一般社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report
ET2024-5(2024-05)

量間の演算関係を対象とした算数文章題における乗除の統合的理解のための二重三角スキーマ

－Worked Example としての知識モデル外在化の試み－

平嶋　宗[†]

[†]広島大学大学院先進理工系科学研究科 〒739-8527　広島県東広島市鏡山 1-4-1

E-mail:　[†]tsukasa@lel.hiroshima-u.ac.jp

あらまし　算数文章題の多くは量に関する比例場面を扱っており，一つの比例場面は 6 つの乗除の式として記述でき，量の計算としてそれぞれ異なる意味を持つ．二重三角スキーマは，この 6 つの乗除関係を一つの図式で統合的に可視化する枠組みである．一つの三角スキーマは，「独立に存在しうる量である存在量二つ」と，「二つの存在量の関係として成立する一つの関係量（関係量１とする）」を各頂点に配置し，一つの乗算と二つの除算を各辺に配置する三角形で構成されており，二重三角スキーマにおいて対となるもう一つの三角形スキーマは，二つの存在量は同じで，関係量（関係量２）が関係量１に対して数が逆数で単位も逆となる．二つの三角スキーマは，二つの存在量間の辺を底辺として点対称に配置される．これは，それぞれの関係量に対する存在量の意味が逆転している（基準量と比較量）からである．この二重三角スキーマを用いることで，等分除，包含除や，三用法，1 より小さい数を用いた乗除，逆量関係にある二つの関係量，といった同一比例場面に存在する様々な乗除関係を可視的・統合的に説明できる．この二重三角スキーマを学習対象とする予備的実験を行ったところ，学習者がそれを活用できることを示唆する結果を得たので報告する．

キーワード　二重三角スキーマ，乗除文章題，比例関係，存在量と関係量

Double Triangle Schema for Integrated Interpretation of Multiplicaiton and Division in Mathermatic Word Problem

－Externalization of Knowledge Model as a Worked Example－

Tsukasa HIRASHIMA[†]

[†]Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University　1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8527 Japan

E-mail:　[†]tsukasa@lel.hiroshima-u.ac.jp

Abstract　We propose a double triangle schema as an integrated interpretation scheme for multiplication and division in mathematical word problems with a proportional relation. Proportional relations can be expressed arithmetically as six equations. The double triangle schema consists of two pairs of triangle schemas. One triangle schema is represented by a triangle with two independently existential quantities and a relational quantity (relational quantity 1) at each vertex, and one multiplication and two division at each side. The other triangle schema is described by the same two quantities plus another quantity that is the inverse of relational quantity 1 (relational quantity 2), with one multiplication and two divisions on each side. The edge between the two quantities is the base, and the two triangular schemas are arranged pointwise so that each of the two relational quantities is a vertex relative to the base. By using this schema, various multiplications and divisions that exist in the same event, such as equal division, inclusive division, multiplication by a number less than 1, and two relational quantities in an inverse quantity relationship, can be explained visually and in an integrated manner. We have conducted an experiment using this double-triangular schema as a learning object and report the results that suggest that learners can make use of it.

Keywords　Mathematic/Arithmetic Word Problem, Integrated Interpretation, Multiplication/Division, Proportional Relation

1. まえがき

比例関係を”Y=aX”と表記すると，代数操作によって異なる 5 個の式に変形できる．これら 6 個の式は数学的には同じ比例関係を表しているが，「意味のある数」である「量」を扱う文章題においては，それぞれ異なる意味を持つ．たとえば，「乗除の三用法」においては，”

Ｙ／Ｘ”を計算して”ａ”を求めることを第 1 用法，”ａＸ”を計算して”Ｙ”を求めることを第 2 用法，”Ｙ／ａ”を計算して”Ｘ”を求めることを第 3 用法と呼び，それぞれ異なる公式として扱っている. さらに, ”X=(1/a)Y”も数学的には等価であるが, 量としては, ”ａ”と”(1/a)”は異なった意味を持つため，この式に対しても乗除の三用法に応じて三つの公式が存在することになる.

筆者は，これまでに文章題の記述モデルとして三量命題モデルおよび三角ブロックモデルを提案してきているが[1]，これらをベースとして，前述の 6 個の乗除の式を統合的に可視化するモデル化を試みており[2]，その結果として提案しているのが「二重三角図」である．図 1 は，「リンゴ 10 個」と「皿 4 枚」の二つの量間に比例関係が成立するとした場合の二重三角図である. 三角形の各頂点は量命題(以下では単に量と呼ぶ)を表しており，各辺は辺が繋いでいる量間に演算関係が存在することを示しており，各辺に配置されている演算子が具体的な演算を表す．演算結果は各辺の対頂点にある量となる．”X”，”Y”に相当する量は存在量と呼ばれ, ”ａ”, ”(1/a)”に相当する量は関係量と呼ばれ，「一方の存在量の量 1 あたりの他方の存在量の量」と概念化できる．この概念化は，速度や割合でも同様に可能であり, たとえば時速４ｋｍは,「時間 1 時間あたり距離５ｋｍ」，であり，この速度の逆数となる関係量（逆関係量）であるタップタイムは,「距離１ｋｍあたり時間 0.25 時間」となる. 濃度５％の食塩水であれば,「食塩水１ｇあたり食塩 0.05ｇ」であり，その逆関係量は,「食塩 1g あたり食塩水 20ｇ」となる.

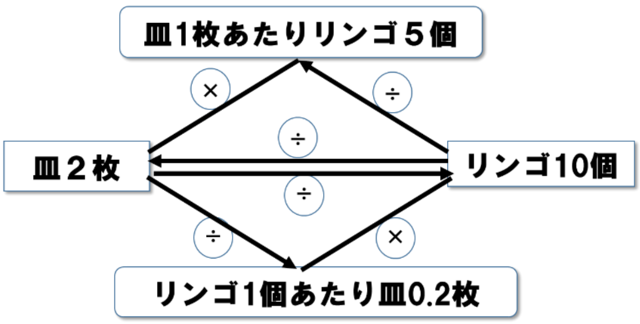

図１　二重三角図の事例

二重三角図は，量に役割を割り当て，量間の演算関係を決定するためのスキーマとして機能することから，二重三角スキーマとも呼ぶ．本稿では，説明のための用いる図式, として説明するため, 主に「二重三角図」，という言葉を用いる．「リンゴ 10 個を皿 2 枚に分けると 1 枚あたりリンゴいくつになるか」を求答問題としてのみ捉えれば，乗除の第 1 用法を用いれば十分であり二重三角図は不要といえる．しかしながら，この場面の持つ数学的関係を網羅的・探究的に考えることも重要であると考えれば，この二重三角図は有用といえる．たとえば，二重三角図に従えば，この場面には，10÷2 という等分除だけでなく, 10÷5 という包含除も含まれていることを知ることは，知らない場合に比べて文章題に対する理解が深まっていることは明らかであろう．さらに，等分除において数として大きい量を除数とすることも可能であり，この場面であれば，2÷10 が等分除となることも説明できる．さらに，この等分除によって得られる 0.2 という関係量によって，小数の乗除が成立し，掛けて小さくなる事例，割って大きくなる事例，が必然的に成立することもこの図の中で可視化されている.

比例場面に存在するこれらの数学的関係のそれぞれについては，対応する課題が算数の範囲において取り扱われていることが確認できる．しかしながら，それらが同一の比例場面に必然的に存在していることの統合的な説明は見当たらない．数学的表現に変換してしまえば，その表現を通してこれらの比例場面に存在する諸相を統合できるといえる. しかしながら,「事象・場面の背景にある数学的関係を読み取ること」および,「数学的に処理された結果を事象・場面に当てはめて

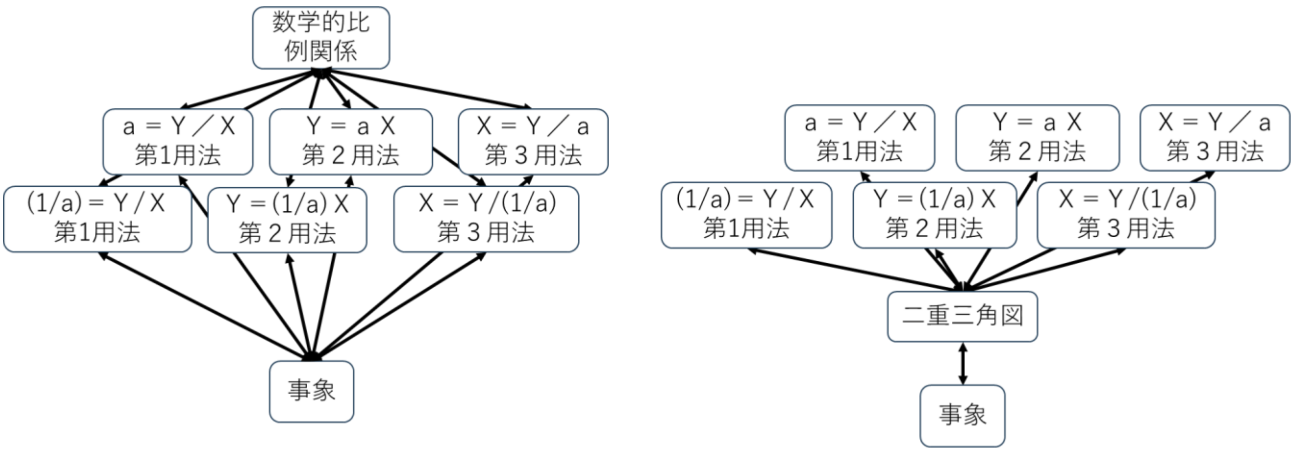

図２　量に関する比例関係の代数的統合と意味的統合

解釈すること」の二つの過程を経る必要があり，この二つの過程の実行は数学的表現だけでは解決できない．したがって，数学・代数を学べば直ちに統合されるとする根拠はないといえる．二重三角図は意味的に表現された場面と数学的表現の双方向の行き来を橋渡しすると同時に，数学的表現によって可能となる統合を，意味的なレベルで統合する図式であるといえる．図 2 に量に関する比例関係の代数的統合と意味的統合の模式図を示した．

以下本稿では，まず第 2 章において，二重三角図の構成について説明し，その利点についても論じる．第 3 章では，学習課題化について検討する．第 4 章では，大学生を対象とした行った予備的実験の結果を報告する．第 5 章では，従来の教え方との差分について検討する．第 6 章では，Worked Example としての位置づけについて論じる．

2. 二重三角図の構成

2.1. 存在量と関係量

“X”と”Y”の二つの変数が比例関係にある場合，”a” を比例定数として，”Y＝aX”と表現できる．文章題は具象性を持った事象を扱うため，”X”,”Y”および”a”は「意味を持った数」である「量」となり，三つの量で一つの比例関係(乗除関係)が成り立っていることになる．したがって，変数である”X”と”Y”の性質を持った量と，”a”の性質を持った量の二種類に分けることができるといえる．”X”と”Y”は変数として様々な数をとりうる量であり，”X”と”Y”の二つの量が存在し，比例関係にあることで，二つの存在する量の関係を表す量として”a”が成立する．このことから，二重三角図においては，”X”および”Y”に相当する量を「存在量」と呼び，”a”に相当する量を「関係量」と呼ぶ．

この関係量”a”は，「量”X”１あたりの量”Y”の数」を表すものとなっており，その単位は「”Y”の単位／”X”の単位」となる．存在量だけでは演算が成立するかどうかは不確定であるが，関係量が定義されていれば，その関係量の単位に沿った存在量の存在と，演算関係の成立が仮定されていることになる．また，関係量が明示されていない場合でも，存在量間に比例関係があるとした場合には，存在量の単位の商として組立てられる単位を持った関係量が成立していることになる．

ここで，“Y＝aX”は，”X=(1/a)Y”に数学的に等価変換可能である．したがって，”a”が”X”を基準とした場合の”Y”を表しているのに対して，”(1/a)”は”Y”を基準としたときの”X”を表していることになる．したがって，二つの関係量に比例関係が存在してれば，必ず二つの関係量が成立していることになり，数として逆数となる．一方の関係量に対して，もう一方と「逆関係量」と呼ぶ．そして，一方が 1 より大きい場合は他方が 1 より小さくなる．ここでは関係量の 1 に対する大小に言及する場合，1 より大きい関係量を非小数関係量，1 より小さい関係量を，小数関係量と呼ぶ．本来的にはどちらの関係量も対等であるといえるが，低学年で学習する「１あたり量」の問題や「倍」の問題では，１より非小数関係量が対象となっていることが多く，「割合」に関する問題では，小数関係量が対象となっている傾向がある．なお，二重三角図では，上三角形の非小数関係量を配置し，下三角形に小数関係量を配置することで，同一事象に対する二重三角図の記述を一意に決めている．

2.2. 演算の配置

二重三角図において辺に演算を配置しているが，これは各辺が結ぶ量間の演算関係を表し，辺に対置する頂点にある量がその演算結果となる．掛け算には方向性がないが割り算の場合には方向性があるため，矢印を使ってその方向を表している. 矢印の元が被除数で，矢印の先が除数となる. 上の三角形と下の三角形では，関係量を商における基準量と比較量の役割が入れ替わっており，結果として演算は点対称に配置される．なお，一つの関係量に対して一つの乗法と二つの除法が存在することと，一乗二除関係と呼んでいる．

2.3. 割合の単位

量は単位を持つ．物理的に定義された単位としては，長さ("メートル")や時間(“秒”)といった基本単位と，速度（”長さ／時間”）などの組立単位があり，基本単位が存在量の単位, 組立単位が関係量の単位に相当する．また，“個”や”本”などといった「助数詞」も単位として用いる．助数詞は単独では基本単位と同様に存在量の数を表し，助数詞同士や助数詞と基本単位との組み合わせで関係量の単位が組み立てられる．各量の単位を明確にすることで，物理の文脈における物理量の計算と同様，比例関係の文章題においても単位に基づいて計算可能性を判定することができる．二重三角図では，量間の計算可能性を判定できるだけの情報を持った単位が付与されていることを前提としている．

次に「割合」の場合の単位について検討する．割合は，「倍」や「%」で表現される量であり，「単位を持たない」とされる．しかしながら,「倍」や「%」は，何を基準の量とし，何を比較の量として導かれたによって意味が一意に定まっており，この情報を用いることなしに正しく利用できない. たとえば,「シュートの２０％がゴールとなった」とした場合, この２０％は，「ゴール本数／シュート本数（シュート数１あたりのゴール数)」という意味を持つ量となっており, その逆ではありえないという意味で，明らかに「ゴール本数／シュート本数」という単位を持っている．この単位

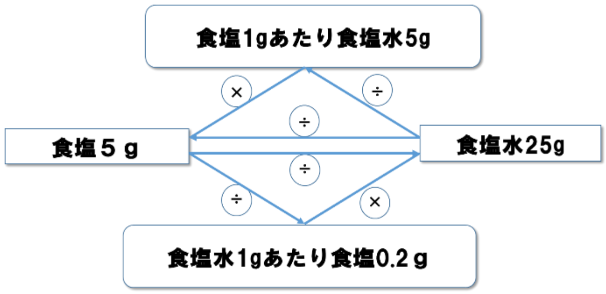

図３　割合に対する二重三角図の事例

の意味は，演算の決定においては，「皿１枚あたりリンゴ５個」と同じ役割を果たす．二重三角図においては，割合を前述のような単位を持つ関係量として扱うことで，比例関係を扱う文章題を統一的に扱う．

ここで，割合に関する関係量の表記法として，「ゴールに対するシュートの割合２０％」もしくは，「シュート１本あたりゴール 0.2 本」という単位が確定できる表記を用いるものとする．このような表記を用いることで，割合に関しての表記及び換算の難しさと，関係量としての扱いの難しさを分離して扱うことができると考えている．図３に割合に対する二重三角図の記述事例を示した．「食塩水 1g あたり食塩 0.2g」の単位は，「食塩の重さ／食塩水の重さ」となっている．また，「食塩水の重さに対する食塩の重さの割合」が「食塩水の濃度」である．

2.4.　二重三角図の利点

二重三角図を用いて文章題を処理する利点としては，以下の４つを上げることができる．

（１）演算決定過程の段階化・明確化と計算との分離
（２）量に関する乗除の統合化
（３）量に関する関係構造の操作対象化
（４）分数の乗除についての説明法の提供

二重三角図を用いて文章題を理解する場合，まず，(a)量の抽出，が行われ，さらに(b)存在量と関係量への量の分類と単位に基づく関係づけ，が行われる．この関係づけは，「計算」ではなく「演算関係」の決定であり，一つの演算が決定できれば，他の二つの演算も決定されることになる．これは，従来の計算法の決定を主眼とした「三用法」とは異なる理解の方法となる．また，理解が間違っている場合での，その間違いは量や関係の同定の間違いとして明示化されることが期待できる．この利点が（１）に該当する．

また，算数文章題の乗除には，三用法だけでなく，等分除と包含除， 逆量関係にある二つの関係量，１より小さい数を用いた乗除，といった様々な様相が存在しているが，従来の教え方ではそれらは個別に教えられており，それが同一の場面の異なる解釈であり，互いが必然的に存在していることは説明されていなかった．二重三角図は，これらの様相を同一の場面に対する二重三角図で可視的に説明することを可能にしている．例えば，単一三角図の三つの演算が三用法を表しており，そのうちの二つの除法がそれぞれ等分除と包含除となる．そしてその性質の違いは，等分除が存在量同士の割り算であるのに対して，包含除が存在量を被除数として関係量を除数とする除算であることとして説明できる．また，小数関係量が非小数関係量の対として必然的に存在することを可視化できており，したがって小数に対する乗除の結果の必然性も図式化できていることになる．これらの利点は（２）となる．

また，二重三角図を部品化し，組立て対象化することで，学習用の課題化が可能となる．この（３）の利点については，3．において述べる．

分数除法を関係量と逆関係量の数としての逆数及び演算としての乗除の逆転を用いて教授しようという試みはこれまでにも報告されている[3]．図３の数表記を分数にすると，関係量と逆関係量の関係にある「食塩水 1g 当たり食塩(1/5)g」と「食塩 1g あたり食塩水 5g」が，数としては逆数であり，演算としては乗除が入れ替わっていることが可視化されている．子の可視化された関係を用いて，より説得力の説明ができる可能性があると考えている．

3. 組立としての学習課題化

本章では，システム化を指向した部品化と部品の集合である組立キットの設計について概説する．現時点ではシステム化はできていないが，アンプラグドな形での組み立て活動の試みは行っており，3.3 において組立課題事例を紹介する．

3.1. 部品化

二重三角図をオープン情報構造アプローチ[4]の対象とすることで，部品組立，部品作成を学習課題化することができる．課題化のためにまず部品化が必要となるが，二重三角図は，（１）量部品，（２）演算部品，（３）三角フレーム，の三つに大きく分解できる．量部品はさらに，(1-1)存在量部品，(1-2)関係量部品，に分解できる．存在量部品は，(1-1-1)存在量概念，(1-1-2)数，(1-1-3)単位（基本単位，数助詞）に分解できる．関係量部品は，(1-2-1)基準存在量（１あたり量）概念，(1-2-2)基準存在量単位，(1-2-3)比較存在量概念，(1-2-4)数，(1-2-5)比較存在量単位，に分解できる．テンプレートとして存在量と関係量を記述すると以下のようになる．

・存在量テンプレート（[存在量概念]が[数][単位]あります）

・関係量テンプレート（[基準存在量概念]１[基準存在量単位]あたり[比較存在量概念]が[数][比較存在量単

位]あります）

ここで，速度，ラップタイム，濃度などの特定の名称が与えられている関係量に関しては，上記の 1 あたり量としての表記と，その特定の名称の両方が使えると同時に，それらの変換ができるものとする．

3.2. 組立キットの設計法

オープン情報構造アプローチでは，組み立てのための部品集合（組立キット）を用意し，そのキットからの組み立てとして学習活動を設計する．この学習活動は,（１）組立キットの粒度,（２）組立キットの完備性,（３）診断・フィードバックの詳細性，によって学習活動の複雑さと自律性のレベルを変化させることができる．組立キットの粒度を変えるためには，予め一部の部品を組み立てた状態で提供すればよいことになる．たとえば，テンプレートから量部品を組み立てる場合と，予め組み立てられた量部品を提供する場合では，粒度が異なるといえる．

完備性は，組立キットにおける冗長部品，不足部品の存在によってレベル分けできる．冗長部品も不足部品もないキットは「必要十分キット」,冗長部品がありかつ不足部品がないキットを利用する部品を選択する必要があるという意味で「選択的キット」と呼ぶ．不足部品があってそれを補完することだけが求められているキットを「補完的創造キット」と呼ぶ．補完的創造キットにおいては，冗長部品を含めることで組み立ての複雑さと自律性を高めることになるが，この場合を「選択的補完的創造キット」と呼ぶことにする．追加的に作成する部品によって組み立てられるものが異なってくることを許容する場合は,「探索的創造キット」と呼ぶ．探索的創造キットを提供した場合が組立課題の複雑さが最も高く，また高い自律性を求められるといえる．

オープン情報構造アプローチでは，元となる構造を部品化し，その部品を用いた組立て活動によって元の構造を再構成させる．したがって，組立て結果の診断に関しては，選択的キットまでについては，元の構造との比較によって命題レベルでの診断が可能となっている．不足部品の作成が必要な場合においても,「補完的創造キット」であれば，実質は診断機能が判別可能な範囲内での部品の選択として定式化することで，診断可能にすることができる．フィードバックについては,命題レベルでの正誤判定といった詳細レベルから，正誤のみのフィードバックまで様々な設定が可能となる．

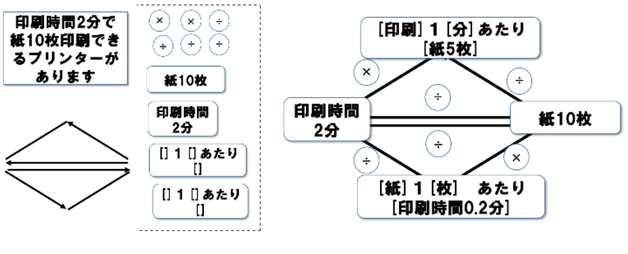

図４　組立課題（左）と組立結果（右）の事例

3.3. アンプラグドな組立課題例

図４に組立て課題とその組立例を示した．この課題に対するまだインタラクティブなシステム化できていないが，小学 5 年生を対象として，ロイロノートを用いてこれらの部品を提供し，配置させて提出させるといった形式での実践授業を実施したところ，二時限の授業で二重三角図を組み立てるところまで授業を進めることができた．この結果については別途報告する．

4. 大学生を対象とした予備的調査

大学生を対象として，比例場面に含まれている数学的関係の統合的理解の度合い，および二重三角図を与える効果について調査を行ったので報告する．

4.1. 手順

比例場面に含まれる 6 つの式は，図 2 に示したように代数的に統合できる．しがって，代数を学べばこの代数的な統合が自明である，あるいは容易なものであるとすれば，二重三角図はあえて用いる必要がないといえる．そこで基本的な代数の理解には問題がないと判断できる理工系学部学生・大学院生を対象に比例関係の統合的理解に関する調査を実施した．有効データは１８名分である．

調査は以下の手順で行った．

（１）事前タスク：調査課題１への回答（10 分）

（２）二重三角図の説明の聴講（15 分)

（３）事後タスク：調査問題２およびアンケートへの回答（15 分）

調査課題 1 は，(1-1)関係量保存性課題（6 問），(1-2)比例場面に対する立式課題 3 問で構成した．調査問題 2 は，調査問題 1 と同じ保存性課題及び立式課題に加えて，追加の立式課題 2 問で構成した．

4.2. 調査課題

・関係量保存性課題

二重三角図で「関係量」としている量は，一般的にな「内包量」と呼ばれており，この内包量への理解を測定するためにしばしば用いられるのが「関係量保存性課題」である[5]．ある比例場面においては，基準量や比較量を変化させても，関係量は変わらないことへの理解を問うものとなっており，図５に使用した問題を示した．問１，２は内包量の保存性の調査において標準的に用いられているものである[6,7,8]．内包量の保存性の調査は，速度や密度などの連続量であり，かつ,概念化された量を対象として行われており,問３，４のような離散量における１あたり量に関しての調査

例は見当たらないが，二重三角図ではこれらも関係量として同等に扱うため,調査課題に入れている.問５，６は１，２の内包量的な表現を，１あたり量として表現しなおしたものであり，問１，２との対比のために調査課題に含めている.

・立式課題

立式課題を図５に示した．問 7 は，非小数関係量，問 9 は小数関係量のそれぞれが連想され，問 8 は，両方の関係量が連想されることを想定した場面設定となっている．このような形での立式課題の先行研究は見当たらないが，逆関係量相当する量が理解できているかどうかに関する調査する試みはこれまでに行われている[5]．この先行研究では，十分な理解ができていると判断できる被験者は，大学生で 29%，中学生で 23%であったと報告している．ただし，この研究も含めた一連の研究は,「内包量」に焦点を当てており問 7 のような問題は対象外としている.

4.3.　結果と考察

保存性課題については，事前タスクで平均正解率 0.94，標準偏差 0.14 となり，問 1,2，問 3,4，問 5,6 の正解率はそれぞれ 0.89，0.94，0.97，事後タスクで平均正解率 0.97，標準偏差 0.08 となり，問 1,2，問 3,4，問 5,6 の正解率はそれぞれ 0.94，0.97，1 となった．事前で 3 名，事後では 2 名が完答できていなかった.

立式課題については，変数を式に含んでいいかどうかの判断で被験者の回答が分かれたと解釈できたため，非小数と小数の二つの関係量を求める式を立式しているかのみを分析した．事前結果を表 1 に示す．問 8 で二つの関係量を導けている被験者 14 名中，4 名が問題 7,8 のどちらかもしくは両方で馴染みのある関係量のみしか導けていなかった．事後においては全員が二つの関係量を求める式を立式していた．アンケートによる主観的評価結果は表 2 のようになった.

○保存性課題

問１：時速３０ｋｍで走り続ける車が１５ｋｍ走った時と，１２０ｋｍ走ったときでは，どちらが速いか，どちらも同じ

問２：時速５０ｋｍで走り続ける車が1時間走った時と，3時間走った時では，どちらが速いか

問３：リンゴが１箱30個入っているとして，リンゴが全部で60個ある場合と，リンゴが全部で90個ある場合で，1箱に入っているリンゴの個数はどちらが多いか，どちらも同じか

問４：リンゴが1箱30個入っているとして，5箱ある場合と，10箱ある場合で，1箱に入っているリンゴの個数はどちらが多いか，どちらも同じか

問５：1時間で２０ｋｍ進む車がある．２０ｋｍ走った時と，１００ｋｍ走った時で，どちらが1時間で走る距離が長いか，あるいは同じか

問６：1時間で６０ｋｍ進む車がある．1時間走った時と，４時間走った時で，どちらが1時間で走る距離が長いか

○立式課題

問７：｛リンゴが８個，お皿が2枚｝の二つの量があり，これらの量を含んだ乗除の式を作ることができるとします．これらの量を含んだ乗除の式をできるだけ数多く挙げてください.

問８：｛シュート10回，ゴール5回｝の二つの量があり，これらの量を含んだ乗除の式を作ることができるとします．これらの量を含んだ乗除の式をできるだけ数多く挙げてください.

問９：｛果汁50ml，ジュース250ml｝の二つの量があり，これらの量を含んだ乗除の式を作ることができるとします．これらの量を含んだ乗除の式をできるだけ数多く挙げてください.

図５　調査問題

保存性課題は事前において概ねできているため，事前と事後で特に変化が見られなかった．立式課題においては，事前のおいては，問７において非小数関係量の立式が有意に多く，問９では小数関係量の立式が有意に多かった．これは，事前においては，なじみのある関係量以外の関係量を導くことは自明ではなかったことを示唆している．事後において全員が逆関係量を立式できており，主観評価における「立式に二重三角図が役立った」という項目に全員が肯定評価を与えていることから，二重三角図が二つの関係量を認識するうえで一定の役割を果たしたことが窺われる．また，主観評価において，二つの存在量の存在や逆数関係についての項目が比較的肯定が少ないことは，立式課題において二つの関係量を立式できない被験者がいたことと符合する．二重三角図が乗除関係を全て可視化しているかどうかの項目については，否定的な判断はなく，肯定されたと判断している.

またこの結果は，量固有の性質に着目した「内包量」としてではなく，関係としての量である「関係量」の捉え方も有用性を示している．これについては，5.2 でさらに検討する.

これらの結果は，必要な代数を習得済みであり，代数表現を介して比例場面の数学的関係を統合的に把握できるはずの被験者においても，二つの関係量の存在を認識することが自明ではなく，また，二重三角図がこの認識に役立つことを示唆するものである．したがって，比例場面における乗除の統合的解釈は，代数を学ぶことによって自然に実現できるものではなく，もし統合的解釈を意義のあるものと考えた場合には，二重三角図が有用性を持つといえることを示唆している.

表１　立式課題の結果（事前タスク）

	非小数関係量（回答率）	小数関係量（回答率）	ｐ値（直接確率計算２×２）
問７	1.0	0.56	**p=0.003**
問８	0.83	0.94	p=0.353
問９	0.72	1.0	**p=0.045**

表２　主観的評価結果

	5	4	3	2	1
立式課題に二重三角図が役立った	10	8	0	0	0
二つの関係量が存在することを知っていた	3	6	5	1	3
二つの関係量が逆数関係にあることを知っていた	4	4	2	5	3
一場面の乗除関係を二重三角図がすべて可視化している	11	5	2	0	0

小学校での実践利用も試みており，その結果については別途報告する．

5. 従来の教え方との差分

5.1. 離散量と小数関係量

算数文章題において取り扱う量は，まず離散量と連続量に分類でき，連続量は外延量と内包量に分類できるとし，内包量は「外延量と対置」される量であると説明されることが多い．これに対して二重三角図においては，離散量と連続量の区別を必須のものとはしない．この区別が演算の決定において必要な情報でないからである．具体物の操作を用いて乗除の導入を図る段階では離散量での扱いが適当であると思われるが，統合を指向する段階では離散量と連続量の区別をする必要がないとの立場である．図 1 の小数関係量は，この立場からのものとなっている．この小数関係量は，比例関係に存在している数学的関係を完備なものとして表現するうえで必須であり，かつ，現実場面においても利用可能な量であるといえる．また，筆者が教職大学院の院生 13 名（現職教員 5 名，全員教職免許取得者，12 名が小学校免許取得）を対象に行った調査においても[9]，離散量に関する二つの関係量を対象とした課題を扱ったうえで二つの関係量の存在を教える重要性について全員が強い肯定と回答しており，離散量とされる量においても二重三角図を用いる妥当性はあると考えている．

5.2. 内包量と関係量

銀林は，「内包量とは「強さを表す量」であり，「広がりの量」である外延量と対置され，外延量は合併という操作に関して加法性を満たすのに対し，内包量は加法性を満たさない」[10]としており，多くの先行研究がこの定義に従いつつ，内包量が文章題の難しさの主な要因の一つになっている．また，個々の内容量を「最初から存在している量として位置づけ」て教えることが重要との考え方もある[11,12]．しかしながら，内包量の性質は物理的な性質であり，物理的な理解においては有用な概念であるといえるが，文章題の学習意義を「事象・場面の背景にある数学的関係を読み取ること」および，「数学的に処理された結果を事象・場面に当てはめて解釈すること」とした場合，必ずしも適切な観点ではないと筆者は判断している．

端的な例として，定義に従えば「温度」は内包量であり，多くの関連研究もそのように分類しているが，このことは演算関係を決定するための意味のある情報とはならない．また，「内包量」の難しさを克服するためには，個々の内容量となっている概念，たとえば「速度」や「密度」など，への理解を深める必要があるとする指摘もみられるが，数学で扱えるのは比例関係の存在だけであり，算数・数学の範囲でそれ以上の理解を求めるのか簡単ではないと思われる．理科教育の立場から，物理的な量を教える際の算数・数学での扱いとの連動の検討も行われているが，現状では物理量としての理解が文章題の学習によって適切に進んでいるとはいいがたい指摘されている[13]．

また，4 章で報告した立式課題の結果は，関係量を「最初から存在する量としての内包量」として指導することの負の影響が出ている可能性がある．たとえば問 9 では，濃度に対して逆の関係量に関しては，有意に回答が少なく，二重三角図を説明した後においても，「逆関係量に関しては日常的に使わないことから，不要なのではないか」とのコメントも得られている．これは，「濃度」は「最初から存在する量」であるが，その逆関係量は数学的関係として存在するだけであり，重要性が低いと判断されていると推察できる．

しかしながら，濃度の逆関係量に一般的名称は存在しないが，果汁の量から作ることができるジュースの量を考えるうえでは有用な概念／量であるといえる．このような量の存在を認識できないということは理解として不十分であろう．この理解を進めるうえでは，内包量に関して個々の量について教えていくというよりも，関係量の量として位置づけることが妥当であると筆者は判断している．

関係量として位置づけると，比例関係において扱われている内包量はすべて「1 あたり量」としても表現できる．「1 あたり量」として内包量や割合を捉えることの有用性は，これまでにもいくつかの研究で指摘がなされているが[14,15]，それを学習者に伝える方法は必ずしも明らかであったとは言えない．二重三角図は，二つの「1 あたり量」が明示化され，それぞれの演算における役割の違いも同じ図式上で可視化されている点で，学習に資する可能性が高いことが期待できる．なお，「1 あたり量」を関係量の基本表現としつつ，速度や濃度といった量の名称を用いてよいものとし，さらに，それらの量の名称の変換，つまり，速度は時間 1 あたりの距離である，といった変換，も学習対象になるとする．

5.3. 「割合」と「1 あたり量」

「割合」を表現する「倍」や「%」は，「比較量／基準量」として求められる量である．したがって，「基準量 1 あたりの比較量」という表現に等価変換可能であり，二重三角図ではこちらの表現が整合的である．また，「倍」や「%」は演算を決定する関係量としての役割と，その量を割合特有の数値に変換する役割の二つを同時に持っており，割合が不得手な場合にはこれらの二つを分離することは，負荷の軽減と役割の明確化として意義があると期待できる．これらの考察に基づ

いて，二重三角図では，割合の表現を直接関係量として用いる場合と，「1 あたり量」に変化して用いる場合の両方が可能であるとしておく．

6. 文章題理解の Worked Example

筆者は，二重三角図が文章題理解に適した Worked Example を提供する可能性があると考えている．Worked example とは，問題を解決する過程を詳細に説明した例解のことであり，この例解を通して具体的な問題解決のステップや必要となる思考過程を学習者に示すことで，その解決過程に対する学習者の理解を深め，自分自身で問題解決が行えるようにある手助けができるとされている．従来においても，公式利用を前提とした求答のための例解は存在したといえなくもないが，このような例解では二重三角図が指向する統一的な理解は困難といえる．また，文章題に関する研究はその困難さの要因を明らかにする成果は上げているものの，解決過程自体の解明は不十分であるとの見解もある[16]. 筆者も，計算論的に考えて，従来の例解が十分に詳細であるとは言い難いと考えている．

二重三角図においても，存在量と関係量の同定過程に関しては知識依存となっており，十分な計算的メカニズムがあるとは言えない．しかしながら，それ以降のプロセスは計算論であり，また，量の同定の失敗も二重三角図において命題レベルで検出可能であり，診断可能性が高いといえる．

二重三角図は，単文構成型作問の基礎モデルである三量命題モデル[1]の発展形であり，二重三角図自体も算数文章題に対する学習支援システムの基礎モデルとなるが，本稿で報告している試みは，このモデルを外在化して，アンプラグドな形で利用する試みとなっている[17]. 認知的妥当性の高い知識モデルに基づくことで，より高度な学習支援が可能になるとの考えのもと，学習支援を指向した知識モデルの開発は行われてきたといえるが，このモデルはシステムの開発だけではなく，教室における教え方・学び方自体を変える可能性を持っていると考えている．二重三角図の実践的でアンプラグドな活用は，その先駆となることを目指している．

7. まとめ

本稿では，比例場面を扱った文章題を統合的に理解するための枠組みである二重三角図について説明した．この中で，実験的利用の試み，および，従来の教え方との違いについても検討した．この二重三角図を用いた小学校での授業実践もすでに試みてており，この結果については別途報告する予定である．

文　献

[1] 平嶋宗. (2019). 作問学習に対する知的支援の試みと実践—組立としての作問および診断・フィードバック機能の実現—. *科学教育研究*, *43*(2), 61-73.

[2] 平嶋宗. (2023). 算数文章題乗除の統合的解釈と学習課題化. *教育システム情報学会研究会報告*, *38*(4), 16-23.

[3] 丹尾春彦. (2015). 逆内包量による分数除法の指導: 分数のわり算はなぜわる数をひっくり返してかけるのか. 教授学の探究, 29, 19-54.

[4] 平嶋宗. (2021). 思考の外在的行為化の場としての仮想空間−学習支援の立場から−. 人工知能, 36(4), 476-479.

[5] 進藤聡彦, & 麻柄啓一. (2014). 内包量の公式における 「変数の入れ替え原理」 の理解. 教授学習心理学研究, 10(1), 12-24.

[6] 斎藤裕. (2002). 短大生を対象とした内包量の理解に関する研究. 県立新潟女子短期大学研究紀要, 39, 25-35.

[7] 辻千秋・伊證三之·石井恭子(2010). 「内包量概念の形成に関する調査研究」『福井大学教育実践研究』第 35 号， pp.97-102

[8] 長浜朝子（2020)「算数科における児童のつまずきの背景に着目した授業改善－『内包量（速さ）の単元』を通して－」琉球大学大学院教育学研究科高度教職実践専攻年次報告書、pp.89-96

[9] 守山映見里, 尾坂隆児, 清水拓海, 林雄介, & 平嶋宗. (2024). 三量命題モデルのオープン化としての複数算数文章題連結的組立演習システムの開発と予備的評価. 教育システム情報学会誌, 41(1), 26-31.

[10] 銀林浩(1992). 『量の世界：構造主義的分析』むぎ書房.

[11] 麻柄啓一. (2001). 内包量に関する学習者の誤概念. 科学教育研究, 25(5), 295-303.

[12] 蛯名正司, & 佐藤誠子. (2020). 算数授業における割合の問題解決を促進する教授法の効果 「比例関係」 と 「具体的定義」 に着目して. 教授学習心理学研究, 15(2), 70-80.

[13] 熊倉啓之, 國宗進, & 柗元新一郎. (2023). 割合と比の関係に焦点を当てた割合指導の在り方. *静岡大学教育実践総合センター紀要*, *33*, 101-108.

[14] 小林寛子. (2023). 割合についての理解と割合文章題解決過程との関連. 東京未来大学研究紀要, 17, 61-69.

[15] 石井俊行, & 鶴見行雄. (2021). 小学算数 「単位量当たりの大きさ」 が中学理科 「密度」 に及ぼす効果~ 全国学力・学習状況調査問題 「算数 A」 と比較して~. 科学教育研究, 45(3), 280-291.

[16] 後藤学. (2022). 助詞 「は・の」 に着目した割合文章題における基準量・比較量の検討. 白鴎大学教育学部論集, 16(2), 133-142.

[17] 平嶋宗(2024). オープン情報構造アプローチのアンプラグド化プロジェクト，研究プロジェクト紹介，教育システム情報学会誌，Vol.24, No.2