

関数ソフト「G r a p e s」を使った教材開発

－数学的な見方や考え方を育てる授業モデル－

入川 義克

各学校にコンピュータが設置され、教科の指導においてもコンピュータを活用した授業を積極的に進めていくことができるようになってきた。新学習指導要領には、「すべての科目で学習の効果を高めるために必要に応じてコンピュータを活用する」¹⁾と記されているが、このことを実現していくためにも、学習の道具としてのコンピュータをどのように使えば生徒の数学的な見方や考え方が育てられ学習効果を高めることができるかという具体的な授業モデルと授業研究が大切になる。

ここでは、関数ソフト「Grapes」(Graph Presentation & Experiment System(大阪教育大学附属高等学校池田校舎友田勝久教諭作成のフリーソフト))を使った関数と図形の授業モデルを紹介する。関数教材の授業モデルは、6月29日(木)に問題解決力を高める数学科講座(教育センター主催)で実施した授業であり、図形教材の授業モデルは、9月29日(金)に公開研究会で実施した授業である。

1. 関数の指導について

関数についての理解を深め、その定着を図るためには関数を表す式やグラフの意味、対応や変化のようすなどを調べていく過程で、相互の関連性を考慮に入れながら、いろいろな観点から、その特徴を捉えさせようとする展開が大切である。

その指導においては、方程式、恒等式、グラフの移動、軌跡、図形の計量などの各領域で学習した内容を取り入れ深化させながら理解させていくことが、生徒の学習意欲を喚起することになり、既習事項の理解度や定着度・技能の習熟度を高め、数学的な見方・考え方を育てることになると考える。

「数学Ⅰ」の二次関数の単元では、コンピュータのグラフィックス機能を利用して、生徒が入力した関数の式から、グラフの意味を理解させる。

関数 $y = ax^2$ のグラフの特徴に気づかせ、平行移動や対称移動の考えを使って、標準形 $y = a(x-p)^2 + q$ や一般形 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが書けるようにし、頂点の座標、軸の方程式、定義域と値域、最大値と最小値などを求めさせ、具体的な問題への応用ができるようにする。

さらに、二次方程式の解や二次不等式の解と二次関数のグラフとの関係が理解できるようにすることを到達目標にした。

単元計画は、次の通りである。

- (1) 関数とグラフ・・・・・・・・・・ 2時間
- (2) グラフの移動・・・・・・・・・・ 1時間

- (3) 二次関数のグラフ・・・・・・・・ 8時間
- (4) 二次関数の値の変化と最大・最小・・・・ 5時間
- (5) 二次関数と二次方程式・・・・ 6時間
- (6) 二次関数と二次不等式・・・・ 5時間
- (7) まとめ・・・・・・・・・・・・ 3時間

(関数教材の授業モデルは、(7)の第2時限目)

2. 関数教材の授業モデル(数学Ⅰ)

2つの関数 $y = (x-2)^2 + 1$ と $y = ax - 2a + 4$ をコンピュータに入力させ、そのグラフから考えられる問題を精選して提示し、それらを解く過程において求めた点の座標や関数を、コンピュータに入力してグラフ化することで、関数についての基本事項が定着しているかどうかを確認させた。

自分達が作った問題を提示したことで取り組みの姿勢は積極的であった。

続いて、与えられた2つの関数のグラフを連続的に移動させることによって、問題解決の糸口が発見できるような題材に挑戦させた。コンピュータグラフィックスの機能が最大限に活かされる所である。

この題材は、与えられた2つの関数のグラフを平行移動することによって、 $y = x^2$ と $y = ax + 3$ に単純化し、次に $y = x^2$ と $y = ax + 3$ の差をとって合成した関数 $y = x^2 - ax - 3$ を考えさせることによって、問題の解決に迫っていくオリジナルな問題である。

2つの関数の和をとって合成した関数を利用することは多いが、差をとって合成した関数を利用することは少

ないと考え教材化した。

このような問題を考えることによって、既習事項を
展させていろいろな場面で利用できるようにし、一般化

する考え方、統合する考え方、発展させ拡張する考え方
観点を変えて工夫する考え方など多様な考え方を育てる
ことがこの授業のねらいである。

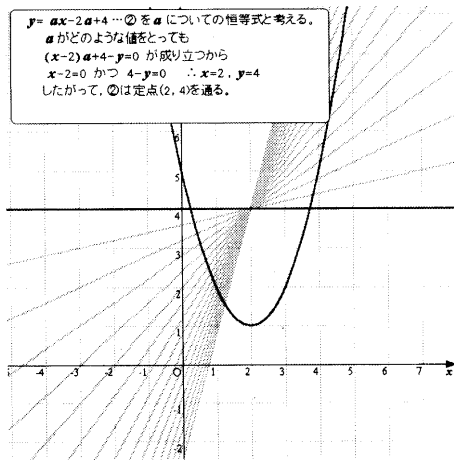
[1] 授業展開過程

学習内容(時間)	指導過程・学習活動	指導上の留意点
<p>導入(7分) 生徒が作成した問題を提示してパソコンへの入力の方法を示しながら、全員に問題の意味を理解させる。</p> <p>演習と確認(15分) 問1～問6をプリントの指示に従って解かせ生徒が求めた点の座標や関数をパソコンに入力させてその結果を確認させる。</p>	<p>☆ 放物線: $y = (x - 2)^2 + 1 \dots \textcircled{1}$ と 直線: $y = ax - 2a + 4 \dots \textcircled{2}$ のグラフから 生徒が作成した問題をプリントにまとめ配布</p> <p>問1 a = 1 のとき、$\textcircled{1}$と$\textcircled{2}$の交点の座標を求めよ 問2 $\textcircled{2}$のx軸切片およびy軸切片を求めよ。 問3 aがどのような値をとっても、$\textcircled{1}$と$\textcircled{2}$は常に2点で交わることを示せ。 問4 aがどのような値をとっても、$\textcircled{2}$は定点を通ることを示せ。[画面1] 問5 $\textcircled{2}$が$\textcircled{1}$によって切り取られる線分の長さを求めよ。 問6 $\textcircled{1}$の頂点を原点に移す平行移動によって$\textcircled{2}$はどのような直線に移るか。</p>	<p>生徒が作成した問題をプロジェクターで提示する。</p> <p>問題解決の要点を説明する。(結果が正しいかどうかは、パソコンに入力しながら確認していくので、ここでは考え方に重点をおく)</p> <p>問1～問6で求めた結果を入力させながら、問題点を明らかにし、個別指導していく。 (全体への指示は、プロジェクターです)</p>
<p>発展させた問題の設定と考察(23分)</p> <p>問題解決の過程で数学的な見方、考え方を身につける。</p> <p>まとめ(5分) 本時のまとめをする。</p>	<p>≪予想≫ 面積が最小になるときのaの値を予想する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>問題 $\textcircled{1}$と$\textcircled{2}$で囲まれた図形の面積が最小になるときのaの値を求めよ。</p> </div> <p>≪方針を決定≫ 既習事項を使って問題解決の手順を考察する。 * $\textcircled{1}$と$\textcircled{2}$のグラフを平行移動して考える。[画面2] * カバリエリの原理を使って等積変形。[画面3] * 2つの関数の差をとって合成した関数 [画面4] $y = f(x) - g(x)$の頂点の軌跡に着目する [ただし、$f(x) = x^2$, $g(x) = ax + 3$] * $\textcircled{1}$と$\textcircled{2}$で囲まれた図形の面積が最小になるaの値を求める。 [画面5]</p> <p>≪問題の解決≫ 問題解決の手順に沿ってまとめをする。 要点をメモ欄にまとめてプロジェクターで提示しながら解説をしていく。 本時の学習内容をまとめ、要点を整理する。 いろいろな角度から問題を分析して考えることの大切さを強調し、「はみだしけずり論法」にふれる。 [画面6]</p>	<p>面積を求めることが目的ではないので積分への深入りはしない。</p> <p>関数は $y - q = f(x - p)$ の形で入力して、連続的にグラフを移動させことで視覚に訴えて印象づける。</p> <p>パソコンの機能を有効に使いながら、工夫して考えることの面白さに気づかせる。</p> <p>残像設定をして、 $y = x^2 - ax - 3$の頂点が $y = -x^2 - 3$の上を動くことに気づかせる。直感的なひらめきを重視し発想の面白さを伝える。</p>

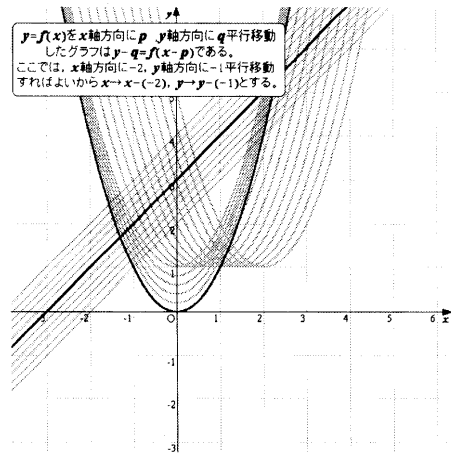
【準備物】 使用教科書「高等学校最新数学I」啓林館
関数ソフト「G r a p e s」≪Graph Presentation&Experiment System≫

[2] コンピュータで提示したグラフ

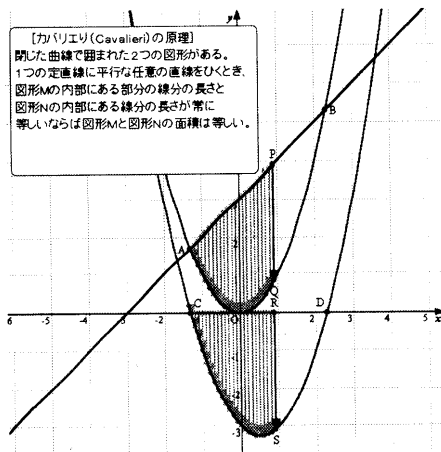
[画面1]



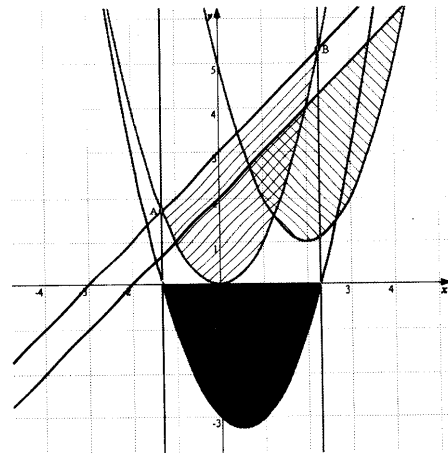
[画面2]



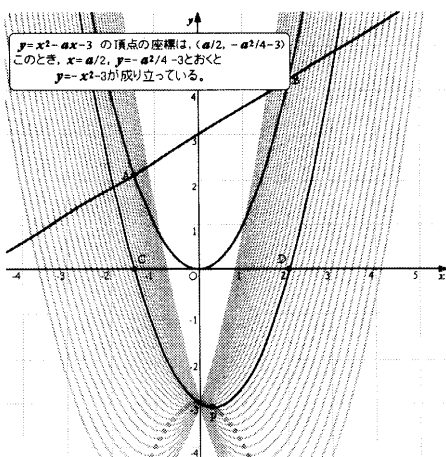
[画面3]



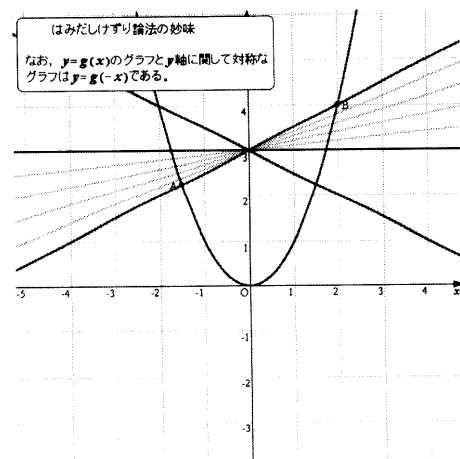
[画面4]



[画面5]



[画面6]



3. 図形の指導について

中学校で学習した「図形の性質」についての理解を深め、その定着を図るために、いくつかの基本のことからや証明された定理を使って推論や証明を進めていきながら、幾何における論証のおもしろさを体験させる展開が大切である。

ここでは、三角形の辺と角の関係、三角形の五心、メネラウスの定理とチェバの定理 方べきの定理について学習する。特に、三角形において重心・垂心・外心が1本の直線（Euler線）上にあることやフォイエルバッハの円（九点円）について、その特性を推測し、それらを証明することによって、幾何学の公理的構成について理解を深めることを目標にした。

単元計画は、次の通りである。

- (1) 平面図形の基礎・・・・・・・・・・1時間
- (2) 三角形の辺と角の関係　・・・・1時間
- (3) 三角形の五心・・・・・・・・・・3時間
(図形教材の授業モデルは、(3)の第2時間目)
- (4) メネラウスの定理とチェバの定理
・・・・・・・・・・2時間

- (5) 方べきの定理・・・・・・・・・・1時間
- (6) まとめ・・・・・・・・・・1時間

4. 図形教材の授業モデル（数学A）

三角形の重心G・垂心H・外心Oを作図させ、それらの点が1本の直線上にあることや $OG : OH = 3 : 1$ の関係が常に成り立っていること。さらに、垂線の足を頂点とする三角形の外接円（フォイエルバッハの円）の美しい特性に気づかせ、それらの特性を推測して論理的に考察して証明しようとする態度を育てる。

当初は、図形学習ソフト「Cabri-Geometri II」の利用を考えたが、任意の3点を通る円の作図に弱点があり、座標軸の表示をしない画面で関数を入力して図形が連続的に動くようにした。黒板とコンパスを用いて図を書くだけでは、この動きは表現できず、コンピュータの特性が十分に活用できる題材だと考える。

生徒は、私が期待した「九点円の性質」のほとんどを予想することが出来た。このことは、コンピュータを利用した成果といえる。

[1] 授業展開過程

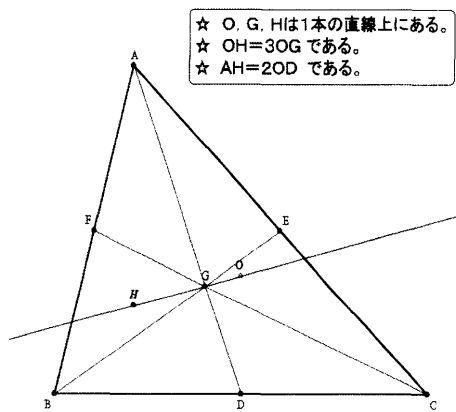
学習内容（時間）	指導過程・学習活動	指導上の留意点
導入（5分） 3種類の独楽を取り出し、 どれがよく回るか予想する	よく回る独楽の心棒はその重心の位置にありどのような図形にも必ず1つだけ重心があることを確認する。 [教具1]	三角形や四角形、任意の図形の重心の求め方の説明は簡潔にする。
展開（40分） 三角形の重心・垂心・外心 を作図し、その図から気づ いたことを発表する。	プリントを配布し三角形の重心G、垂心H、外心Oを作図し、気づいたことを発表する。 [画面7] ☆ O、G、Hの3点が1本の直線上にある。 ☆ $OG : OH = 1 : 3$ である。 [画面8]	与えられた1点から直線に垂線を下ろす作図の方法について再確認する。
△ABCの各頂点から対辺 に下ろした垂線の足を、頂 点とする三角形の外接円を 作図し、その図から気づい たことを発表する。	パソコンを使って、連続的に三角形を動かし予想したことを確認しながら誘導していく。 ☆ 円は△ABCの各辺の中点を通る。 ☆ 円は△ABCの垂心Hと各頂点の中点を通る。 ☆ △ABCの垂心は△PQRの内心である。 ☆ 九点円の半径は△ABCの外接円の半径の半分である。 ☆ 九点円の中心は△ABCの外心Oと垂心Hを結ぶ線分の中点である。 ☆ △ABCの垂心Hは九点円と△ABCの外接円の相似の中心になっている。 [教具2] 等々を予想すると考えられる。	正確な作図をするよう指示を出す。 九つの点（マグネットで色分けをする）を通ることから九点円と名づける。 [画面9] ここでは、気づいたことを積極的に発表する態度を大切に予想したことをパソコンを使って確認するだけにとどめる。 [画面10]

証明の第1段階として必要となる課題を解く。	《予想したことを証明するための課題を解く》 図において、円に内接する四角形や互いに等しい角をすべて挙げよ。 [画面11] 九点円の性質を証明していく初めの1歩を提示。 [画面12]	三角形、二等辺三角形、直角三角形など特別な三角形について考察することもある。
まとめ (5分) 本時のまとめ	学習内容をまとめ、与えられた問題ではなく自分達が予想したことを証明することの意義を伝える。	次の時間には証明に挑戦していくことを予告する。

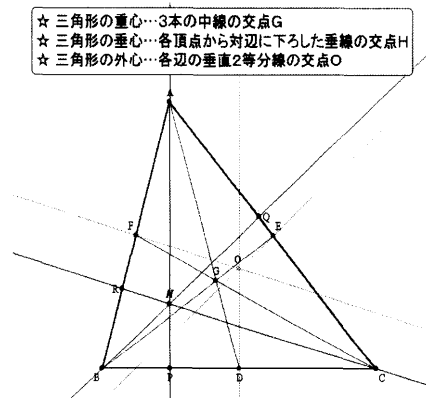
【準備物】 使用教科書「高等学校最新数学A」啓林館
 関数ソフト「Grapes」《Graph Presentation&Experiment System》
 マグネット

[2] コンピュータで提示した図形と教具の利用例

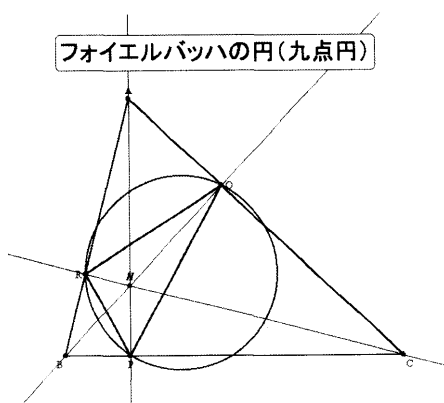
[画面7]



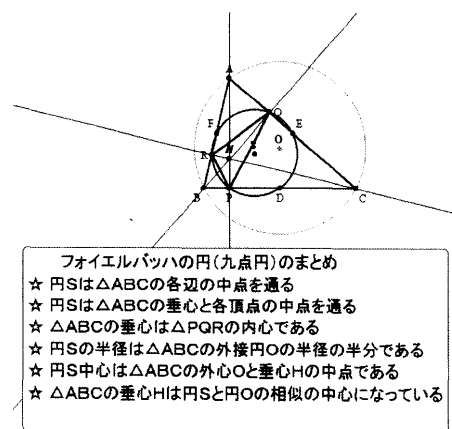
[画面8]



[画面9]

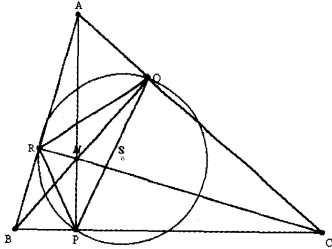


[画面10]



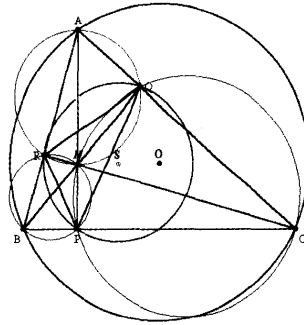
[画面11]

次の図において、円に内接する四角形
および互いに等しい角をすべて挙げよ。

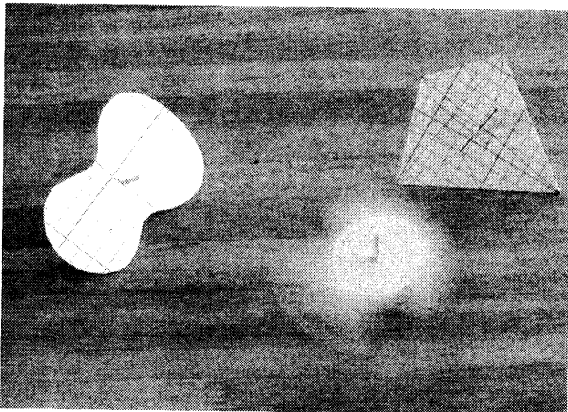


[画面12]

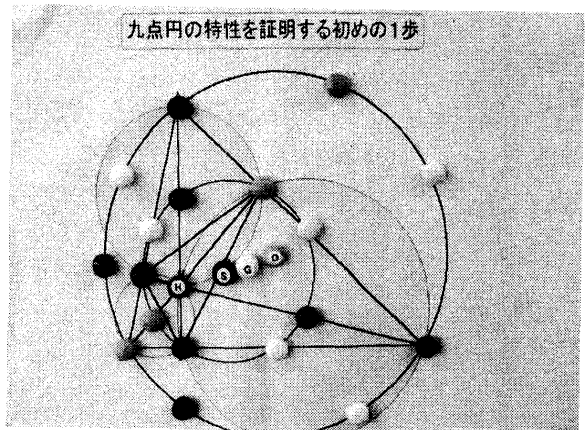
九点円の特性を証明する初めの1歩



[教具1]



[教具2]



5. まとめ

図形教材の授業モデルでは、入力した関数のグラフや図形を連続的に動かすことによって、その中に隠れている特性を見抜いたり、予想したことを確かめたりした。このように、自分達が予想したことを証明するときの生徒の意気込みには素晴らしいものがある。なかなか気づきにくい所ではあるが、証明の糸口として「九点円の特性を証明する初めの1歩」を示すと、生徒はそれらの証明を次々と完成させていった。

「三角形の五心」から発展させて実施した授業であるが充実した内容で生徒の心に残る授業になった。「九点円のもつ性質」の美しさに感動し、予想した性質を証明したいという気持ちになればという思いで作成した指導案である。

授業後の討議の中で、授業参観者から「図形の性質の美しさにふれて、証明してみたいと思った。」という感想もあった。

今後は、どのような問題を考えるときにコンピュータを使うと効果的かという内容面の考察とどのように利用すべきかという方法面の考察を重ねながら、教具や操作活動などを取り入れた授業実践を積み重ねていくことが課題である。

【引用・参考文献】

- 1) 高等学校学習指導要領；文部省，1999年11月
- 2) 算数・数学教育実践講座第12巻
「図形概念の発展Ⅱ」；小林善一，ニチブン・日本文教社，1985年11月
- 3) 「コンピュータを使った授業の実践と考察」；拙稿
広島大学附属福山中・高等学校中等教育研究紀要第36巻