広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第 70 号　2023〉

図形と方程式の視点から見た複素数を考えることのよさに関する授業実践

近　藤　裕　司

高等学校２年生の数学Ⅱで、実数という数体系を拡張し、代数方程式を解くということを目的に複素数が導入される。本稿では図形と方程式の視点から、複素数を考えることのよさを感じさせるために行った課題学習について述べる。その結果、実数の範囲ではできなかったことが複素数を用いることで考えられるようになり、複素数のよさを感じさせることができた。その一方で新たな課題も見えてきたため、その点についても論ずる。

１．はじめに

高等学校２年生で学習する数学Ⅱにおいて、複素数という数体系が導入される。坪井他（2023）では、「実数の２乗は０または正の数で、負の数になることはないから、２次方程式 $x^2 = -1$ は、実数の範囲では解をもたない。そこで、２次方程式が常に解をもつように、数の範囲を広げることを考えよう。」[1)] と書かれている。その後、虚数単位を導入し複素数を定義していく。さらに負の数に対して平方根を定めることで、任意の実数係数２次方程式を複素数の範囲で解くことができる。そして、解と係数の関係や因数定理、高次方程式へと続いていく。このように数学Ⅱにおいて複素数は、代数方程式を解くことを目的として導入され学習が進んでいく。このような流れは、他の出版社から出ている教科書でも同様である。

数学Ⅱではこれ以降の単元で複素数が出てくることは基本的にはない。新課程において再び複素数が登場するのは数学Ｃである。そこでは複素数上の四則演算の図形的な意味を、複素数平面や極形式などを用いて考え、複素変数の方程式が複素数平面上で表す図形についても学習する。
数学Ⅱにおける複素数の学習は上で述べたように代数的な手法で行われる。このような方法でも複素数を学ぶことはできるが、伊達（2011）で書かれているように「複素数の形式的な提示」[2)] に終わってしまう可能性もある。学習指導要領では「数を複素数まで拡張する意義を理解」[3)] させるよう指導することが書かれており、複素数のよさを感じさせることが複素数学習においてとても重要である。

２．数学Ⅱにおける課題学習について

平成 30 年告示の高等学校学習指導要領解説数学編理数編において、数学Ⅱでの課題学習の記述が加わった。そこでは数学Ⅱの内容を
(1) いろいろな式
(2) 図形と方程式
(3) 指数関数・対数関数
(4) 三角関数
(5) 微分・積分の考え
とした上で、課題学習を「(1) から (5) までの内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどした課題を設け、生徒の主体的な学習を促し、数学のよさを認識させ、学習意欲を含めた数学的に考える資質・能力を高めるようにする」[4)] ものと定めている。加えて主体的・対話的で深い学びを充実させるため、「課題学習では一層その実現を図ることが重要である」[4)] とされている。

本稿では、上記の５項目のうち、(1)・(2)・(4) の内容を関連付けて行った課題学習の実践について述べる。

３．方程式の表す図形について

3.1　数学Ⅱでの取り扱い内容

数学Ⅱの図形と方程式の単元では、方程式とそれが表す図形を相互に対応させて学習をする。例えば２元１次方程式 $2x - y + 1 = 0$ は、xy 平面上で傾きが 2、y 切片が 1 であるような直線を表す。これはこの方程式を満たす x、y の組を xy 平面上の点として考えたとき、点 (x, y) の集合は上記の直線をなすことを意味する。また xy 平面上の直線に対して、傾きとそれが通る１定点の座標、あるいはそれが通

Yuji KONDO：A classroom practice with respect to virtue of considering complex numbers in terms of figures and equations.

る異なる2定点の座標が与えられれば、その直線を表す方程式が得られる。このような双方向の対応により、方程式の考え方を用いて図形を調べること、およびその逆方向を考えることができる。

この単元では、座標平面上の円についても学習する。一般に中心が点 (a, b) で半径が r であるような xy 平面上の円の方程式は、

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

で与えられる。これを展開して整理することにより、定数 l、m、n を用いて円の方程式はすべて

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \cdots ①$$

の形で表すことができる。しかし①の形の方程式がすべて円を表すというわけではない。①の形の方程式が円を表す方程式となるのは、

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k \cdots ②$$

の形に変形した際に、$k>0$ となる場合のみである。$k=0$ の場合方程式②は点 (a, b) を表し、$k<0$ の場合は表す図形は存在しない。これらは、実数の平方の性質から従うことである。本稿で述べる授業実践は、②において $k<0$ となり方程式が表す図形が存在しない場合に着目し、複素数の範囲内で方程式の表す図形を考える課題学習を行ったものである。

3.2　本時で扱った内容

本時では②の形の方程式のうち、最も単純なものと思われる

$$x^2+y^2=-1 \cdots ③$$

を扱った。前節で述べたように x、y をともに実数の範囲で考えると、この方程式が表す図形は xy 平面上には存在しない。そこで、x、y を複素数の範囲で考える。実数 a、b、c、d と虚数単位 i を用いて複素数 x、y を

$$x=a+bi、y=c+di \cdots ④$$

と表す。方程式③に代入し整理すると、

$$(a^2-b^2+c^2-d^2)+2(ab+cd)i=-1 \cdots ⑤$$

となる。この等式の両辺は複素数であるから、これは連立方程式

$$\begin{cases} a^2-b^2+c^2-d^2=-1 \\ ab+cd=0 \end{cases} \cdots ⑥$$

と同値である。文字が4個であるためこの連立方程式が表す図形を考えると、4次元空間を考えることになり、どのような図形を表すのかわかりにくくなる。そこで x を実数、y を虚数の範囲で考える。すると、まず x が実数であることから $b=0$ という条件が得られ連立方程式⑥は

$$\begin{cases} a^2+c^2-d^2=-1 \\ cd=0 \end{cases} \cdots ⑦$$

となる。さらに y が虚数であることから $d\neq 0$ という条件が得られ、連立方程式⑦の第2式から条件 $c=0$ を得る。これを⑦の第1式に代入することで、

$$a^2-d^2=-1 \cdots ⑧$$

という方程式を得る。ここで a、d はともに実変数である。よって方程式⑧は ad 平面上で双曲線を表す方程式である。なお双曲線の方程式は数学Cで扱う内容であるため、数学Ⅱの段階では未習内容である。そこで、正弦と余弦の加法定理を用いて方程式⑧の表す図形を、原点を中心として $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動をする。すると回転移動後の図形を表す方程式は

$$ad=-\frac{1}{2} \cdots ⑨$$

となる。これは a、d が反比例の関係にあることを示しており、反比例のグラフの曲線を双曲線と呼ぶことは、中学校1年生で学習している。したがって方程式⑧が ad 平面上で表す図形は双曲線であるということがわかる。

4．授業実践

4.1　授業の概要

本稿で述べる課題学習は、国立大学附属高等学校2年生の2クラスを対象に行ったものである。双曲線の方程式という題目のもとで、本時の目標を以下のように設定した。

1．方程式の変数を複素数の範囲で考え、新たな図形の方程式を導く。(知識・技能)
2．回転移動を用いて既知の図形の方程式に帰着させることで、元の方程式の表す図形を調べることができる。(思考・判断・表現)
3．複素数を用いて考えることのよさを認識する。(主体的に学習に取り組む態度)

本時の内容に取り組む前に生徒たちは、複素数及び図形と方程式に関する学習を一通り終えている。また三角関数の単元のうち、加法定理を用いた点の回転移動とそれを応用した直線の回転移動までは既習事項である。

4.2　授業の実際

まず導入段階では復習として、方程式

$$x^2+y^2-2x-4y+6=0$$

が表す図形を考えさせた。②の形に変形することで表す図形が存在しないということを生徒に答えさせた。その後実数の平方の性質から、この方程式が表す図形が存在しないということを認識させた上で、生徒から「複素数の範囲で考えるとどうなるか？」という疑問を引き出し、次の課題を提示した。

課題	複素数の範囲で方程式 $x^2 + y^2 = -1$ が表す図形は存在するか？存在するならば、その図形を求めよ。

複素数の範囲で方程式③を考えるために x、y を④の形で表し、③に代入した後整理をさせ、方程式⑤を導かせた。⑤の両辺は複素数であることを踏まえた上で、「2つの複素数が等しくなるための必要十分条件は何であったか？」と問い、「実部と虚部がそれぞれ等しくなること」と答えさせ、連立方程式⑥を導いた。この段階で、複素数の範囲で方程式③が表す図形というのは、連立方程式⑥が表す図形のことであるということを理解させた。そこで、「⑥が表す図形をイメージできますか？」と問い生徒に考えさせたところ、「イメージしにくい」と答えた。その理由を説明させると、「文字が多くてわかりにくい」と答えた。そこで文字を減らすために x を実数、y を虚数の範囲で考えさせた。その後 3.2 節で述べたように方程式⑧を導かせた。

次に以下の問を提示した。

問	ad 平面上で方程式 $a^2 - d^2 = -1$ が表す図形は存在するか？

机間指導の中で $a = 1$、$d = \sqrt{2}$ などの解を求めている生徒を見つけ、その生徒の考えをもとにして図形が存在することを全体で確認した。続いてこの図形がどのような形であるかを調べるため、電子黒板で GeoGebra を映し、$-3 \leqq a \leqq 3$ の整数 a に対して方程式⑧を満たす 14 個の点（a, d）をとり、生徒にもワークシート上で同様のことをさせた。その後 GeoGebra でこの方程式が表す図形を表示し（**図 1**）、どんな曲線に見えるかを考えさせた。

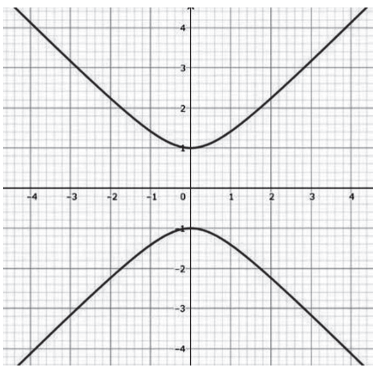


図 1　双曲線 $a^2 - d^2 = -1$

数人に聞いてみると「放物線に見える」という意見が返ってきた。方程式⑧を

$$d = \pm\sqrt{a^2 + 1}$$

の形に変形すると、d が a の 2 次式で表されないことから、放物線ではないということを確認した。ここからさらに双曲線であることを予想させるために、2 直線 $d = \pm a$ を GeoGebra で表した（**図 2**）。原点から離れるにつれて曲線と直線の位置関係がどう変化しているかに注目させ、遠くなるほどに近づいていくことを確認した。

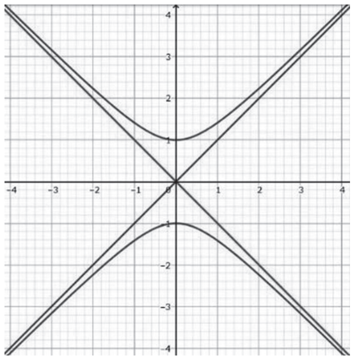


図 2　双曲線 $a^2 - d^2 = -1$ と漸近線 $d = \pm a$

曲線と直線がこのような位置関係にあるものを今までに学習したことはないかを考えさせ、反比例のグラフと形が似ているということを引き出した。反比例のグラフの曲線を双曲線と呼んでいたことから、方程式⑧の表す図形は双曲線であるという予想を立て、その証明方法を考えさせた。漸近線の傾きに注目して、原点を中心に $\frac{\pi}{4}$ だけ回転移動すれば確かめることができそうだという考えを引き出し、方針をまとめた。ここで時間がなくなってしまったため、実際に確かめることは次回に行った。正弦と余弦の加法定理を用いて回転移動後の図形を表す方程式が⑨になったことを根拠に、方程式⑧が表す図形が双曲線であることを示すことができた。

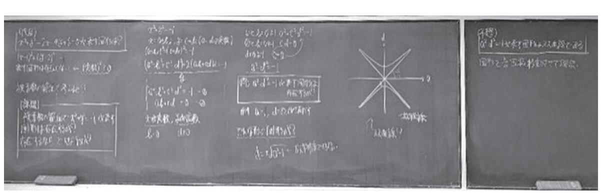


図 3　板書写真

5．複素数を考えることのよさ

本時の目標の「複素数を用いて考えることのよさを認識する」に対して達成度を測るためにアンケートを行った。

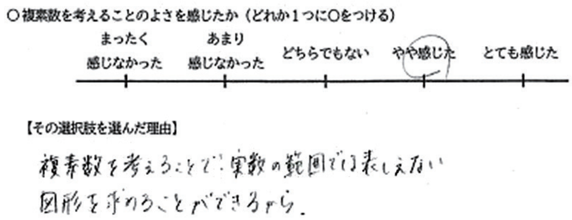


図４　生徒の感想１

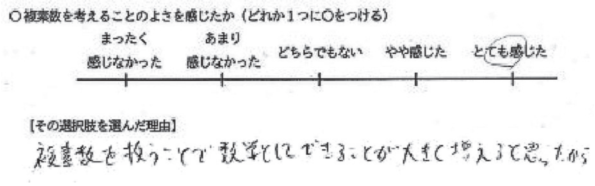


図５　生徒の感想２

なおそれぞれの選択肢を選んだ人数は、２クラスの合計で以下の通りである。

表１　選択肢別の人数

	人数
とても感じた	6 人
やや感じた	53 人
どちらでもない	7 人
あまり感じなかった	5 人
まったく感じなかった	1 人
計	72 人

肯定的な選択肢を選んだ生徒が大半となった。このように今回の課題学習により、図形と方程式の視点からも複素数のよさを感じさせることができたと考える。

６．成果と新たな課題

代数的な面から主に行われる数学Ⅱの複素数学習において、図形を絡めた視点からの課題学習により新たに複素数のよさを感じさせることができたということは、この実戦での成果であると考える。

一方で新たな課題も見えてきた。以下は、気になることとして生徒が感想に書いたものである。

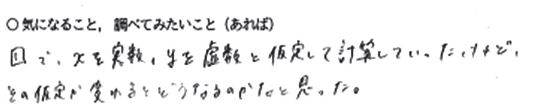


図６　生徒の感想３

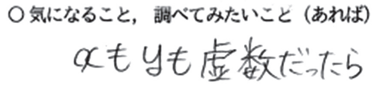


図７　生徒の感想４

このようなことを書いた生徒は他にもいた。今回の実践では、x を実数 y を虚数とする方針を授業者側で決めて進めていった。例えば両方を純虚数で考えると、連立方程式⑥から

$$b^2 + d^2 = 1$$

という単位円を表す方程式が得られる。したがって、同じ方程式 $x^2 + y^2 = -1$ でも x と y をどの範囲で考えるかによって、現れる図形は異なってくる。生徒にこの辺りもまかせてやらせてみると、より探求的な授業が行えたかもしれない。

加えて今回の内容は、3 次元空間内の図形と深く関連がある。連立方程式⑦の第 1 式目は、3 次元空間内で二葉双曲面と呼ばれる図形を表す。この図形を平面 $c = 0$ で切断したときの断面として双曲線 $a^2 - d^2 = -1$ が現れる。新課程になりベクトルが数学 C へと移行したが、そのような理解もできればより深い学習ができると考えられる。

今回の実践により数学Ⅱでの複素数学習に対して、新たな視点からの価値づけを行うことができた。同時に新たな課題や改善点も見えてきた。今後の授業にもこれらを還元できるよう、普段の授業に取り組んでいきたいと考える。

引用・参考文献

1）坪井俊・大島利雄・加藤文元・川中宣明・榎本博人・大西俊弘・逆井卓也・服部哲弥・深谷賢治・矢田和善・宗重徹・賀永麻美・数研出版株式会社編集部,『数学Ⅱ』, 数研出版, 2023 年, 42.
2）伊達文治,「ゼミから生まれた数学的活動図」, 上越教育大学数学教室編『上越数学教育研究』第 26 号, 2011 年, 13.
3）文部科学省,『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』, 学校図書, 2019 年, 54.
4）文部科学省,『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』, 学校図書, 2019 年, 67.

A classroom practice with respect to virtue of considering complex numbers in terms of figures and equations.

Yuji KONDO

Abstract :

In the 11th grade of high school, we introduce complex numbers by expanding real numbers to solve algebraic equations. In this paper, we describe problem-solving-learning, conducted to help students realize the virtue of considering complex numbers in terms of figures and equations. Consequently, using complex numbers allows us to deal with topics that do not seem to be very interesting within real numbers. However, we recognize problems concerning this practice; therefore, we also refer to them.

資料１　本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
（導入　５分） 表す図形が存在しない方程式の復習。	（復習）方程式 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ は xy 平面上でどのような図形を表すか？	
	○表す図形が存在しないということを説明する。【個人で確認→発表】 ○複素数を学習したことを踏まえ、次の課題を立てる。	・必ず実数の平方の性質を根拠として説明させる。
（展開１　15分） $x^2+y^2=-1$ を複素数の範囲で考え、実数変数の方程式を導く。	（復習）方程式 $x^2+y^2-2x-4y+6=0$ は xy 平面上でどのような図形を表すか？	
	○ $x=a+bi$、$y=c+di$(a、b、c、d は実数）と表すことで、$(a^2-b^2+c^2-d^2)+2(ab+cd)i=-1$ という方程式を得る。 ○ x を実数、y を虚数とすることで、方程式 $a^2-d^2=-1$ を導く。	・x、y の少なくともどちらか一方が虚数である場合を考えるということを理解させる。 ・複素数の相当の条件から方程式を導かせる。
（展開２　25分） $a^2-d^2=-1$ が双曲線を表すということを確かめる。	（問）ad 平面上で方程式 $a^2-d^2=-1$ が表す図形は存在するか？	
	○ $a^2-d^2=-1$ が表す図形が存在する理由を説明する。【相談→発表】	・この方程式を満たす点の存在に着目させ、図形が存在するかどうかを考えさせる。
	（問）ad 平面上で方程式 $a^2-d^2=-1$ が表す図形の形を調べよ。	
	○方程式を満たす点を数個とる。 ○ GeoGebra の曲線を見て、どのような図形になっているかを予想する。 ・予想される考え：２つの曲線、２つの放物線、線対称な曲線 【相談→発表】 ○２直線との位置関係に注目しどのような図形になるかを再び予想する。 ・予想される答え：反比例のグラフと同じ形の曲線【相談→発表】	・GeoGebra でこの方程式が表す図形を見せる。 ・２直線 $d=\pm a$ を表示し、直線と曲線の位置関係に注目させる。
	（問）予想を示すにはどうすればよいだろうか？	
	○回転移動を用いて双曲線であるということを明らかにする。【相談→発表】	
（まとめ　５分） まとめと感想の記入	○本時の振り返りをし、感想を書く。	・反比例の式以外にも双曲線の方程式があるということを確認する。
備考　準備物：PC（使用ソフト：GeoGebra）、プリント		

資料２　ワークシート

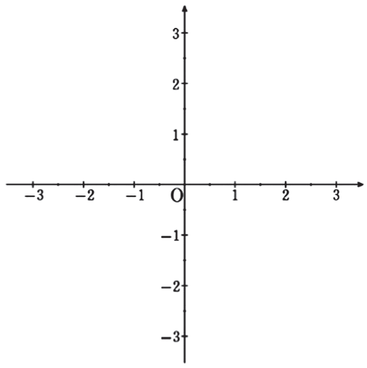
方程式 $x^2+y^2=-1$ が表す図形　　　II年（　　）組（　　）番（　　　　　　　　）

1

問題
複素数の範囲で方程式 $x^2+y^2=-1$ が表す図形は存在するか？存在するならば，その図形を求めよ。

2

平面上で，方程式　　　　　　　の表す図形は存在するか？→



3

予想
方程式　　　　　　　の表す図形は　　　　　　　である。

○ 既習事項を使って予想を確かめてみよう

4（今日の授業の振り返り）

○ わかったこと，わからなかったこと，おもしろいと感じたことなど

○ 複素数を考えることのよさを感じたか（どれか１つに○をつける）

まったく感じなかった	あまり感じなかった	どちらでもない	やや感じた	とても感じた

【その選択肢を選んだ理由】

○ 気になること，調べてみたいこと（あれば）