Title	不等式による評価に関する教材開発と実践報告
Author(s)	重松, 正樹
Citation	中等教育研究紀要 ／広島大学附属福山中・高等学校 , 64 : 37 - 47
Issue Date	2024-04-01
DOI	
Self DOI	10.15027/55186
URL	https://doi.org/10.15027/55186
Right	
Relation	

不等式による評価に関する教材開発と実践報告

重松　正樹

不等式による評価は，数学的な表現をする上で価値のある考え方であり，解析学ではよく扱われるが，高校までの数学ではあまり扱われない。高大接続の課題の一つと考える。発達段階のより早い段階から不等式による評価を経験することで，この考え方を身につけさせられるのではないかと考えた。中学 1 年生を対象に不等式による評価を図式的推論を介して取り組む教材を開発し，実践した。本稿ではその報告し，中学 1 年生に対する教材の妥当性と価値を考察する。

1. はじめに

不等式とは，岩波数学辞典には「全順序集合，特に実数の間の大小関係を表す式」とある。等式とは異なり，等しくはないものの，誤差を含んだまま考えることが出来るので，等式では考えることの難しい場合でも不等式では考えることが出来る。2 つの事象を比較し，検討することは数学に限らず必要な考え方である。例えば，2 つの事象を，データを用いて多角的に比較，検討することは統計学でも行われる。不等式による評価も 2 つの事象を比較して検討する考え方である。

本稿における「不等式による評価」を定義する前に，不等式を扱う例として，「不等式を解く」と「不等式の証明」を確認し，それらとの違いも含めて定義する。

「不等式を解く」とは，「ある部分集合 X においてのみ成立する不等式を条件付き不等式といい，条件付き不等式に対して，不等式を満たす集合 X を不等式の解といい，解を求めることを，その不等式を解くという」と岩波数学辞典にある。現行の学習指導要領(2018)の数学Ⅰにおいて，一次不等式と二次不等式を解くことを，方程式と同様に同値変形によって学習している。例えば，一次不等式 $2x+3>9$ は次のように同値変形をして解を求める。

$$2x+3>9$$
$$x>\frac{9-3}{2}$$
$$x>3$$

「不等式の証明」は，数学Ⅱにおいて扱われており，与えられた，あるいは予想を立てた不等式が成り立つかどうかを証明する。不等式の両辺の式や数量は定まっていることがほとんどである。

本稿では「不等式による評価」を「未知の数量や式に対して，不等式を用いて既知の数量や式との大小関係を表すことで，その値を考察，分析すること」とする。

例えば，円周率 π が未知の値として，既知の数量を用いて， $3<\pi<4$ と表し，π がどれくらいの値なのか考察することも不等式による評価として捉える。$0<\pi<100, 3.1<\pi<3.2$ と導き出したとしても，未知の数量に対してどれくらいの値か分析しているので，不等式による評価をしていることになる。

「不等式を解く」とは，同値変形によって考えられるものではないという点で異なり，「不等式による評価」とは，不等式の両辺が既知ではないという点で異なる。

成立すると推定した不等式を証明するために，既知の不等式を利用することも不等式による評価をしているととらえる。不等式の証明をするために不等式による評価を手段として用いている。

また不等式による評価において，厳しい評価と厳しくない評価とは，実際の値と比較してどうかという点である。先ほどの例の $0<\pi<100$, $3.1<\pi<3.2$ が極端でわかりやすい。より厳密な値がとれているのは，$3.1<\pi<3.2$ の方であり，この不等式の方が厳しい評価が出来ているととらえる。あるいは，ある値 a を評価する際，$a<b$ となる値 b を得たとする。そして，$a<c<b$ なる c を得た場合、$a<b$ よりも，$a<c$ の方が厳しく評価しているということである。

このように，不等式による評価は式や数量を考察，分析する上で価値のある考え方である。数学の，特に解析領域においてはよく扱われているが，高校数学ではあまり扱われておらず，中学数学ではほとんど扱われていない。不等式にあまり慣れてないまま進学する点で，高大接続の一つの課題ではないかと考える。

高校数学における不等式の学習の困難性について，鈴木(1990)や服部(2010)などが言及しており，また坂岡，宮川(2016)は，不等式の学習の困難性の要因を考えるために不等式の性格を分析している。

不等式の扱いは高校生にとっても難しいものと考えられるが，過去の研究（重松，2023）で，不等式による評価の教材開発における課題は，評価するために都合のいい数量や式を見いださせるのは困難であり，そのためには

不等式による評価の経験を重ねる必要があると述べている。また，この課題の解決案として，不等式による評価を扱った教材が出てくる度に意識させて，考え方を身につけさせていく，とも述べている。

これを踏まえて，より発達段階の早い段階から不等式による評価に取り組ませることで，不等式を扱う経験を重ね，考えを身につけさせられるのではないかと仮説を立てた。したがって，今回は中学 1 年生を対象に不等式による評価を，図式的推論を用いて解決する教材を開発し，実践した。本稿ではその実践を報告し，中学 1 年生に対する教材の妥当性と価値を考察する。

２．中学 1 年における不等式の扱い

現行の学習指導要領(2018)において中学 1 年では，文字式の単元の関係を表す式の 1 つとして，2 つの数量の大小関係を表す式として不等式を，大小関係を表す記号として不等号を学習する。また，関数の単元にて，変数の範囲を表す記号としても不等号を学習する。不等式は，大小関係や範囲を表す式として学習しており，不等式の計算は出来ない。

しかし，不等式の推移律 $(a<b, b<c \Rightarrow a<c)$ は扱うことは十分可能である。したがって，不等式の計算によって不等式による評価を考える代わりに，図式的推論を採用する。図式的推論とは，山本(2010)は「課題やはじめの状況にある関係を明確にするために，記号化し，そこから子どもたちが内在している関係を読み取っていくこと」ととらえていおり，本稿においても同じ立場をとる。

図式的推論の例の 1 つに，多項式同士の式の展開がある。$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ という式の展開は，長方形の面積によって表現すること(図 1)と，分配法則を用いて説明することで，課題を解決する。

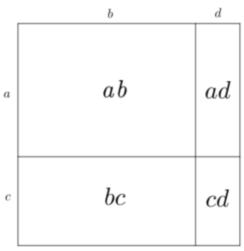

図 1:多項式の展開

また，Nelsen 著，秋山ら訳の「証明の展覧会Ⅰ・Ⅱ」には，ピタゴラスの定理など数多くの等式や不等式を図的に表したものをまとめている。これらを発問の仕方によって，図式的推論を扱う教材とすることは可能である。

教材開発次第で，課題である不等式による評価を，図式的推論によって解決することは十分可能であると考える。

したがって，今回扱う不等式による評価の教材は，直観的な図形を並べる活動を元に，その並べ方を考察することで，不等式による評価を見いだす教材とした。

３．教材の背景

題材は，バーゼル問題

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

を扱う。無限級数では扱えないので，有限回の操作で説明可能な部分和を扱う。左辺の部分和は，項数が増えるほど計算が困難になるため，実値を求める計算を工夫するのではなく，不等式による評価をすることで，数量の値を把握する教材となると考えた。

部分和であるならば，

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}<\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4}$$

と評価し，自然数 $n, m\ (n>m)$ を用いて，

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}<\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{2^l}$$

$$=1-\frac{1}{2^m}$$

$$<1$$

のように，1 より小さいと評価することが出来る。

これを図形で表すと，

$\left(1\text{ 辺が }\frac{1}{k}\ (2\leq k\leq n)\text{ の正方形の面積の総和}\right)$

$<\left(\text{横が }1,\ \text{縦が}\frac{1}{2^l}\ (1\leq l\leq m)\text{ の長方形の面積の総和}\right)$

$<\left(1\text{ 辺が }1\text{ の正方形の面積}\right)$

というように，正方形と長方形によって表現することが出来る。そして，以下の図 2，図 3 ように並べることで，先に述べた不等式による評価を図形で表現できる。このように，正方形や長方形を実際に並べて考えさせ，並べる過程を説明させることで不等式の評価に関連付ける。

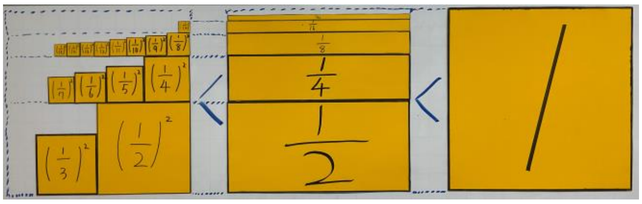

図 2：不等式と同じように並べたもの

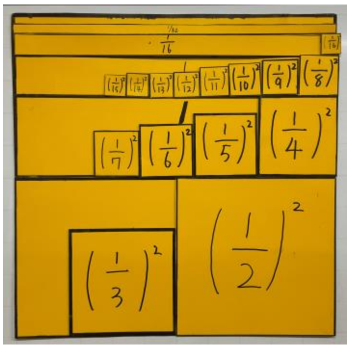

図 3：重ねたもの

４．授業の実際

（1）授業設計

今回の授業実践は当校第 1 学年の生徒 124 名(42 名/1 クラス，41 名/2 クラス)を対象に，1 時間の授業を 1 回ずつ実践した。すべての実践で 4，5 人のグループで活動した。1 クラスの授業を終えるごとに発問や働きかけなどを修正したが，主となる発問は以下通りである。

(導入)

問 1「ジュースを半分ずつ飲み続けるとすべて飲み干すには何回飲めばよいだろうか。」

問 2「1 年前に伸びた半分だけ伸びる木がある。1 年目に 1m伸びたとき，100mになるのは何年後か。」

(展開 1)

問 3「面積が 1 ㎠の正方形に対して，その正方形の 1 辺を半分にし続けた長方形の面積総和が 1 ㎠を越えるには長方形が何枚必要か。」

(展開 2)

問 4「次の式の□に入る適切な等号，不等号は何か。ただし m は自然数とする。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{m^2}\square 1」$$

問 1 と問 2 で具体的な事象で同様の変化をしている事象を扱うことで導入とする。問 2 で，100mよりも小さい 2mで木の高さが評価出来ることを考えさせ，不等式による評価にも触れさせている。そして，問 3 で現実の事象から数学の事象に移るが，問 1 と問 2 と同様の考え方を用いることが出来る。ここまでの活動を踏まえて問 3 の関係を，不等式を用いて表現することで，図形から式へと視点を切り替える。

そして問 4 において，不等式から図式的推論を行い，不等式に戻って再び考える。問 3 で表した不等式と似た式で，手計算が困難な式を与え，予想させた後，各グループに正方形と長方形のパネルを与えて，予想が正しいといえる並べ方を見いだすよう活動する。

問 4 について，1 回目の実践のみ，問 3 と同様の問題文で発問している。つまり，以下の通りである。

「1 辺が $\frac{1}{2}$ cm，$\frac{1}{3}$ cm，…，$\frac{1}{\mathrm{m}}$ cmの正方形の面積総和が，1 辺が 1cm の正方形の面積をより大きくなるには，正方形が m 枚必要である。」

このように発問した場合，本実践で取り組みたい不等式の評価式と図形を関連付けるのが困難であった。実際，実践では図形の並べ方を見つけ出すことが出来たが，その後不等式によって表現をした際，図形を並べきった時点で生徒は納得してしまっていて，なぜあえて不等式で表すのかわからない，という様子だった。

1 回目の実践を踏まえ，問 4 で空欄に入る等号，不等号を予想させる形となった。式で発問した場合，実際に計算しようとして頓挫する様子や，問 3 と関連付けて図で表現できないか考察する様子が見られた。

以下では，2 回目と 3 回目の記録から発話記録を作成し，随時考察していく。また，3 回目の授業では，配布プリントから生徒の活動の様子も分析する。

なお，問題文の発問については必要のない限り省略する。

（2）2 回目の実践の発話記録と考察

1 授業者(以下 T)：今日はなぞなぞを用意しました。早速第 1 問。
2 生徒(以下 S)： 無理じゃない？
3 S： 永遠に半分を飲んでいくので，飲み干せない。

問 1 は，理解が早く，飲み干せないことがすぐわかる生徒が多かった。よくわかっていない様子の生徒も，アニメーションによる説明を見せることで納得する様子を見せた。

4 T： そうだね。飲み干せないよね。
5 T： 次にいくね。（問 2 の提示）
6 S：（100mまでも)いかない。いかない気がする。10mにもいかない。2mにもいかない。いつかは(100mに)いく。
7 T： いかない？なんで？
8 S： いくら増えてもちょっとずつ隙間ができてきて， 1 年目に伸びた倍の 2mまでいかないんじゃないか。
9 T： なるほどね。木とジュースって半分ずつ変化するってことで似てない？どうやって見たら同じとみなせる？
10 S： 木をひっくり返すと，ジュースを飲むと木が生えるが一緒になる。
11 T： おぉなるほどね，わかったかな。アニメーションもつくってきたから見てみよう。
12 S：（頷く生徒が増える）
13 T： ということは 100mにいく？

14 S: いかない。2mにもいかない。
15 T: そうだね。2mにもいかないね。ということは，100mまでいきようがないよね。
16 T: つまり，（木の全長）＜2＜100 という不等式が成り立つね。

2mにも届かないという意見はクラスで数人は発生した。その生徒たちは，すでに問 1 と考え方が同じだとわかっていた。10 行目の発言がわかっていない様子だった生徒も，ジュースと木が同時に変化するアニメーション（図 4）を見せることで，納得していた。

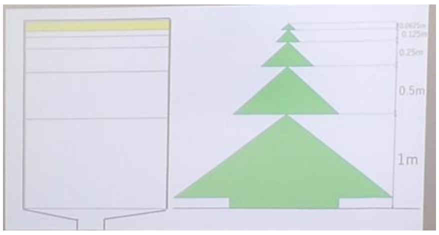

図 4：並べたアニメーション

17 T: 次はちょっと文章が長いです。図でも説明します。（問 3 の提示と，教具による説明）
18 S: ならなくない？
19 S: 何枚使ってもだめじゃない？
20 T: 何で？
21 S: さっきの木とジュースと全く同じです。
22 T: おぉ。どうやって見たらいい？
23 S: ジュース全体が正方形 1 と置き換えることが出来ます。飲み干した量が，長方形に置き換わるんじゃないか。
24 S: さっきのジュースは飲み干せなかったじゃないですか。これも同じでいつまでも隙間が出来続けるんですよ。
25 T: ほう，今隙間が出来続けるって言ったけど，どうやって見たら，隙間ができると言える？
26 S: 長方形を重ねたらいい。
27 T: 重ねる。ああ上にね。こうやってね。
28 S; ああ〜なるほど。
29 T: こうやって重ねるとさっきと同じになるよね。ということは，長方形の面積の総和が正方形の面積を超えることはないって事だね。
30 S: そういうことですね。
31 T: ここでさ，長方形と正方形の面積の関係を式で表してみるとね，
32 S: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots$
33 T: じゃあ n 枚目まで長方形を足したときの n 枚目の面積は？

34 S: $\frac{1}{2^n}$
35 T: そうだね。この和が 1 より？
36 S: 小さい。
37 T:（不等号を板書し）式で言うとなんて読む？
38 S: く
39 T: ちがうちがう，小なり，だね。

問 3 の説明は，文章では反応はよくなかったが，教具を用いて説明することで，ほとんどの生徒が，長方形が何枚必要か考えられるようになっていた。（図 5）


図 5：教具を用いた説明

また，21 行目の発言も，発問後すぐに発言する生徒も多々いた。長方形とジュースの図が似ていたことも影響していると考察する。27 行目の長方形を重ねる様子は，図 6 のように正方形と並べて，正方形と比べると上の方が足りないことを確認している。


図 6：27 行目の説明

また，生徒たちにとって，不等式が慣れたものではなく，読み方もうろ覚えであることが，37 行目から 39 行目までのやり取りからも見て取れる。

理解度に差はあるものの，教具と図を用いることでクラス全体の理解度が統一されている様子が見られた。問 1 問 2 と考え方が同じであったので，数学の事象に移っても理解が出来ていた。

3 回実施した授業において，問 1 から問 3 までは，理解度や反応に大差はなかった。導入として，十分効果のあるものであったと考えている。

40 T: じゃあ次ね。
41 T: $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots+$
42 S: あーなるほど
43 T: 察したかな。m を自然数として，m 番目は？
44 S: $\frac{1}{m^2}$
45 T: じゃあ，この和が 1 と比べてどうですか？
46 S: 小さくなるかな？

47 S：そもそも 2 分の 1 にもならないのでは。
48 T：ちょっと話し合ってみて。
49（話し合い開始，机間指導）
50 T：前向いて，S1 さん，今何してた？
51 S1： 面積 1 の正方形があって，1 辺の長さを 2 分の 1 にした正方形，3 分の 1 にした正方形ってすると，その式になる。
52 T：なるほど。わかったかな？そういう見方をすれば，さっきの長方形と似てるよね。
53 T：つまり，さっきの式は，どんどん小さくした正方形を全部足したとき，元の正方形と比べて面積和がどうなるかってことだよね。
54 T：皆の分も用意したので，並べてみよう。
55 T：正方形の面積和が，1 よりも大きくなるっていうことは，正方形を敷き詰めていっても，はみ出すってことだよね。
56 T：つまり今からすることは，さっきの式の答えを出すために，正方形を正方形 1 の中に，どうやって並べたら答えになるか，ということを考えてほしいです。では，どうぞ。

問 4 の発問を，式を用いて提示することにより，生徒が式から図を考える事が出来るかどうかというのは実践してみないとわからなかった。はじめから誘導しては自由に考える事が出来ないと考えたため，最初は式のみを提示するに留めた。

2 回目の実践では，49 行目の机間指導において，生徒 S1 が 51 行目のように考えられていたため，すぐに正方形を並べていく活動に移ることが出来た。この時点で同様の考え方をしていたのは，生徒 S1 の他にはいなかった。もし誰もいなかった場合は，図で表せないか，問 3 と関連はないか等，発問を変えながら正方形の考え方が生徒から発生するのを期待する予定だった。

57（活動開始，机間指導）
58 T：どうやって並べたら上手くいくかな。
59 ～活動開始から 7 分後～
60 T：並べてみて，予想はどうなりそう？(和が)大きくなりそう？小さくなりそう？
61 S：小さくなりそう。そんな気がする。
62 T：まだ規則性がありそうかというと，そうでもないかな。
63 T：さっきさ，長方形を規則的に並べたよね。この並べ方上手く使えないかな。
64（活動再開，机間指導）
65 ～活動再開から 3 分後～

66 T：はい皆前向いて。今 S1 のグループがやっていたんだけど，長方形使えないかなっていう問いかけに対して，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，の正方形を縦に積んだんだね。
67 T：この並べ方，さっきまでのものと似てない？
68 S：高さの変化が（長方形と）同じ
69 T：そうだよね。こうやって並べたら，高さの変化が長方形と 1 緒だよね。じゃあこうやって埋めていくと，絶対に埋まらないところがあるんだけど，どこだろう？
70 S：1 番上。
71 T：そうだよね。縦に積んでいっても隙間が必ず出来るよね。ということは，上側には隙間が出来る並べ方なんだよね。じゃあ，残りの正方形をどうやって並べたらいいかな。

60 行目から 63 行目で活動してみて予想を聞くと，ほとんどの生徒が和は 1 より小さくなりそうと答えた。長方形も教具も各グループに配布していたが，使っているグループがほとんどなかったので，63 行目で示唆した。その結果，S1 のグループを含め，いくつかのグループで図 7 の並べ方が発生したことにより，縦方向を固定させるように誘導ができた。

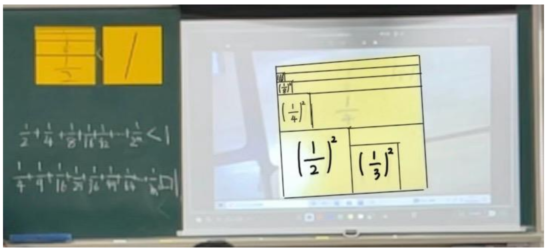

図 7：66 行目の共有

72 （活動再開，机間指導）
73 T： 何か規則性を見いだしてほしいな。16 以降も並べられる規則性ないかな。
74 ～活動再開から 4 分後～
75 T：1 つの班が敷き詰めてた図なんだけど，これだったら確かに敷き詰められそうだよね。だけど，16 個目以降はどうやって置く？適当に置いていく？そしたらはみ出しちゃいそうない？
76 S：うーん
77 T：その先の規則性が見いだせないよね。何かここまで並べれば大丈夫みたいな規則ないかな。

78 T：あるいは別のグループだけど，3 分の 1 の正方形の横に 6 分の 1 の正方形を置いているグループもあるよね。これでも規則性が微妙よね。また考えてみて。

ここではあえて 16 以降の正方形をどう並べればいいかわからない並べ方を取り上げて，他の並べ方を考えるよう促した。

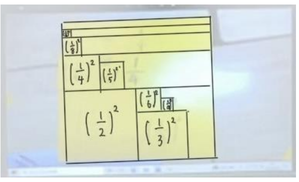

図 8：75 行目

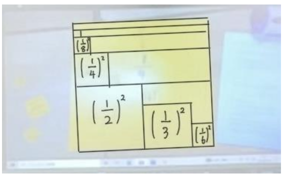

図 9：78 行目

79（活動再開，机間指導，模範解答の並べ方が発生）
80 T：皆前見て。S2 さんの所の並べ方（図 10）だけど，S2 さん，説明してみて。
81 S2：縦に隙間が出来るのはさっきわかったから，$\frac{1}{2}$ の横には $\frac{1}{3}$ を並べて，$\frac{1}{4}$ の横には $\frac{1}{5}$ から $\frac{1}{7}$ まで並べて，$\frac{1}{8}$ の横には $\frac{1}{9}$ から $\frac{1}{15}$ を並べて，そしたら横が余るから，この先も並べれるかなと。
82 T：なるほどね。こうやって並べていけば縦にも隙間が出来るし，横にも隙間が出来るよね。

図 10 の並べ方は，S2 のグループのみ発生した。縦方向と横方向を別々に考えさせたことと，16 以降の正方形も並べられる並べ方を考えるよう促したことが発生に繋がったと考察する。

ここまで生徒から導いたので，後は各行の枚数の増え方を確認して，式にしていく。これ以降は生徒の活動がないので省略する。

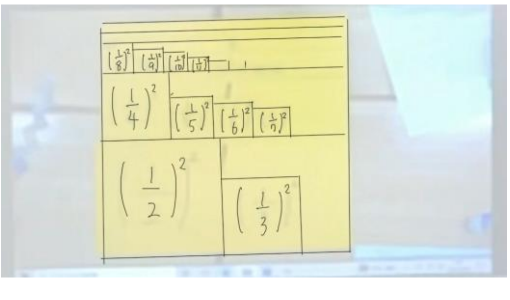

図 10：82 行目 S2 のグループの解答

（3）2 回目の実践の振り返りと 3 回目への変更点

1 時間の実践の中で結論までたどり着けた。展開 2 に入ってからの生徒が行き詰まる様子が多く見られたものの，まったく取り組めないほどではない展開であったと考察している。

問 4 の発問からどのような段階を踏むか整理すると，
（段階 1）式から正方形を考える。
（段階 2）問 3 の長方形の並べ方を利用して，縦方向を敷き詰めるように $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$ の正方形を並べ，問 3 までと同じ理由で隙間が出来ることを確認する。
（段階 3）（段階 2）で並べた正方形の横に面積の大きい順に正方形を並べていくことで，横方向にも隙間が出来つつかつ，どこまでも正方形を並べ続けることが出来ると確認する。誤答を利用して，模範解答へ誘導する。
（段階 2）の誘導は問 3 までとの関連性もあるため，発問しやすいが，（段階 3）が困難であった。

生徒が行き詰まっていた理由を考えると，2 つ考えられる。1 つは，正方形の面積和が 1 と比べてあまりに小さすぎることではないか。与えた教具を適当に並べても，正方形 1 の中に収まってしまうので，想像しきれなかったのではないかと考えている，もう 1 つは授業者の発言が思考を疎外していた可能性である。発話記録を見ると，下線部に表すように，授業者からの「規則性」の発問が多い。授業者の考える規則性と，生徒の考える規則性に乖離があり，規則性とは何かを考えて，上手く思考できなかったのではないかと考察している。

また，授業者が発言しすぎて，生徒の活動を疎外していたのではと考察している。如実に表れていたのが 66 行目で，S1 のグループに並べた意図を聞かずに授業者が解説をしている様子がこれに該当すると考える。

これらを踏まえて，3 回目の実践では，誘導の流れは変更せずに授業者が必要最低限しか喋らないようにする方針をとった。

（4）3 回目の実践の発話記録と考察

3 回目では 2 回目と比較して，問 1 から問 3 までに差はなかったので割愛する。問 4 からの活動に大きく差が出来たので，問 4 からまとめていく。

まずその差は，式から図形に移るまで時間を要したことである。

1 T: $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$，　m 番目は？
2 S: $\frac{1}{m^2}$
3 T：と 1 の大小関係がどうなると思う？グループで予想立ててみて。
4 S：あー。ええー？どうやろう？
5（話し合い開始）
6 T：どうかな。□には何かしらの等号，不等号が成り立つよね。手を挙げてみて。

7（=だと思う人？→0 人。和の方が大きいと思う人→数人。和の方が小さいと思う人→多数）
8 T: なるほど。小さいと思う理由は説明できそう？話し合ってみて。
9（話し合い再開）

2 回目の S1 のように，すぐに正方形を連想した生徒はいなかったため，自由に考えさせた結果を共有することとした。

10 T: S3 さんどう思う。
11 S3: 途中までは長方形に関連した式の方が大きいけど，途中から考えている式の方が大きくなるから，いつか大小関係が逆転するかもしれない。

S3 は問 3 と問 4 の式の，第 1 項から順番に大小関係を比較した際に，途中から大小関係が逆転する点に注目している。（図 11）実際は第 1 項と第 2 項での差が大きすぎて，大小関係が逆転した程度では補えない差が出来ているため，この予想は間違っている。しかし，考え方の 1 つとしては良いものであると考察している。

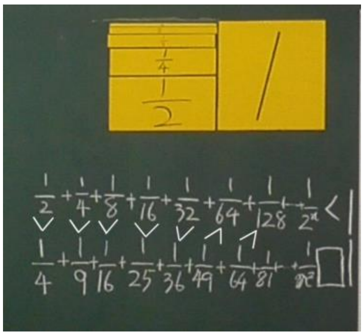

図 11：11 行目 S3 の主張

12 T: 他は？S4 さんどう？
13 S4: $\frac{1}{4}+\frac{1}{9}$ となる感じで，足していく数が，
$\frac{4}{9}$倍されて，次が $\frac{9}{16}$ 倍されてとなってて，
問 3 までのは全部 $\frac{1}{2}$ 倍したものを足してる。
どっちも 1 より小さい数をかけていってるから，1 より小さいんじゃないか。
14 T: ほう。そうなのかな。他はどうだろう。

実践当日は 1 つの意見として受け取るに留めた主張だが，これは問 4 の式を等比数列の和のように捉えていると考えられる。1 つ前の項に 1 より小さい数をかけたものを足すとみているので，第 1 項をa_1，順番にかけていく 1 より小さい数を r_i（$1 \leq i \leq m-1$），左辺の和をS_mとおくと，

$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$$
$$= a_1 + a_1 r_1 + a_1 r_1 r_2 + \cdots + a_1 r_1 r_2 \cdots r_{m-1}\text{。}$$

$a_1 = \frac{1}{4}, r_i = \frac{(i+1)^2}{(i+2)^2}$ であるので，

$$S_m = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{16} + \cdots + \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{16}\cdot\cdots\cdot\frac{(m-1)^2}{m^2}$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{16} + \cdots + \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{16}\cdot\cdots\cdot\frac{(m-1)^2}{m^2}\right)$$

となり，最後のかっこ内の数が 4 より小さいか，という問題に置き換わっているだけに過ぎないのではないかと考察している。

15 T: この式見て，図をイメージした？S5 さんどう？
16 S5: 円をイメージした。
17 T: 円？
18 S5: 円を 1 として，半径が同じで中心角が
360° から $\frac{1}{4}$ 倍，$\frac{1}{9}$ 倍，$\frac{1}{16}$ 倍したおうぎ形を
敷き詰めていけばいいのではないか。（理解している生徒も数名）
19 T: あー。んー？どうだろう？

実践当日には取り上げることが出来なかった考え方だが，なかなか良い考え方であったと考察している。つまり，図 12 のようになる。このように考えれば，問 3 は長方形で考えたのと同様に隙間が出来続けることがわかり，問 4 では問 3 よりも円を充足するのにかかることが見て取れるので，収束の速さをも考えられる発想であった。

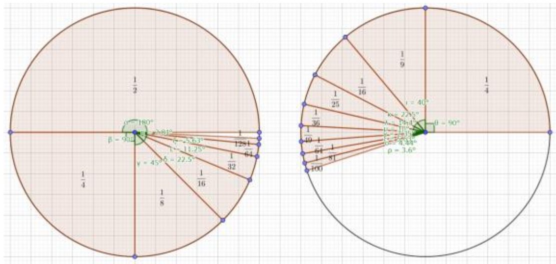

図 12:S5 の主張　左が問 3，右が問 4

当日に取り上げることが出来ていれば，和が 1 より小さい理由を図で表し切れていることになると考えられるが，話が中心角に置き換わっただけで，解決はしてないのではないか，と生徒には返し，用意していた正方形の発想が出てくるまでやり取りを続けていただろう。

なぜこの円の発想が出てきたか考察してみると，授業実践をした頃には，平面図形の単元を授業しており，ちょうどおうぎ形の面積を扱ったばかりであったため，考えが結びつきやすかったのではないかと考えている。

20 S3：正方形でもいいのでは？
21 T：ほう，正方形。
22 S3: $\frac{1}{4}$ が，1 辺が $\frac{1}{2}$ の正方形というように
考えたらいいのでは（理解のした反応多数）
23 T：（教具を使って説明）これらの正方形を足したら，1 の正方形の面積と比べて，どうかな。皆この式，計算したい？したくないよね。
24 T：予想では小さくなると考えている人が多かったよね。さっきの長方形みたいに，この正方形もどうやって敷き詰めたら，絶対に小さいんだと言える並べ方を皆に見つけてほしいんです。
25 T：黒板と同じ物を用意したので，グループでやってみましょう。

2 回目の実践と比較してここまで差が生じたことから考えると，式を図示するのは困難な活動であり，授業者の手立てが十分ではなかったのではないかとも考えられる。長方形と関連付けることを早めに提示するか，別の図形を用いた題材にするか，検討する余地があると考える。

ここからグループごとに正方形を並べる活動に取り組む。先に 2 回目との比較した結論を述べると，3 回目の実践では，模範解答の並べ方を時間内に取り上げることが出来ず，実践中に結論を出せなかった。授業者の発問を中心に発話記録を見ていく。

26（活動開始，机間指導）
27 T：絶対に小さいといえる並べ方見つけてください。
28 ～3 分後，机間指導中～
29 S：長方形使いたい
30 T：全然いいよ。使って。
31 S：1 つのグループから長方形使いたいって聞かれたんやけど，是非使ってください。
32～2 分後～
33 T：皆前向いて。どうかな。やってみて。埋まりそうやった？
34 S：埋まらない気がする。
35 T：さっき長方形を敷き詰めたじゃないですか。これを上手く使えないかな。今皆でたらめに敷き詰めていってるけど。考えてみて
36(活動再開，机間指導)
37～4 分後正方形を縦に積むグループあり～
38 T：皆前向いて。S6 さん，今やってる並べ方前でやってみて。

39 S6: さっき(長方形）と同じことしてて，$\frac{1}{2}$ の長方形よりも $\frac{1}{2^2}$ の正方形の方が，面積が小さく，長方形のときは上までいかなかったから，同じように並べたら正方形でも上の方までいけないんじゃないかなって考えて，無理かなって思いました。
40 S：ああ～なるほど。
41 T：わかった？今 S6 さんは縦方向だけだと長方形と同じように上の方に隙間が出来るってことがわかるってことやね。
42 T：でもさ，この上の隙間に小さい正方形が入る可能性もあるよね。他の正方形もこの先ずっとどうやって並べたら，1 より大きい，小さいがいえるかな。

長方形と関連付けることが意識づけられた事で，2 回目の実践の図 6 と同様の並べ方と考え方が S6 から出てきた。やはり長方形の変化を意識付け出来れば縦方向の変化までは発想できると判断して良いだろう。

43(活動再開，机間指導）～3 分後～
44 T：さっきの正方形縦に積むのをさ，長方形も 1 緒に並べたらどうかな。これで何か見えないかな。
45(活動再開，机間指導）～2 分後～
46 T：皆見ていると，残りの正方形をデタラメに並べていってるけど，それでいつまでも並べていけるってできるんかな。
47 T：いつまでも続けられる並べ方見つけてね。
48(活動再開，机間指導）～2 分後～
49 T: 敷き詰めてみると，$\frac{1}{2^2}$ の横に $\frac{1}{3^2}$ と $\frac{1}{6^2}$ がすっぽり収まるよね。けどさ，他の正方形も規則的に並べようとしたときに，困るよね。繰り返し同じ並べ方が出来るといいよね。
50(活動再開，机間指導）～2 分後～
51 T：いつまでも続けていけるような並べ方がいいよね。ということは，2，3，4，5，6，7，って連続していてほしいよね。今 2，4，8，16 は決まっているから，他どうやったらいいかな。
52(活動再開，机間指導）～4 分後～
53 T：皆色々やってみたけど，もう一息でいけそうやけど，時間来てしまったね。今日はここで終わりましょう。

46 行目から 49 行目にかけて，2 回目の実践の図 8 と図 9 の並べ方が散見されていた。残り時間も少ない中で，51 行目と 53 行目はほとんど答えのような発問をしたが，

時間内に模範解答の並べ方を見つけることは出来なかった。

2 回目の実践の反省を踏まえ，授業者の説明を最低限にし，生徒の意見で授業をするよう心がけたが，こちらの手立てが少なすぎたのではないかとも考えられた。

しかし，授業後に手元のプリントに模範解答の並べ方をしている生徒 S7 を発見した。実践中は教具の方に注目していたため，手元のプリントまで気付けなかったが，求めていた発想を授業中に導き出せる生徒はいたことがわかった。授業者の手立てと発問は，最低限効果的に働いていたのではないかと考察出来る。実際 2 回目の実践でまとめた，問 4 から結論までの段階と比較しても，(段階３)までは到達できていることがわかる。

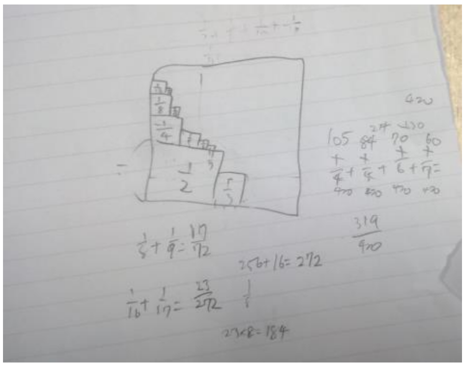

図 13:模範解答をしていた S7 のメモ

（５）生徒による新たな視点の考察

3 回目の実践については，後日 S7 に説明させて，結論までまとめた上で，授業プリントを回収し，記録を残した。教具を用いての活動だったため，プリントに活動中の思考を残せている生徒はあまりいなかったが，1 人の生徒 S8 が考えた発想が，興味深ものだったので，最後に紹介する。

S8 は，式の図形化をする際，正方形だけにこだわらず辺の長さに規則性をもつ長方形に置き換えて考えた。図 14 は S8 のメモである。

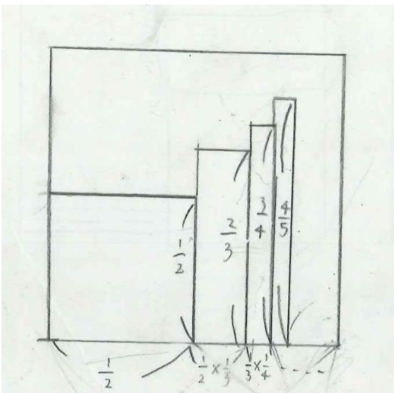

図 14:S8 のメモ

S8 は次のように式をとらえた。

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\cdots+\frac{1}{m^2}$$
$$=\left(1\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{4}{5}+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{m-1}{m}$$

S8 の図に合わせると，各項を長方形の横×縦と見ている。S8 は長方形の横の長さをこの形にするために，縦の長さを調整したと説明した。横方向にいつまでも続けられるのかと S8 に問うてみると，第 2 項以降の長方形の横の辺の長さは，問 3 で用いた長方形の辺の長さが 1 でない方より短いため，問 3 の説明からいつまでも続けることが出来ると答えた。実際，分数の積を交互に評価することで，問 3 の長方形の面積と対応させられることがわかる。つまり，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8},$$
$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}<\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16},\cdots。$$

また，部分分数分解を用いれば，横の辺の長さは計算出来る。つまり，

$$1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{m}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$
$$=1-\frac{1}{\mathrm{m}}$$
$$<1。$$

以上のことから，横方向については長方形を敷き詰めても隙間が出来ると説明出来る。また，縦方向も常に 1 より小さいので，問題はない。問 4 の分数和が 1 より小さいことを説明出来ていることになる。

また，この図形の並べ方には，数学的に興味深い内容が含まれている。図 13 のように，長方形の上の 2 頂点はそれぞれ，直線 $y=x$ と曲線 $y=-\frac{1}{x-2}$ 上にある。

すなわち，曲線 $y=-\frac{1}{x-2}$,直線 $x=0, x=1, y=0,$ で囲まれた図形①で，並べた長方形をすべて覆うことが出来ることがわかる。

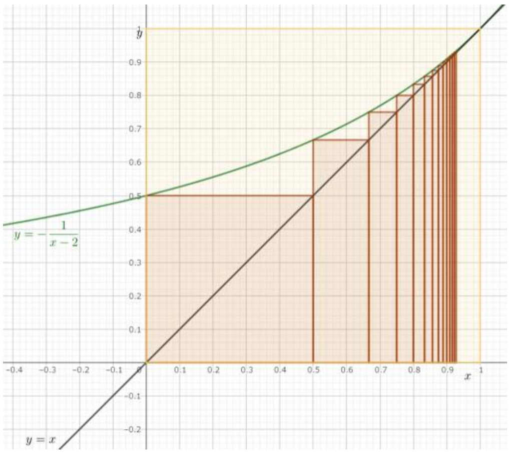

図 15：S8 の考えと関数のグラフ

図形①の面積をS とすると，

$$S = \int_0^1 \left(-\frac{1}{t-2}\right) dt$$
$$= -\Big[\log|t-2|\Big]_0^1$$
$$= -(\log|-1| - \log|-2|)$$
$$= \log 2$$
$$= 0.693147\cdots$$

となる。したがって，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{m^2} < \log 2$$
$$= 0.693147$$

となり，1 よりも厳しい評価が出来る並べ方でもあるということがわかる。この和は先に述べたように，$m \to \infty$ のとき，

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=2}^{m}\frac{1}{k^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 1$$
$$= \frac{\pi^2}{6} - 1$$
$$= 0.644934\cdots$$

となる。実際の値にも近い，厳しい評価が出来る並べ方であるといえる。

また，この $\log 2$ はメルカトル級数の収束値ともとれる。すなわち，

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

である。証明の展覧会 I (2002) の p. 174-175 には，このメルカトル級数の図式が掲載されており，S8 の図に似た図式となっている。

S8 本人がここまで考えられていたわけではないと考えられるが，数学的に興味深い内容を含んだもの見いだしていた。

５．考察

本稿の目的は，中学 1 年生を対象とした不等式による評価の教材を開発，実践し，その妥当性と価値を検討することであった。この 2 つに対しての考察を述べる。

（1）学習段階に対する妥当性

今回の教材は，より早い段階から不等式による評価を学習させる目的で実施していた。扱った教材は考え方によっては，1 次不等式の計算，数列の和や極限，積分，対数など，背景には現行の学習指導要領での高校生が学習する内容を扱っている。それを図形に置き換えて図的推論を行うことで，中学 1 年生で取り組めるものにした。

生徒の様子を見ていると，決して取り組めない教材ではなかったのではないかと考察している。計算することが困難な式を図形で表現することにより，およその値を見いだしてくものとして，中学生に対して，不等式による評価を経験させる教材にはなったのではないかと考えている。

（2）教材の価値

今回扱った題材はバーゼル問題の部分和が 1 より小さいかを評価させるものだったが，1 と実値との差が大きく，不等式による評価として厳しい評価とはいえない。しかし，そのような厳しい評価を必要としない設定だったからこそ，バーゼル問題の部分和と 1 との比較を考える際に多くの意見が挙がったのではないかとも考えられる。実際，図 11 のような分数と分数の比較をする考え方や，図 12 の円とおうぎ形による図示，図 15 のより厳しい評価につながり、かつメルカトル級数という数学的に美しい級数で評価出来る図示などが発生したのではないかと推測している。今回は不等式による評価を図式的推論によって取り組むことが出来るかを検討する実践であり，厳しい評価は必ずしも必要ではなかった。不等式による評価を経験させつつ，多様な図式的推論がなされていたため，教材として興味深いものになったと考えている。

６．おわりに

今回開発した教材は中学 1 年の学習段階において妥当であり，価値があると判断した。この教材は不等式による評価を中学 1 年生に経験させることを重視したものであり，より厳しい不等式評価をしないといけないものにはなっていない。また，本研究の展望は学習段階に応じた適切な時期に不等式による評価の教材を扱って不等式による評価の考え方を身につけさせるものであるため，発達段階ごとの教材開発を続けていく。今回の教材には

ない，より厳しい不等式による評価が必要となる教材開発に取り組むことを今後の課題とする。

謝辞

本稿を作成するにあたり，広島大学大学院人間社会科学研究科の影山和也准教授より，当校の初任者研修の一環として，実践の設計段階において，指導・助言を賜りました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

［1］　重松正樹(2023),「数学的な表現力を育てる教材開発」中等教育研究紀要　／広島大学附属福山中・高等学校
［2］　坂岡昌子、宮川健(2016),「不等式の性格についての一考察 基本認識論モデルの探求」，全国数学教育学会誌 数学教育学研究 第22巻 第2号 pp.73-84
［3］　服部貴大(2010),「2次不等式の学習の困難点に関する研究：2　次不等式に関する知識の観点から」,日本数学教育学会誌 数学教育 第92巻 第7号 pp.12-20
［4］　鈴木康博(1990),「高校生の不等式解決における思考」，筑波数学教育研究 第9号A pp.13~25
［5］　山本貴之(2010)、「図式的推論を生かした数学の授業に関する研究」,新潟大学教育学部数学教室 数学教育研究 第45巻 第1号 pp.48-68
［6］　文部科学省(2017)，「中学校学習指導要領解説 数学編」
［7］　文部科学省(2018),「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」
［8］　日本数学会(2007)，「岩波数学辞典 第4版」，岩波書店
［9］　Roger B. Nelsen 著/秋山仁，奈良知惠，酒井利訓訳(2002,2003)「眺めて愉しむ数学 証明の展覧会Ⅰ・Ⅱ」，東海大学出版会