたアルゴリズムも簡明である。さらに、トーラス体内の結び目の整数係数 1 次ホモロジー類を多項式時間で計算するアルゴリズムを与え、そのホモロジー類の計算結果から外部空間の既約性を保証することで、この問題が  $\text{co-NP}$  に属することも示している。また、これらの結果の帰結として、非自明な絡み目としては最も基本的な絡み目である Hopf 絡み目の判定問題が  $\text{NP}$  かつ  $\text{co-NP}$  に属することを導いている。

本研究は、従来から知られていた 3 次元球面内の自明結び目の判定問題だけでなく、トーラス体内のコア結び目や Hopf 絡み目といった外部空間に本質的円盤が存在しないような絡み目の判定問題についても  $\text{NP}$  かつ  $\text{co-NP}$  に属することを明らかにしており、結び目の判定問題における計算量の研究に新たなトレンドを生み出す研究であるといえる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認められる。

備考：審査の要旨は、1,500 字以内とする。