# 学位論文要旨

# Alternating links and cubed complexes
# (交代絡み目と立方複体)

坂井 駿介

交代絡み目とは, その図式において絡み目の各成分をたどっていくとき交点の上下を交互に通るような絡み目のことである. 交代絡み目は特殊な絡み目ではあるが, 最も基本的な絡み目である 2 橋絡み目を含み, 様々な観点から研究されている. 交代絡み目は格段に良い性質を持つことが知られており, 特に, 連結和に関して素であるような交代絡み目は, トーラス結び目でないならば双曲的である（補空間が有限体積完備双曲構造を持つ）という性質は本論文で重要な役割を果たす.

一方, 立方複体とは, 立方体を貼り合わせてできる CW 複体 $\mathcal{C}$ である. 貼り合わせ写像を等長変換で実現しておくと, 立方複体 $\mathcal{C}$ には (特異点を持つ) 局所ユークリッド距離が導かれる. さらに, もし $\mathcal{C}$ が Gromov のリンク条件を満たすならば, $\mathcal{C}$ は局所 CAT(0) 空間になることが知られている. 立方複体のアイデアは幾何学的群論を含む様々な分野で登場するが, 3 次元多様体論および結び目理論への応用は, 1990 年に出版された Aitchison-Rubinstein の講義録に始まった. I. Aitchison は素な交代絡み目外部空間を局所 CAT(0) 立方複体に分割する方法を考案した. 以下, この複体を Aitchison 複体と呼ぶ.

本論文では, 交代絡み目と Aitchison 複体に関する下記の研究を行った.

1. 立方複体の観点からの交代絡み目外部空間の特徴づけ（第 1 章）.
2. 立方複体を用いた双曲的交代絡み目群の放物的生成対の研究（第 2 章）.

**第 1 章. 立方複体の観点からの交代絡み目外部空間の特徴づけ**

近代結び目理論の父である R. H. Fox が提案した問題「What is an alternating knot?」は, 結び目図式により定義された交代結び目を, その外部空間の内在的性質によって特徴づけることを求めている. この問題は長らく未解決であったが, 2017 年に J. Greene と J. Howie により, 外部空間に適切に埋め込まれた正定値・負定値の曲面対の存在という特徴づけ（解答）が独立に与えられた. この特徴づけは交代結び目のみならず交代絡み目に対しても成立する. Gordon-Luecke の結び目補空間定理により, 結び目はその外部空間で決まるため, 上述の結果は交代結び目外部空間の特徴づけも与える. しかし, 成分数が 2 以上の絡み目に関しては補空間定理が成立しないため, 交代絡み目外部空間の特徴づけを与えるという問題が残る. この問題に対して, 我々は, Aitchison 複体を用いた解答を与えた. そのためまず, D. Wise により導入された VH-squared complex の概念をヒントにして, 符号付き BW 立方複体という概念を導入した. Aitchison 複体が 符号付き BW 立方複体の構造を持つことを観察した上で, 与えられた符号付き BW 立方複体が Aitchison 複体となるための必要十分条件をオイラー標数の条件で与えた. これにより交代絡み目外部空間は, その条件を満たす符号付き BW 立方複体への分割を持つ 3 次元多様体として特徴づけられた.

**第 2 章. 立方複体を用いた双曲的交代絡み目群の放物的生成対の研究**

まず研究の背景を述べる. 2001 年にブダペストで開催された研究集会において, I. Agol は 2 つの放物的変

換により生成される自由群でないクライン群の分類定理, 及びそのようなクライン群に対する放物的生成対の分類定理を発表した [1]. この 2 つの分類定理の正確な内容は以下の通りである.

1. 2 つの放物的変換により生成されたクライン群 $\Gamma$ が自由群でないならば, $\Gamma$ は双曲的 2 橋絡み目群あるいは Heckoid 群と共役である.
2. 双曲的 2 橋絡み目群の放物的生成対は上方生成対と下方生成対の 2 種類に限る. また, Heckoid 群の放物的生成対は 1 種類だけである.

証明のアイデアが書かれた講演スライドは公表されていたものの, 論文として発表されずプレプリントも書かれていないという状況であったが, 最近になり結果 1 の完全な証明が Akiyoshi-Ohshika-Parker-Sakuma-Yoshida [3] により, また結果 2 の「別証明」が Aimi-Lee-Sakai-Sakuma [2] により与えられた. 双曲的 2 橋絡み目群の放物的生成対に関する上述の結果 2 の Agol の発表スライドに書かれている証明は, 魅力的なアイデアに満ち溢れ, 上述の結果よりもより深い内容を含むと同時に, 双曲的 2 橋絡み目のみならず一般の双曲的交代絡み目に対しても適用できるという有効性を兼ね備えているが, 残念なことにきちんとした議論は述べられておらず, その詳細はまだ解明されていなかった. このような状況の中で, 我々は結果 2 の双曲的 2 橋絡み目群の主張に対する Agol の証明のアイデアを正当化し, 次の定理に証明を与えた.

**定理.** (1) 双曲的交代絡み目の非可換メリディアン対が交差弧に由来するものでないならば, それが生成するクライン群は幾何的有限な自由クライン群である.

(2) 双曲的 2 橋絡み目群の非可換メリディアン対が上方, 下方メリディアン対と相異なるならば, それが生成するクライン群は幾何的有限な自由クライン群である.

以下, 証明の概要を述べる. Agol の基本方針は, 双曲空間 $\mathbb{H}^3$ の無限遠境界 $\partial\mathbb{H}^3$ へのメリディアン対の作用を調べることにある. そのために Agol は双曲的交代絡み目の 2 つのチェッカーボード曲面から自然に定まる $\partial\mathbb{H}^3$ 内の単純閉曲線の族の交差のパターンを, Aitchison 複体を用いることにより記述した. その記述を文字どおりに読むとそのままでは正しくないが, 我々は分類定理に必要な主張を抜き出して, それにきちんとした証明を与えた. さらに, Agol は上述の交差パターンを用いて記述できる $\partial\mathbb{H}^3$ 上のメリディアン対の作用に対して Klein-Maskit の組み合わせ定理を適用することにより分類定理を得ると述べている. しかし, その議論が成立するか不明であったため, 我々は 2 つの放物的変換が生成するクライン群に関する Maskit-Swarup による定理が適用できることを示し, 定理を証明した.

最後のセクションでは, 双曲的 2 橋絡み目群の通約類に関する Millichap-Worden の結果と Canary による被覆定理を用いることにより, 上の定理の一般化する下記の定理を得た.

**定理.** 余有限体積クライン群 $\Lambda$ の非可換放物変換対が生成する部分群を $\Gamma$ とすると次のいずれかが成立する.

1. $\Gamma$ は幾何的有限な自由クライン群である.
2. $\Lambda$ は双曲的 2 橋絡み目群であり, $\Gamma = \Lambda$ である.
3. $\Lambda$ は射影空間内の双曲的有理絡み目群, $\Gamma$ は $\Lambda$ の指数 2 の部分群となる双曲的 2 橋絡み目群である.

## 参考文献

[1] I. Agol, *The classification of non-free* 2*-parabolic generator Kleinian groups*, Slides of talks given at Budapest Bolyai conference, July 2001, Budapest, Hungary.

[2] S. Aimi, D. Lee, S. Sakai, and M. Sakuma, *Classification of parabolic generating pairs of Kleinian groups with two parabolic generators*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste **52** (2020), 477–511.

[3] H. Akiyoshi, K. Ohshika, J. Parker, M. Sakuma, and H. Yoshida, *Classification of non-free Kleinian groups generated by two parabolic transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. **374** (2021), no. 3, 1765–1814.