# 学位論文要旨

# The computational complexity of the solid torus core recognition problem (トーラス体のコア判定問題の計算量について)

数学プログラム 西村 勇哉

3 次元球面 $\mathbb{S}^3$ 内の結び目が交点を持たない図式を持つとき，その結び目は自明であるという．$\mathbb{S}^3$ 内の結び目 $K$ の図式が与えられたとき，$K$ が自明な結び目であるかどうかを判定する問題は，結び目の自明性判定問題と呼ばれ，計算論的位相幾何学の最も基本的な問題のひとつとして知られている．[2] において，Hass-Lagarias-Pippenger はこの問題に対する非決定性多項式時間アルゴリズムを構成し，この問題がクラス **NP** に属することを証明した．さらに，Lackenby はこの問題がクラス **co-NP** に属することを証明した ([3])．したがって，結び目の自明性判定問題は **NP** $\cap$ **co-NP** に属する．一方で，この問題がクラス **P** に属するかどうか，すなわちこの問題を解く決定性多項式時間アルゴリズムが存在するかどうかは，依然として未解決問題である．

$V = \mathbb{S}^1 \times D^2$ をトーラス体とし，$x$ を $D^2$ の内点とする．$V$ 内の結び目 $K$ が $\{x\} \times \mathbb{S}^1$ と全同位同値であるとき，$K$ を $V$ のコアと呼ぶ．$V$ 内の結び目 $K$ が与えられたとき，$K$ が $V$ のコアであるかどうかを判定する問題をトーラス体のコア判定問題と呼ぶ．トーラス体 $V$ をアニュラス $A$ と単位区間 $[0,1]$ の直積空間とみなし，$V$ 内の結び目 $K$ の $A \times \{0\}$ への射影を考えることで，$K$ のアニュラス上の図式が得られる．このとき，$K$ が $V$ のコアであることの必要十分条件は，$K$ が交点を持たない図式をもち，かつ $K$ を 1 次元サイクルとみなしたときにその整数係数 1 次元ホモロジー類 $[K] \in H_1(V;\mathbb{Z})$ が自明でないことである．このことから，トーラス体のコア判定問題は結び目の自明性判定問題の類似の問題とみなせる．

$K$ をトーラス体 $V$ 内の結び目，$E$ を $K$ の外部空間とすると，$K$ が $V$ のコアであることと，$E$ がトーラスと単位区間の直積空間 $T^2 \times [0,1]$ と同相であることは同値である．Haraway-Hoffman は，[1] において，与えられた 3 次元多様体が $T^2 \times [0,1]$ と同相であるか判定する問題が **NP** に属することを報告した．さらに，入力として与えられる 3 次元多様体を既約多様体に限定すれば，この問題は **co-NP** に属することも報告している．これらの結果から，トーラス体のコア判定問題は **NP** に属することがわかる．

本学位論文では，トーラス体のコア判定問題に対する新たな非決定性多項式時間アルゴリズムを与え，この問題が **NP** に属することについての別証明を与えた．本学位論文で構成したアルゴリズムは，Haraway-Hoffman のアルゴリズムを用いた場合と比較して，トーラス体内の結び目がコアかどうかの判定を，より簡単かつ直接的に行うことを可能としている．また，トーラス体 $V$ 内の結び目 $K$ について，1 次元ホモロジー類 $[K] \in H_1(V;\mathbb{Z})$ が非自明ならばその外部空間は既約である，という事実を用いて，この問題が **co-NP** に属することを証明した．さらに，これらの結果の系として，3 次元球面内の絡み目 $L$ の図式が与えられたとき，$L$ が Hopf 絡み目と全同位同値であるかを判定する問題についても，**NP** $\cap$ **co-NP** に属することを証明

した.

## 参考文献


[1] Robert Haraway III and Neil R Hoffman. On the complexity of cusped non-hyperbolicity. *arXiv:1907.01675*.

[2] Joel Hass, Jeffrey C. Lagarias, and Nicholas Pippenger. The computational complexity of knot and link problems. *J. ACM*, 46(2):185–211, 1999.

[3] Marc Lackenby. The efficient certification of knottedness and Thurston norm. *Adv. Math.*, 387:Paper No. 107796, 142, 2021.