

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	多田 安輝
学位授与の要件	学位規則第 4 条第①・2 項該当		
論 文 題 目			
On categories of faithful quandles with surjective or injective quandle homomorphisms (忠実なカンドルの全射カンドル準同型を射にもつ圏および単射カンドル準同型を射にもつ圏について)			
論文審査担当者			
主 査	准教授	奥田 隆幸	
審査委員	教 授	藤森 祥一	
審査委員	助 教	久保 亮 (広島工業大学)	
〔論文審査の要旨〕			
<p>本論文ではカンドル準同型と内部自己同型群の関係性についての考察を行っている。</p> <p>集合の各点において「点対称」とよばれる自己置換が定義されており、それが各種公理を満たしているものをカンドルとよぶ。重要な例として、対称空間（ユークリッド空間や球面などを含む）はカンドルの一種とみなすことができる。歴史的にはカンドルの公理は結び目不変量の研究と関連して D. Joyce [J. Pure Appl. Algebra (1982)] により見出されたものであるが、近年では H. Tamaru らによる一連の研究 ([J. Math. Soc. Japan (2013)], [Proc. Amer. Math. Soc. (2016)] など) をはじめとして、対称空間論を意識したカンドルの研究も盛んに行われている。</p> <p>二つのカンドルの間の写像が点対称を保つとき、それをカンドル準同型と呼ぶ。カンドル全体の集まりはカンドル準同型によって圏をなす。対称空間論においては、滑らかな単射カンドル準同型は全測地的埋め込みとよばれる重要概念と対応している。カンドル準同型の研究、つまりカンドルの圏の研究は構造論としても、また応用上も重要であると思われるが、発展途上の分野であるように見受けられる。本論文の主題は「カンドルの圏を、よく知られた圏に埋め込んで調べたい」という問題意識に基づくものである。</p> <p>本論文では特に「カンドルの圏と内部自己同型群との関係性」に焦点を当てている。一般にカンドル Q が与えられたとき、Q における点対称全体の生成する群を「Q の内部自己同型群」と呼び、ここでは $\text{Inn}Q$ と書くことにする。内部自己同型群は対称空間論の最も重要なツールの一つであり、研究にかかせない概念となっている。</p> <p>以下、群 G の生成系 S が共役安定であるとは、S が内部自己同型で保たれることとする。カンドルから “群とその共役安定な生成系の組” の対応として以下を考える：</p>			

対応:カンドル Q について, 内部自己同型群 $\text{Inn}Q$ およびその共役安定な生成系 $s(Q)$ の組 $(\text{Inn}Q, s(Q))$ をとる. ただし $s(Q)$ は Q 上の点対称全体のなす集合とする.

まず安直な問題として, 上記対応を「カンドルの圏から “群とその共役安定な生成系の組の圏 (射は生成系を保つ群準同型)” への忠実関手として拡張できるか?」ということを考えて, これはうまくいかない. そもそも関手になるように射の対応を作ることが難しい上に, どのように射の対応を定めたとしても, 忠実関手にはできないことが簡単に分かる.

本論文では上記対応が忠実関手に拡張できない原因を「群に関する圏において群準同型を射としている」ということとして捉え, その改善策として「“群とその共役安定な生成系の組を対象とするような群論的な圏” をうまく作ることにより, 上記対応を忠実関手として捉えられる」ということを示した. 特に主結果として, 「忠実カンドルと全射カンドル準同型のなす圏」および「忠実カンドルと単射カンドル準同型のなす圏」について, 上記対応によりそれらと圏同値になるような “群論的な圏” をそれぞれ構成している (本論文中の Theorem 1.1 および Theorem 1.2). 単射カンドル準同型に対応する圏 (論文中 Section 4 で 3 ページを費やして定義をしている) は非常に定義がややこしいものの, 群論的な計算環境が整っていれば二つの与えられた有限忠実カンドルの間の埋め込みの計算ができるという点で非常に画期的である.

このようなカンドル準同型と内部自己同型群の関係性の研究は先行研究と呼べるものがあまりなく, 新規性が高い. またこれまで研究が難しかったカンドルの埋め込みや, 大域的な意味での対称空間の全測地的埋め込みの研究への応用が見込まれる.

以上のことから, 審査の結果, 本論文の著者は博士 (理学) の学位を授与される十分な資格があるものと認められる.