# 論　文　の　要　旨

題　目　On categories of faithful quandles with surjective or injective quandle homomorphisms
（忠実なカンドルの全射カンドル準同型を射にもつ圏および単射カンドル準同型を射にもつ圏について）

氏　名　　多田　安輝

カンドルは Joyce によって導入された代数系である ([3]). カンドルは結び目のライデマイスター移動に関係する公理を満たす二項演算を持つ集合であり, 多くの観点から活発に研究がなされている ([1]). 微分幾何の観点から見ると, カンドルは対称空間の一般化である. これまでに対称空間論の諸概念やアイデアをカンドル論に定義するといった研究もなされている ([2], [4], [5]).

$Q$ をカンドルとし, その自己同型群を $\mathrm{Aut}(Q)$ と書く. $Q$ の各点 $x$ について, $x$ を右からかける操作としてカンドル自己同型 $s_x : Q \to Q$ が定義される. この $s_x$ を点 $x$ における $Q$ 上の点対称と呼ぶ. カンドル $Q$ の内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(Q)$ は $Q$ 上の点対称全ての集合 $s(Q)$ によって生成される $\mathrm{Aut}(Q)$ の部分群として定義される. カンドルの内部自己同型群はカンドルの構造理論において重要な役割を果たしている.

群と群準同型の圏を $\mathbf{Grp}$ とし, カンドルとカンドル準同型の圏を $\mathbf{Q}$ とする. また, 忠実カンドルとカンドル準同型の圏を $\mathbf{Q^f}$ とする. ただし, カンドル $Q$ が忠実であるとは, $s : Q \to \mathrm{Inn}(Q) : x \mapsto s_x$ が単射であることとする.

次の問題を考える.

**問題.** 対応 $\mathrm{Inn} : Q \mapsto \mathrm{Inn}(Q)$ は "良い" 関手 $\mathbf{Q} \to \mathbf{Grp}$ や $\mathbf{Q^f} \to \mathbf{Grp}$ に拡張可能か.

まず, カンドルと全射カンドル準同型の圏 $\mathbf{Q_{surj}}$ と, その充満部分圏であって対象を忠実カンドルとする圏 $\mathbf{Q^f_{surj}}$ を考える. [1] にあるように, この場合は対応 "Inn" は自然に関手に拡張される. 特に次の定理が成り立つ.

**定理 1** (cf. [1])**.** 対応 $\mathrm{Inn} : Q \mapsto \mathrm{Inn}(Q)$ は関手 $\mathbf{Q_{surj}} \to \mathbf{Grp}$ に拡張される. さらに, この関手は $\mathbf{Q^f_{surj}}$ 上忠実である.

定理 1 の忠実関手 $\mathrm{Inn} : \mathbf{Q^f_{surj}} \to \mathbf{Grp}$ は圏同値にはならない. そこで, 本論文ではカンドルの内部自己同型群だけでなく, その生成系との組を対応させる $Q \mapsto (\mathrm{Inn}(Q), s(Q))$ に着目した. また, 群論的な圏 $\mathbf{Grp^{g.c.f}_{surj}}$ を次のように定義した.

**定義 2** ($\mathbf{Grp^{g.c.f}_{surj}}$)**.** 圏 $\mathbf{Grp^{g.c.f}_{surj}}$ の対象は群 $G$ とその生成系 $\Omega$ の組 $(G, \Omega)$ であって, 次を満たすもの:

- $\Omega$ は $G$ の共役で閉じる.
- $G$ の $\Omega$ 上の共役作用は忠実.

射 $\varphi : (G_1, \Omega_1) \to (G_2, \Omega_2)$ は群準同型 $\varphi : G_1 \to G_2$ であって, $\varphi(\Omega_1) \subset \Omega_2$ かつ $\varphi$ の制限 $\varphi|_{\Omega_1} : \Omega_1 \to \Omega_2$ が全射であるもの.

本論文では主定理の一つとして以下を得た.

**主定理 3** (本論文 Theorem 3.9)**.** 次を満たす圏同値 $\mathcal{F}_{\mathrm{surj}} : \mathbf{Q^f_{surj}} \to \mathbf{Grp^{g.c.f}_{surj}}$ が存在する: 各忠実カンドル $(Q, s)$ に対し, $\mathcal{F}_{\mathrm{surj}}(Q, s) = (\mathrm{Inn}(Q), s(Q))$.

次に, 忠実カンドルと単射カンドル準同型の圏 $\mathbf{Q^f_{inj}}$ について考える. まず, 対応 $\mathrm{Inn} : Q \mapsto \mathrm{Inn}(Q)$ は忠実関手 $\mathbf{Q^f_{inj}} \to \mathbf{Grp}$ に拡張不可能である (本論文 Remark 2.16 から直ちに従う). そこで新たに次の問題を考

える.

**問題.** 各対象が群とその生成系の組であって, $\mathbf{Q}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{inj}}$ と圏同値となる圏 $D$ を見つけよ.

本論文では群論的な圏 $\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}$ を次のように定義した.

**定義 4** ($\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}$)**.** 圏 $\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}$ の対象は圏 $\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\mathbf{surj}}$ の対象と同じものとする. 射 $\Phi = ((H,\Gamma),\pi) : (G_1,\Omega_1) \to (G_2,\Omega_2)$ は $G_2$ の部分群 $H$ と $\Omega_2$ の部分集合 $\Gamma$ と群準同型 $\pi : H \to G_1$ の組であって, 次を満たすもの:

- $\Gamma$ は $H$ を生成する.
- $\Gamma$ は $H$ の共役で閉じる.
- $\pi(\Gamma) \subset \Omega_1$ かつ $\pi|_{\Gamma} : \Gamma \to \Omega_1$ は全単射.

射の合成はある種の pullback を用いて定義される (本論文 Section 4.2).

圏 $\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}$ の射 $\Phi$ は図式としては図 1 のように表される.

$$\begin{tikzcd}
(G_1,\Omega_1) \arrow[r, dashed, "\Phi"] & (G_2,\Omega_2) \\
& (H,\Gamma) \arrow[ul, two heads, "\pi"] \arrow[u, phantom, "\cup"]
\end{tikzcd}$$

図 1　$\Phi = ((H,\Gamma),\pi) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}}((G_1,\Omega_1),(G_2,\Omega_2))$.

本論文では二つ目の主定理として, 以下を得た.

**主定理 5** (本論文 Theorem 4.17)**.** 次を満たす圏同値 $\mathcal{F}_{\mathrm{inj}} : \mathbf{Q}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{inj}} \to \mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}$ が存在する: 各忠実カンドル $(Q,s)$ に対し, $\mathcal{F}_{\mathrm{inj}}(Q,s) = (\mathrm{Inn}(Q), s(Q))$.

主定理 3, 5 より, 忠実カンドル $Q_1, Q_2$ に対し, 以下の一対一対応を得る:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{surj}}}(Q_1,Q_2) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\mathbf{surj}}}((\mathrm{Inn}(Q_1), s(Q_1)), (\mathrm{Inn}(Q_2), s(Q_2))),$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}^{\mathbf{f}}_{\mathbf{inj}}}(Q_1,Q_2) \overset{1:1}{\leftrightarrow} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Grp}^{\mathbf{g.c.f}}_{\star}}((\mathrm{Inn}(Q_1), s(Q_1)), (\mathrm{Inn}(Q_2), s(Q_2))).$$

また, 主定理 5 を用いた具体例として, 位数 3 の二面体カンドル $R_3$ から位数 9 の二面体カンドル $R_9$ への単射カンドル準同型全体の集合を群論的計算によって決定した (本論文 Section 5).

# 参考文献


[1] E. Bunch, P. Lofgren, A. Rapp and D. N. Yetter, *On quotients of quandles*, J. Knot Theory Ramifications, **19** (2010), 1145–1156.

[2] Y. Ishihara and H. Tamaru, *Flat connected finite quandles*, Proc. Amer. Math. Soc., **144** (2016), 4959–4971.

[3] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Algebra, **23** (1982), 37–65.

[4] S. Kamada, H. Tamaru and K. Wada, *On classification of quandles of cyclic type*, Tokyo J. Math., **39** (2016), 157–171.

[5] H. Tamaru, *Two-point homogeneous quandles with prime cardinality*, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), 1117–1134.