JSiSE Research Report
vol.31,no.6(2017-3)

代数文章題と算数特殊文章題への三角ブロックモデルの適用

山本 晏宏[*1]，吉村 穣[*1]，林 雄介[*1]，平嶋 宗[*1]
*1 広島大学大学院工学研究科

Application of Triangle Block Model for the Algebraic Word Problems and Arithmetic Special Word Problems

Yasuhiro YAMAMOTO[*1], Minoru YOSHIMURA[*1], Yusuke HAYASHI[*1], Tsukasa HIRASHIMA[*1]
*1 Graduate School of Engineering, Hiroshima University

算数や代数の文章題は，どちらも自然言語で記述された内容についての概念整理を行い，その整理に基づいて数学的解法を適用することで解決する問題である．適用する解法は，算数の文章題では算術的な解法となり，代数の文章題では代数的な解法となる．問題文を数学的解法につなぐための概念整理のモデルとして，三角ブロックモデルが提案され，実践利用まで行われているが，これまでの適用対象は演繹的な解決が可能な算数の文章題の範囲であった．本稿では，鶴亀算等の特殊解法を必要とする算数特殊文章題と，同じ数量関係を持った問題を代数的な解法を適用して解く代数文章題への三角ブロックモデルの適用を行ったので報告する．この中で，算数特殊文章題と代数文章題が，概念整理においてどのように同じであり，どのように違っているかについても報告する．

キーワード: ドメインモデリング，認知ツール，問題解決支援

1. はじめに

人の思考を情報に対する操作であると仮定することは，人工知能や認知科学においてしばしば用いられる基本的な仮定の一つになっている．この仮定に基づくと，情報と操作の二つが思考を分析・モデル化する際の対象となる．このうち,「情報」を中心として分析・モデル化する方法が情報構造指向アプローチとなる．情報構造指向アプローチでは，人の思考の複雑さを，主に思考対象の複雑さと捉える．これは，人の思考において特徴的な活動が見られた場合，それを思考対象の情報構造の特徴の表れと捉えることになる．学習・教育の文脈において行われている課題分析にこのアプローチを適用すると，課題の難しさや他の課題との関係，あるいはある課題が難しい場合にそれを簡単化する方法などが情報構造に基づいて導くことが可能となる(1)(2)(3)．また，学習者の思考はこの情報構造に対する構造的操作と定式化することで，学習者の振る舞いの診断やフィードバックの生成も行うことができるようになる．本研究は，代数の方程式立式を必要とする文章題と算数の文章題の学習において最終段階で学ぶものとされる鶴亀算の問題などの，特殊な解法で解くものとされている問題を，この情報構造指向アプローチに基づいて分析し，学習支援の対象にする試みである．

文章題における問題解決は理解過程と解決過程の 2 つの過程を経て行われるとされている．理解過程は変換過程と統合過程に，解決過程はプラン化過程と実行過程に分けられ，この中で統合過程が最も困難であると言われている．統合過程は，問題を整理し解法を適用可能な状態にする過程である．適用する解法は，算数の文章題では算術的な解法となり，代数の文章題では代数的な解法となり，それぞれで問題の整理のレベルが異なる．一般に，問題を整理することは頭の中で行われるため支援が困難であると言われていた．そこで統合過程の外化モデルとして，三角ブロックが提案され，三角ブロックシステムが開発され，実践利用にて有用性が示されている(4).

文章題には算数文章題と代数文章題が存在する．さらに算数文章題は演繹的に解決可能な演繹的文章題と，仮定などの文章中から得られない特殊な概念を必要とする特殊文章題が存在する．現状，三角ブロックシステムで支援の対象とされている問題は演繹的に解決可能な算数文章題のみであった．本研究では，三角ブロックを代数文章題，算数特殊文章題のそれぞれに適用を行う．

2. 統合過程の外化モデル

2.1 三角ブロックモデル

文章題の問題解決過程は，統合過程において問題で与えられた数量関係を整理して解法を導くとされている．この統合過程は頭の中で行われることなので，数量関係に関する支援は困難であると言われていた(5).

統合過程の外化モデルとして言葉の式表現を用いた単一の二項演算を基本とした三つ組構造（以下では算数三角ブロック，もしくは単に三角ブロックと呼ぶ）が提案されている(4)(10)． 単一の三角ブロックは四則演算のいずれかの演算子を持っており，その演算子によって三角ブロックの拡張点に配置される３つの概念の数量関係を表現する（図 1）．また複数の三角ブロックにおいて，共有される概念の介するとことで二項演算以上に複雑な演算も表現可能である（図 2）．また，図２の結果１のノードのように三角ブロックを接続するために必要な未知の概念を中間概念と呼ぶ．

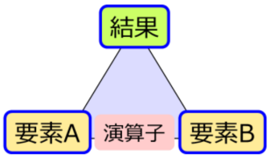

図１ 三角ブロックでの二項演算表現

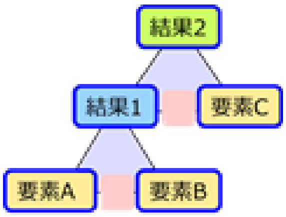

図２ 三角ブロックでの階層的表現

2.2 言語的統合と数量関係的統合

統合過程では，解法を適用可能な状態に問題の整理を行う．問題の整理のレベルには言語的に適切な統合である言語的統合と，言語的にも数量関係的にも適切な統合な数量関係的統合の二種の統合のレベルが存在し，統合のレベルによって適用可能な解法が異なる．問題の解を算術的に導くためには，既知の二つの概念から段階的に数値を計算していく必要がある．そのため，代数的解法を適用するためには言語的統合，算術的解法を適用するためには，数量関係的統合を行う必要がある．

2.3 特殊文章題

尾土井らの算数三角ブロックモデルでは，問題文に明示されている概念とそれを用いることで導くことができる概念を用い統合できる問題，つまり演繹的に統合できる問題を取り扱っていた．しかしながら算数文章題においては演繹的には数量関係的統合をすることが出来ず，特殊な概念の導入が必要になる問題も存在する．その一例として先に述べた鶴亀算が存在する．鶴亀算は言語的統合を行った場合ひとつのまとまりとして統合することが出来ず解を導くことが出来ない．そこで竹内らはこのような問題を「すべてツルと仮定した時の足の総本数」といった問題文中に明示された概念からは導くことができないような特殊な概念を用いることで数量関係的統合が可能になり，１つの三角ブロックとして構造記述可能な問題と定義している(6)．また，このような仮定概念を導入する前の統合の形を演繹的構造（図 3），導入後の統合の形を発見的構造（図 4）と定義している．ここで演繹的構造とは問題文で与えられた数量関係を意味し，発見的構造とは演繹的構造から得られる数量関係から解法を導くことで得られる数量関係のこと指すと考えることができる．

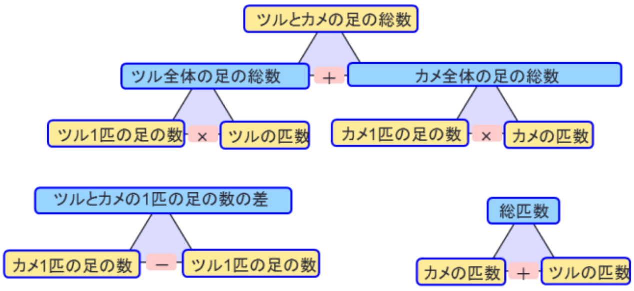

図３ 演繹的構造

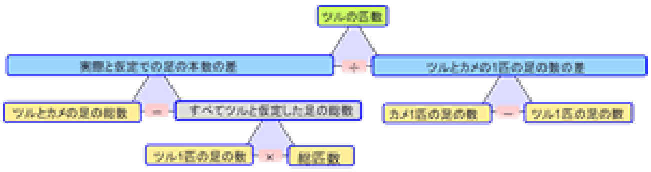

図 4 発見的構造

3. 代数文章題における三角ブロック

3.1 方程式立式のための三角ブロック

統合過程は，問題に解法を適用するための整理を行う．代数文章題における解法とは，方程式であるので方程式を立式するために必要な問題の整理が統合過程で行われていることであると考えられる．文章題における方程式の立式は，言語的統合を行うことで可能になり，言語的に整理された問題構造の中から未知数を作り，言語的な関係をそのまま数で表現することで方程式を立式することができる(図 5). 三角ブロックモデルの上では三角ブロックの底辺から段階的に概念の数量をまとめ上げていくことで方程式が立式可能である．

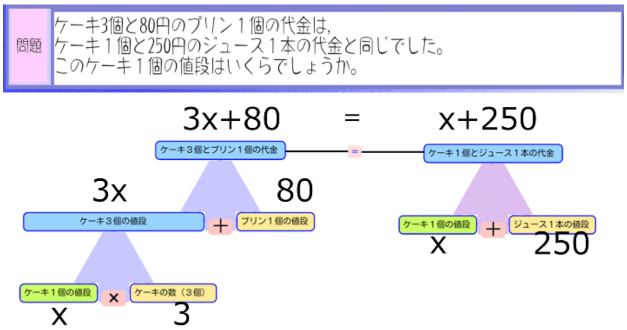

図 5 三角ブロック上での方程式

4. 中学校での実践利用

4.1 実験概要

広島大学付属東雲中学校の教員に対して三角ブロックモデルを用いた方程式立式の考え方を説明したところ，賛同が得られ実践利用が行われた．中学校１年生２クラスのうち１組４０名は三角ブロックシステムを導入して方程式の指導を行い，２組３７名はシステムを用いず三角ブロックモデルを用いた方程式の指導が行われた．授業はそれぞれ１限４５分を３回行った．実践の目的は代数文章題に適用を行った三角ブロックもでるが(1)中学校での方程式の指導に利用可能かであるかどうか，また(2)立式のための統合過程の支援になっているかどうかを中学校での実践利用を通して，評価を行った．実践手順としてはそれぞれのクラスで授業を行なった後に方程式に対するテスト・アンケートを行った．また，実験群に関しては学習者と指導を行った教員に対してシステムに関するアンケートを行った．方程式に関するテストの内容は，概念的理解を測る記述テストであり，具体的な代数文章題において，方程式で表現されたもの与えられ，未知数や左辺，右辺がそれぞれ何を表しているか自由記述で回答するテストになっている．

4.2 結果と考察

学習者に対してのテスト・アンケート結果，システムのログデータの分析を行った．テスト結果からは概念的理解度はどちらのクラスも同程度の成績であった．教員に対するアンケートでは三角ブロックを用いたことで自分の指導法が改善されたという意見が得られた．また，三角ブロックを用いた授業をさらに改善することができるといった改善への肯定的意見も得ることができた．学習者へのアンケート結果(図 8)では，三角ブロックを用いて方程式を立式することに対する肯定的な意見は得られた．しかし，三角ブロックを作ってから方程式を立てることは，問題の意味を考えるうえで役に立つという項目においては否定的な意見が多く見られた．従って，三角ブロックでの立式は支援できているが，問題についての概念的な理解の支援については不十分であることが言える．

システムの利用についてのログデータの分析結果を示す．図６図７はそれぞれシステムで扱った課題の１分あたりの回答回数と正解者数である．結果から１分あたりに学習者の半数程がシステムで回答を行っており，授業内で円滑に使用できていることが分かる．また，どちらの課題についても８割以上の学習者が正解にたどり着いているため，システムが立式のための統合過程の支援が行うことができていると考えられる．

今後の課題としては通常授業と三角ブロックを用いた授業効果の比較や立式後の数値入力等システムの拡張などが考えられる．

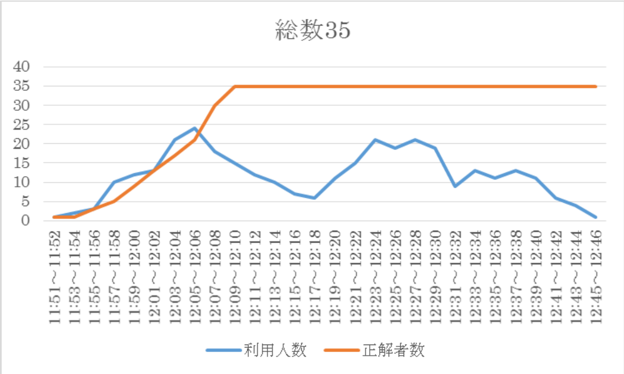

図 6 課題 1 の回答回数と正解者数

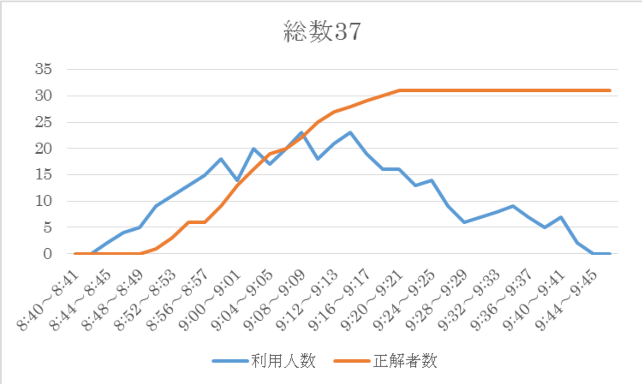

図 7 課題 2 の回答回数と正解者数

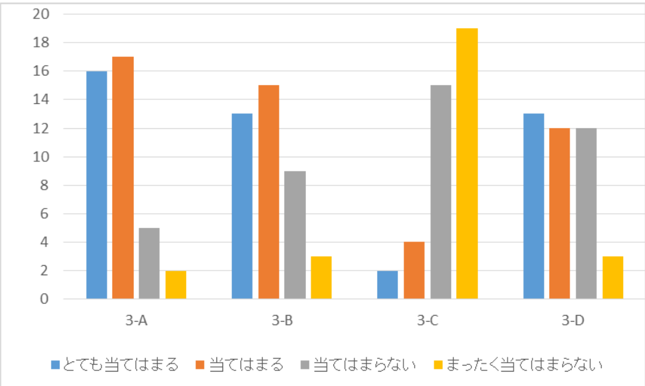

図 8 アンケート結果

表 1 アンケート内容

3-A. 三角ブロックから方程式を作ることは，簡単にできた
3-B. 三角ブロックを作ることは，方程式を立てる助けになった
3-C. 三角ブロックを作ってから方程式を立てることは，問題の意味を考えるうえで役に立つ
3-D. 三角ブロックを作ってから方程式を立てることは，方程式を直接立てるよりも，問題の意味を考えやすくなった

5. 算数特殊文章題における三角ブロック

5.1 道具的理解と関係的理解

Skemp は理解を道具的理解と関係的理解の 2 種の理解状態があると説明している(7). 道具的理解とは単に規則を記憶し，規則を用いる状態である．一方，関係的理解は規則自体の意味を理解し，規則を適用する理由も分かっている状態であるとして，道具的理解よりも関係的理解が重要であるとしている．ここで算数の分野にそれぞれの理解を当てはめてみると，道具的理解は単に解法を覚えそれを用いる状態であり，関係的理解は問題における概念間の演算関係から解法を導くことができる状態であると考えることができる．つまり，道具的理解は覚えた解法を概念間の演算ではなく，文章中に出現する数字やキーワードといった表層の関係を読み取り解法を用いることができる状態．それに対して，関係的理解は文章中に出現する数字やキーワードよりもより抽象的である概念間の演算を読み取っているため，道具的理解よりも問題に対して深く理解していると考えられる．

現状，特殊文章題の学習では特殊文章題はそれぞれが固有の解法を持っており，その解法をそれぞれ記憶する，もしくは算数として扱わずに方程式を用いて解決するといった指導法が取られていることが多い．この解法を覚えるということは道具的な理解を取り扱っているとは言えるが関係的理解につながるものにはなっていないと言える．また，方程式を用いて解決する場合についても，方程式では式操作などの意味を説明することができず，理解の深さの観点では算数としての理解のほうが深い理解であると言える．

5.2 三角ブロックの特殊文章題への適用

竹内らの研究では，特殊文章題は鶴亀算などの「～算」のような問題であると定義されていた．鶴亀算の数量関係を連立方程式で表すと，必ず決まった数量関係を取り出す事ができる．先行研究において特殊文章題として定義されている問題の数量関係をそれぞれ取り出した場合多くは二元一次の連立方程式として表現可能な数量関係的を持っている．しかし，二元一次の連立方程式で表現できる数量関係の全てを網羅してはいなかった．二元一次連立方程式の数量関係を持って

いる問題を算術的に解決する場合には仮定概念を導入することで解決が可能であり，先行研究において定義されていない問題も特殊文章題として扱うことができる．そこで特殊文章題として扱うことができる問題の分析を行った(図 9). それぞれの表は未知数の設定が異なっており，左から未知数が共に匹数の場合，未知数が共に足の本数の場合，未知数が匹数と足の本数の場合となっている．また，これらの問題の中には,「全てをツルとする」場合と「ツルとカメが同じ匹数であるとする」場合の 2 種の仮定が存在している．

未知数が匹数and匹数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算
AX + BY = C X + Y = D	鶴亀算
AX + BY = C X − Y = D	未定義
AX − BY = C X + Y = D	弁償算
AX − BY = C X − Y = D	差集め算
X + Y = C X − Y = D	和差算
AX + BY = C DX + EY = F	未定義
AX + BY = C DX − EY = F	未定義

未知数が足の本数and足の本数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算
AX + BY = C X + Y = D	消去算
AX + BY = C X − Y = D	未定義
AX − BY = C X + Y = D	未定義
AX − BY = C X − Y = D	未定義
X + Y = C X − Y = D	和差算
AX + BY = C DX + EY = F	消去算
AX + BY = C DX − EY = F	未定義

未知数が匹数and足の本数

数量関係	問題の名称
AX + BY = C AX − BY = D	和差算

図 9 問題のパターン

6. 特殊文章題に三角ブロックシステム

拡張した特殊文章題を三角ブロックシステム上で扱うことができるようにし，実際にシステムを中学校教員 1 名，小学校教員 2 名に使用してもらいアンケート(表 2)に回答してもらった．アンケートの結果から，三角ブロックモデルを用いて特殊文章題を表現することに対して，肯定的意見を得ることができた(図 10).

また, 中学校教員の方からは三角ブロックで概念的表現を学ぶことで代数と算数の接続になる可能性があるといった意見も得られた．しかし，アンケートにて小学生が現状のシステムで特殊文章題について演習を行うことは困難であるという意見も得られた．これは，現状の指導で用いられている面積図と三角ブロック表現に差があることが理由である．その為，三角ブロック表現と面積図表現の対応付をシステムで行うことが必要であると考えられる（図 11)．特殊文章題における三角ブロックシステムは現在，実験的に少数の中学生での利用が予定されており，利用の結果は発表にて述べる．

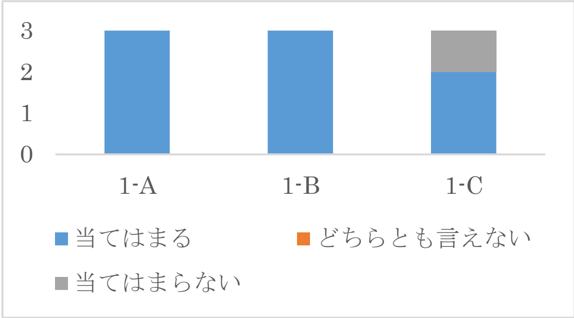

図 10 アンケート結果

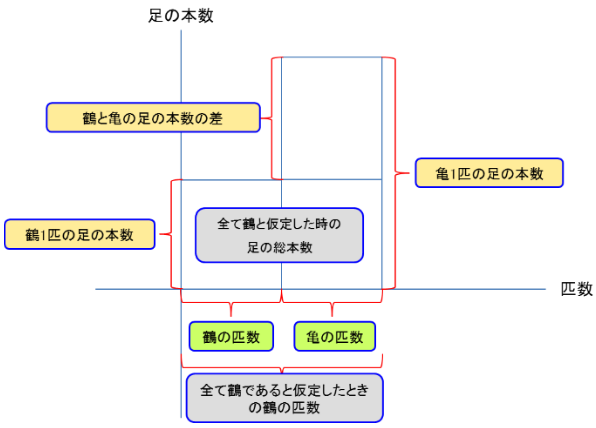

図 11 面積図と三角ブロックでの概念の対応付の例

表 2 特殊文章題の三角ブロックに関するアンケート

1-A.三角ブロックを用いて仮定を含めた数量関係的表現をすることは意味がある
1-B.三角ブロックを用いて仮定を含めた数量関係的表現は正しいものである
1-C.小学校・中学校の児童は三角ブロックシステムを用いて仮定を含めた数量関係的表現することができる

7. まとめと今後の課題

本研究では，三角ブロックモデルを代数文章題，算数特殊文章題のそれぞれに適用を行った．代数文章題においては中学校での実践利用が行われ方程式の立式における三角ブロックモデルの有用性が示された．算数の特殊文章題については教員の方 3 名に使用してもらいアンケートの結果から特殊文章題の構造表現の有用性に同意が得られ，利用可能性が示された．

今後の課題としては代数文章題に関しては，方程式立式後の支援などが考えられる．また，特殊文章題に関しては三角ブロック表現と現状の指導で用いられている面積図と対応付を行うことなどが必要であると考えられる．

参考文献

(1) Carbonell, J. R.: Ai in CAI: an artificial intelligence approach to computer-assisted instruction. IEEE Transaction on Man- Machine Systems, Vol.11, No.4, pp.190-202(1970).

(2) 平嶋宗, 学習課題の内容分析とそれに基づく学習支援システムの設計・開発：算数を事例として，教育システム情報学会誌，Vol.30, No.1, pp.8-19(2013).

(3) 平嶋宗,「学習課題」中心の学習研究 —情報構造としての学習課題の再定義と構造操作としての学習活動の設計— ，人工知能学会誌，Vol.39,No.3,pp.277-280(2015).

(4) 尾土井健太郎,山元翔,平嶋宗: “算数文章題の統合過程のモデル化とシステムによる外化支援の実現”,2012 年度 JSiSE 第 6 回研究会,(2013)

(5) 多鹿秀継: “算数問題解決過程の分析”, 愛知教育大学研究報告, 44, pp. 157-167, (1995)

(6) 竹内俊貴，古久保和仁，小田拳太，林雄介，平嶋宗：“発見的解法を必要とする算数文章題を対象とした数量関係的統合の外化支援”，JSiSE2013 年度第 6 回研究会，2014

(7) Skemp, R.(1976), “Relational Understanding and Instrumental Understanding., Mathematics Teaching”, No.77, pp.20-26.

(8) Brown, S. I. (1974) , “Musing on Multiplication, Mathematics Teacher” , No. 69, pp.26-30

(9) 山本晏宏，山元翔，林雄介，平嶋宗,” 数量関係統合の外化システムを用いた発見的概念を必要とする算数文章題の構造共通性の認識支援の試み”, 2014 年度 JSiSE 学生研究発表会，pp.135-136,(2015.02.28).

(10) T Hirashima, Y Hayashi, S Yamamoto, K Maeda (2015), Bridging model between problem and solution representations in arithmetic/mathematics word problem, Proc. of ICCE2015, pp.9-18.