広島大学附属福山中・高等学校
中等教育研究紀要　第41巻

興味ある数学教材を求めて
－物理、化学、地学的分野の教材から－

村上　和男

物理・化学・地学の題材を取り入れた数学教材を授業で学習することにより、生徒は教科書の内容とは少し違った「自然科学を記述する言葉としての数学」にふれることが出来る。
この様なことを通して数学により興味を持たせることが出来る。

Ⅰ　はじめに

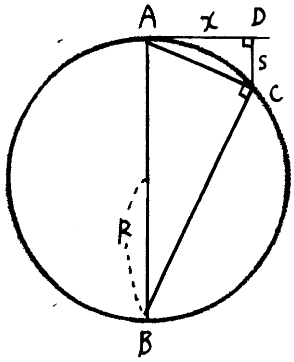
現在生徒が学んでいる数学は、ともすると他の教科とは独立した教科であると思われており、また現実の問題と結びつけて考えられていない。生徒はいわゆる数学の問題を与えられて解くことが多い。しかし数学は人間の生活や文化と深く関連している。ルネサンス以降、自然科学の発展は数学の発展でもあったし特に微分・積分は力学を中心とした自然科学とともに発達してきた。

一方数学の教科書はきわめて「数学的」に書かれており物理的な内容は少ない。そこでそのような教材を取り入れることにより、教科書とは違った数学にふれることが出来る。何年間か実践して評判のよかった教材を次に示す。

Ⅱ　実践例

(1)　物体を水平に投げたとき落下せずに地球を1周するための速度を求める。（中３、接弦定理と関連）

図１



１秒間にｘｍの速さで物を水平に投げる。地球に沿って回るためにはｓだけ落下する。

接弦定理より∠ＡＢＣ＝∠ＣＡＤ

したがって△ＡＢＣ∽△ＣＡＤ

$$\frac{x}{s}=\frac{2R-s}{x}\cdots①$$

ここで　２Ｒ－ｓ≒２Ｒだから　①より

$$x^2=2Rs$$

ｓは１秒間の落下距離で４．９ｍ

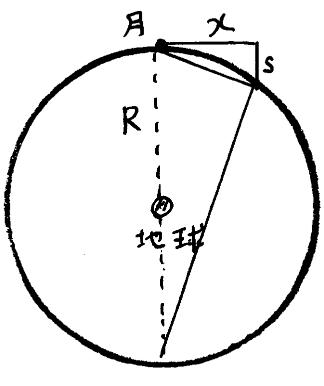
$$2R=12800\text{km}=1.28\times10^4\text{km}$$
$$=1.28\times10^7\text{m}$$
$$x=\sqrt{2\times1.28\times10^7\times4.9}\fallingdotseq7900\text{m}$$

したがってほぼ毎秒８㎞の速さで投げればよいことになる。

(2)　引力の逆自乗法則を導く（接弦定理、指数法則と関連）

月と地球の距離、月が地球を回る周期が元になるデータである。

図２



ｘ：１秒間に月が進む距離

Ｒ：月と地球の距離　384000 km＝3.84×10^{10}cm

Ｔ：月が地球を回る周期 27.3日＝2.36×10^6秒

$$\frac{2\pi R}{T}=\frac{2\pi\times3.84\times10^{10}}{2.36\times10^6}$$
$$=1.02\times10^5$$

月は地球の引力のため１秒にｓだけ落ちる

(1)と同様にして

$$s=\frac{x^2}{2R}=0.136\text{cm}$$

地表では１秒間に490cm落ちる。さて地球から離れるほど引力は弱くなるが、かりに引力は距離のｎ乗に比例すると仮定する。

地球が、地表に及ぼす引力と、月に及ぼす引力の比

$$k=\frac{0.136}{490}=0.00278=\left(\frac{\text{月までの距離}}{\text{地球の半径}}\right)^n$$
$$=\left(\frac{3.84\times10^{10}}{6.37\times10^{8}}\right)^n\cdots①$$

n＝－１の時①の右辺の値は 0.0166

n＝－２の時 0.00025

n＝－３の時 0.00000457

ｋの値に最も近いのはｎ＝－２の場合である。したがって地球が及ぼす引力は、距離の２乗に反比例することが予想できる。

(3) 富士山がその頂上に及ぼす重力の計算（微分・積分）

生徒に次の問題を与えた。

阪神大震災以来日本列島の動きが活発になっているようです。有珠山の噴火、三宅島の噴火、つい最近では鳥取県の地震もありました。三宅島の噴火はまだ続いているようですが、噴火口内部の物質が大量になくなり陥没したと報道されています。この事は直接観測しなくても重力の変化を測定することである程度わかります。万有引力の法則により、物質（質量）は必ず重力を生み出しますから、重力を綿密に測定することで物質の分布の状態を知ることができます。例えば重たい物質が大量にあればその付近の重力は大きくなるはずで、このことは人工衛星による鉱物資源の探査に利用されています。また重力探査により、高松市の地下に巨大なクレーターがあることがわかっています。

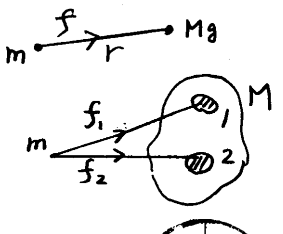
さて日本で１番高い山は富士山ですが、富士山は独立した山としては体積も大きい山として知られています。ここでは富士山が作り出す重力を積分で求めてほしいと思います。

質量Mgの物体がmgの物体に及ぼす引力は

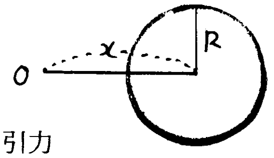
$f=\frac{GMm}{r^2}$ で与えられる。

ここでｒは２つの物体間の距離、Ｇは定数で、力の方向は物体を結ぶ直線方向である。さてMやmが点であればこれでよいが大きさを持てば話が複雑になる。ここではMが大きさを持つ場合を考える。

図３



図のようにMの１の部分と２の部分は、ｍまでの距離も違うし力の向きも異なる。そこで積分を利用することにより



半径Ｒcm、厚さ１cm、１cm3あたりｋg(密度ｋ）の円板が、円板の軸上で、円板からｘcm離れた点Ｏにある、１gの物体に及ぼす引力を求めよう。

さて図のように、円板の中心からｒcm、微少な幅Δｒcmの円環が及ぼす引力を計算する。斜線部の面積は　２πｒ・Δｒだから　質量は

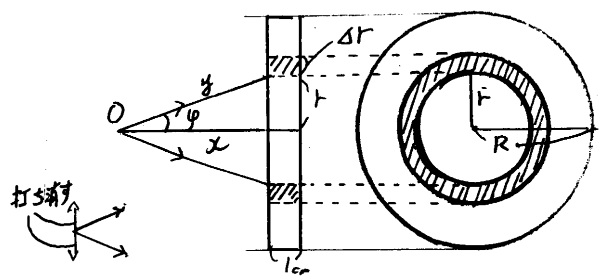
$$\triangle M=2\pi r\cdot\triangle r\cdot k\cdot 1=2\pi rk\cdot\triangle r$$

したがってｍへの引力　$\triangle f=\frac{Gm\cdot\triangle M}{y^2}\cdot\frac{x}{y}$

ここで$\frac{x}{y}$をかけたのは、力は軸方向の成分だけ残り、垂直成分は打ち消しあうからである。

すなわち図で$\cos\phi=\frac{x}{y}$

図４



特にｍ＝１とすると結局

$$\triangle f=\frac{G2\pi rkxr\cdot\triangle r}{y^3}=\frac{G2\pi kxr\cdot\triangle r}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

問１　ｒについて０からＲまで積分することにより、円板が及ぼす引力ｆを求めよ。

$$f=2\pi kxG\frac{rdr}{(x^2+r^2)^{3/2}}$$

ここで$(x^2+r^2)^{1/2}=t$とおくと

$$\frac{1}{2}(x^2+r^2)^{-1/2}2rdr=dt$$

$\frac{rdr}{t}=dt$つまり　$rdr=tdt$

r	O→R
t	χ→（χ²＋R²）$^{1/2}$

したがって

$$f=2\pi kxG\frac{tdt}{t^3}=2\pi kxG\frac{1}{t^2}dt$$
$$=2\pi kxG\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{\sqrt{x^2+R^2}}=2\pi kxG\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)$$

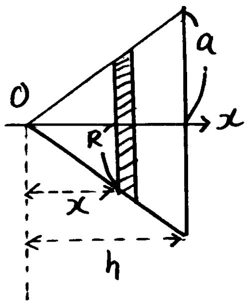
次に底面の半径ａcm、高さｈcm、密度がｋの直円錐の頂点Ｏにある１gの物体が円錐から受ける引力を求める。問１の結果を利用する。幅が１cmの円板から受ける引力ｆを求めることが出来た。したがって微少な幅△ｘcmの円板から受ける力△Ｆは

$$\triangle F=f\cdot\triangle x \text{である。}$$

問２　△Ｆを、ｘについて０からｈまで積分することに

よりＦを求めよ。その際、図から分かるように $\frac{x}{R}=\frac{h}{a}$ の成立に注意せよ。

図５



$\frac{x}{R}=\frac{h}{a}$ より　$R=\frac{xa}{h}$

したがって $\sqrt{x^2+R^2}=\sqrt{x^2+\frac{x^2a^2}{h^2}}$

$=\frac{x\sqrt{h^2+a^2}}{h}$

ゆえに $\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}=\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}$

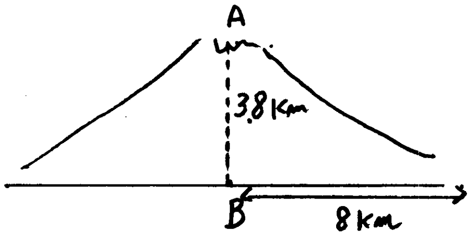
求める力は

$$F=\int_0^h f dx=2\pi kG\int_0^h\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)dx$$

$$=2\pi kGh\left(1-\frac{1}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$$

つぎにこの結果を利用して富士山頂での重力加速度を求める。

図６



富士山を　高さｈ＝3.8×10^3ｍ

底面半径ａ＝8.0×10^3ｍ

密度ｋ＝2.7×10^3kg/㎥の直円錐とみる。

Ａ点での重力加速度を、富士山がない場合のＢ点でのそれと比較する。

①　富士山の質量による重力加速度

$2\pi kGh\left(1-\frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$　に上の数値を

代入する

$1-\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}}=0.5711$

$G=6.77\times10^{-11}$だから

２π×6.67×10^{-11}×2.7×10^3×3.8×10^3×0.5771

＝2.5×10^{-3}

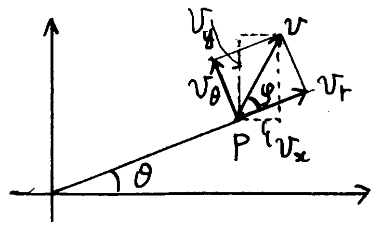
これだけ増加するが、実際は高さによる減少もある。したがって実際にはそれもそれも評価しなくてはならない。

⑷　極座標による速度の表示（数学Ｃ）

速度を極座標で表すとどのようになるのか。定期テストで次のような問題を出した。

時間ｔとともに動く点Ｐがある。直行座標でＰ(ｘ，ｙ)極座標での表示をＰ(ｒ，θ)とし、Ｐの速度をｖとする。ｘの時間微分ｘ´はｖのｘ成分v_x　，ｙ´はｖのｙ成分v_y　となる。一方ｖをｘ，ｙ成分に分けずに、ｒ方向の成分v_r とそれに垂直なθ方向の成分v_θに分けることも可能である。ここでは v_r, v_θ をｒ，θとその時間微分のみで表すことを考える。

図７



まずｘ＝ｒcosθ，ｙ＝ｒsinθ‥‥①　が成立する。

問１　①を時間ｔで微分することによりv_x、v_y　をｒ，θとその微分のみで表せ。得た式を②とおく。

$\frac{dx}{dt}=\frac{dr}{dt}\cdot cos\theta-r\frac{d\theta}{dt}\cdot sin\theta$

$\frac{dy}{dt}=\frac{dr}{dt}\cdot sin\theta+r\frac{d\theta}{dt}\cdot cos\theta$…②

問２　図のようにｖとv_rのなす角をϕとおくと

$v_x=v\cos(\phi+\theta)$、$v_y=v\sin(\phi+\theta)$

加法定理を使って展開せよ。得た式を③とおく。

$v_x=v(\cos\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta)$

$v_y=v(\sin\phi\cos\theta+\cos\phi\sin\theta)$…③

問３　また図より$v_r=v\cos\phi$、$v_\theta=v\sin\phi$が成立。③にこれを代入し、v_x、v_y　をv_r、v_θ　とθのみで表せ。得た式を④とする。

$v_x=v_r\cos\theta-v_\theta\sin\theta$

$v_y=v_\theta\cos\theta-v_r\sin\theta$…④

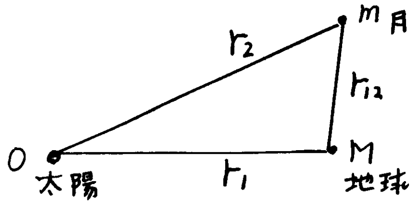
問４　④と②を比較することによりv_r、v_θ　をｒ，θとその微分のみで表せ。

$V_r=\frac{dr}{dt}$　　　　$V_\theta=r\frac{d\theta}{dt}$

①をもう１回ｔで微分し、同様に考えれば加速度のｒ成分、θ成分を得ることが出来る。

⑸　月が太陽から受ける力と、地球から受ける力はどの程度違うのだろうか（数学Ａ　指数計算）

図８



地球から月への引力 $= F = \frac{MmG}{(r_{12})^2}$

太陽から月への引力 $= f = \frac{M_0 mG}{r_2^2}$

$\frac{F}{f} = M/M_0 \cdot \left(\frac{r_2}{r_{12}}\right)^2$

ここで $\frac{M}{M_0} = 3.00 \times 10^{-6}$

$\frac{r_2}{r_{12}} = \frac{1.50\times10^8}{3.84\times10^5}$

$= 0.39 \times 10^3$

したがって $\frac{F}{f} = 3.00 \times 10^{-6} \times (0.39 \times 10^3)^2$

$= 0.46$

この値はかなり大きい。太陽は地球の半分程度の影響を与えている。

(6) 離心率と惑星運動（数学C）

① 楕円

楕円の方程式は $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$…①
$r + r' = 2a$

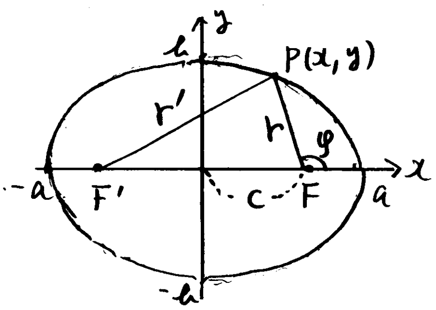


図 9

余弦定理より

$(2a - r)^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos(\pi - \phi)$

整理して

$4r(a + c \cdot \cos\phi) = 4(a^2 - c^2)$

$a^2 - c^2 = b^2$ だから

$r = \frac{h}{1+\varepsilon\cos\phi}$…②

ここで $\varepsilon = \frac{c}{a}$: 離心率

$h = \frac{b^2}{a}$: 半直弦

②も楕円の方程式である。

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ だから

$0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ である。

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ だから

$0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ である。

$\varepsilon = 0$ の時は $a = b$ で円になる。ε の値が小さいほど円に近い形である

a を一定に保って b を 0 に近づければ ε は 1 に近づく。短軸の長さが 0 に近づき、楕円はつぶれた形になる。

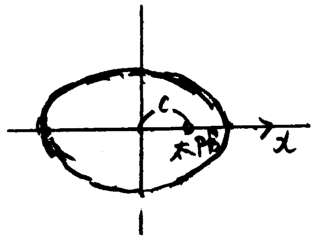
それぞれの惑星の長半径と離心率を示す。

	水星	金星	地球	火星	木星
長半径	0.39	0.72	1.00	1.52	5.2
離心率	0.206	0.007	0.017	0.093	0.049

	土星	天王星	海王星	冥王星
	9.6	19.2	30.1	39.5
	0.056	0.046	0.009	0.249

長半径の単位は天文単位（AU）である。この表を見ると円に最も近い軌道をとるのは金星と海王星である。

図10



太陽は焦点の位置にある。惑星が最も太陽に近づくとき $r = a - c$、最も遠ざかるとき $r = a + c$、$c = a\varepsilon$ だから太陽から惑星までの距離は

$a(1 - \varepsilon) \leqq r \leqq a(1 + \varepsilon)$

海王星では $a = 30.1$、$\varepsilon = 0.009$ だから

29.8 AU $\leqq r \leqq$ 30.4AU

冥王星では $a = 39.5$、$\varepsilon = 0.249$ だから

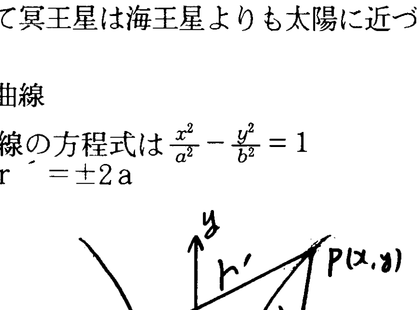
29.7AU $\leqq r \leqq$ 49.3AU

したがって冥王星は海王星よりも太陽に近づくことがある。

② 双曲線

双曲線の方程式は $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
$r - r' = \pm 2a$

図11



余弦定理より

$(2a + r)^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr\cos(\pi - \phi)$

整理して

$4r(a - c \cdot cos\theta) = 4(c^2 - a^2)$

$c^2 - a^2 = b^2$ だから

$r=\frac{h}{1-\varepsilon\cos\theta}\cdots$④

ここで$\varepsilon=\frac{c}{a}$：離心率

$h=\frac{b^2}{a}$：半直弦

④も双曲線の方程式である。

$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$だから

$1<\varepsilon$である。

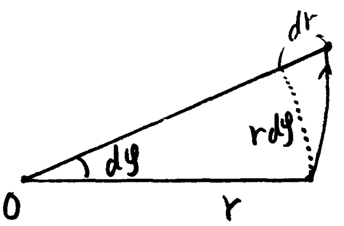
εを1に近づけるとbは0に近づき漸近線の傾きが減少する。つまり双曲線はしだいにつぶれる。

(7) 面積速度（微分・積分）

時間　$t\rightarrow t+dt$　　距離　$r\rightarrow r+dr$

角度　$z\rightarrow z+dz$　　面積　$S\rightarrow S+dS$

図12



$ds=\frac{1}{2}\cdot r\cdot rdz+\frac{1}{2}\cdot r\cdot dr\cdot dz$

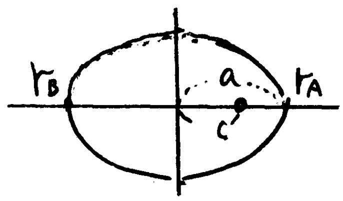
dr・dzを無視すると

$dS=\frac{1}{2}r^2dz$したがって$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{dz}{dt}\cdots$①

これは面積速度と呼ばれる。ケプラーの第2法則によると面積速度は一定である。つまり$r^2\frac{dz}{dt}$は常に一定である。これは角運動量の保存則でもある。

このことを使ってハレー彗星の速さの最大値と最小値の比を求める。

図13



$r^2\frac{dz}{dt}$一定の原理より　$(r^2dz/dt)_A=(r^2dz/dt)B_B$

$$\frac{\left(\frac{dz}{dt}\right)_A}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_B}=\frac{r_B^2}{r_A^2}$$

$$\frac{V_A}{V_B}=\frac{\left(r\frac{dz}{dt}\right)_A}{\left(r\frac{dz}{dt}\right)_B}$$

$$=\frac{r_A}{r_B}\cdot\frac{r_A^2}{r_B^2}=\frac{r_B}{r_A}$$

$\varepsilon=0.967$である

$$\frac{r_B}{r_A}=\frac{1+0.967}{1-0.967}$$

$$=\frac{1.967}{0.033}=60$$

v_Aはv_Bの約60倍である。

Ⅲ　終わりに

数学の様々な応用例を上げたが、原理的な例とともにできるだけ具体的な数値で量を評価できるものを取り上げた。生徒は普段学習する数学とは違ったものを感じてくれたと思う。ここではふれなかったが、ほかにも重心の決定や2項分布の応用などが考えられる。これからも興味ある教材を開発していきたい。

参考文献

1)物理学序論としての力学　藤原邦男　東京大学出版会
2) 例題力学演習　戸田盛和、渡辺慎介　岩波書店
3) ファイマン物理学　岩波書店
4) 質点系・剛体の力学　原島鮮　裳華房