

数 学 科

論理的に考察し表現するための数学科授業の研究

—思考過程に焦点をあてて—

藤 原 功 達

1 はじめに

わが国の小学校学習指導要領解説（算数編）では、算数科改訂の基本方針に以下のような具体的な方針が示された。

「数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能は、生活や学習の基盤となるものである。また、科学技術の進展などの中で、理数教育の国際的な通用性が一層問われている。このため、数量や図形に関する基礎的・基本的な知識・技能の確実な定着を図る観点から、算数・数学の内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による教育課程を編成できるようにする¹⁾。」とある。図形領域では、中学校から一部を移行する内容として、第5学年での「図形の合同」、第6学年での「縮図や拡大図」、「対称な図形」がある。また、第5学年の「角柱、円柱」などはスパイラルにあたり、学校段階間で、反復させながら知識を広げ、深めることが出来るようになってきている。これらは、小学校と中学校との間での指導内容の接続に配慮したものである。

また、「算数・数学には内容の系統性や学習の連続性が明確であるという教科としての特性がある。そうした特性に留意しながら、学年間などで同じ系統の内容の接続を工夫し、取扱いの程度を少しずつ高めていくような教育課程を編成できるようにしようとするものである¹⁾。」とある。このことは、算数・数学の内容の系統性を重視しつつ、学年間や学校段階間で内容の一部を重複させて、発達や学年の段階に応じた反復（スパイラル）による指導が出来るよう配慮したものである。

以上のことから、学年間や学校段階間で、系統性や連続性を意識した授業を展開しなければならない。本研究では、図形領域の論証問題に焦点を当て、研究を進めることにした。

中学校数学科の図形指導の意義については、次の二つの面が考えられる²⁾。

- ・身の回りの事象を「形」「大きさ」「位置関係」という観点から考察することが多いので、平面図形や空間図形についての基礎的な概念や性質についての理解を深め、それを活用して考えたり判断したりしようとする態度を育てること。
 - ・図形に対する直観的な見方や考え方や図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して養われる論理的な見方や考え方は、中学校数学科に限らず、いろいろな分野での学習において重要な役割を果たすものであり、論理的に考察し表現する能力を一層伸ばすこと。
- そこで、本研究は、中学生が論理的に考察し、表現する能力を培うために必要な思考過程に焦点を当て、指導方法を考えることをねらいとした。

2 研究の目的

本研究の目的は、論理的に考察し、表現する能力を伸ばすために必要な思考過程を身につけることが出来る指導方法の開発である。

3 授業設計の基本方針

(1) 対象生徒

対象生徒は広島大学附属三原中学校9年生2クラス82名である。実施期間は平成26年12月、単

元は、「相似な図形」を中心に論証問題へのアプローチの仕方を考える授業を展開した。

(2) 単元指導計画

- 第1次 相似な図形（7時間）
- 第2次 平行線と相似（7時間）
- 第3次 相似と計量（4時間）
- 第4次 円周角と中心角（7時間）
- 第5次 まとめ問題（2時間）

(3) 生徒への調査

本学校第9学年に図形領域における調査を以下の内容で行った。調査結果は下の表1であり、無回答が多かった問題は図1である。

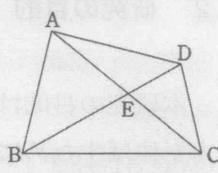
<調査項目>

- I 基本的な作図
- II 作図の手順についての説明
- III 合同の証明
- IV 合同を活用した証明
- V 相似の証明
- VI 相似の証明を活用した問題

表1 図形領域における調査結果 単位(%)

調査項目	正答率	誤答率	無回答率
I 基本的な作図	85	14	1
II 作図の手順についての説明	80	17	3
III 合同の証明	75	20	5
IV 合同を活用した証明	60	30	10
V 相似の証明	58	23	19
VI 相似の証明を活用した問題	58	21	21

右の図の対角線の交点をEとする四角形ABCDにおいて、 $\angle BCA = \angle DCA$ 、 $BA = BE$ ならば、 $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ である。このことを証明せよ。



辺BCの長さを求めよ。ただし、考え方が分かるよう記述しなさい。

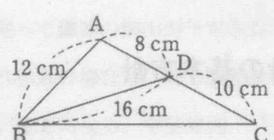


図1 調査問題V（上）とVI（下）

VIの問題では、辺BCの長さは相似比を活用して求めていたが、相似比を活用するための相似の証明が正確にかけていない生徒がいた。また、証明問題は得意（好き）であるかという質問に対する解答の理由は図2、3である。

- ・相似な図形を見つけるまでに時間がかかる。
- ・相似に必要な条件が見つけられない。
- ・文章の書き方が分からない。
- ・分かるときは分かるが、分からないときは分からない。
- ・一回悩んでしまうと立ち止まってしまうことが多い。
- ・文の構成があやふや。
- ・条件をどれにすればよいか分からない。
- ・合同はいけるが、相似は難しい。
- ・相似を見つけて文にするのが難しい。

図2 否定的な回答をした生徒の意見

- ・合同と相似は似ていて考えやすい。
- ・ひらめくと楽しい。
- ・いろいろなことを考えることが好き。
- ・条件が隠れているのを見つけたときが楽しい。
- ・どこが合同でどこが相似か見つけるのが楽しいから。
- ・解けたときにスカッとするといい。
- ・解けたらすっきりする。

図3 肯定的な回答をした生徒の意見

基本的な作図や作図の説明、合同の証明では正答率が高く基本的な推論の手順や仕組みは定着しつつあると考える。しかし、三角形の相似を証明した後、相似比を活用して辺の長さを求める問題については、正答率が下がり、無回答率が上がっている。また、否定的な意見の中には「合同はできるが相似は難しい」と考える生徒がいたり、肯定的な意見の中には「合同と相似は一緒である」と考える生徒がいたり、対照的な意見がある。前者の考えをもった生徒から話を聞くと「相似条件まで、どうやってもっていけばいいか分からない」という意見があった。このことから、論証において、相似条件を活用し証明する手順の理解にとどまっている。後者の考えをもった生徒の意見に「条件が隠れているのを見つけたときが楽しい」とある。このことから、証明する手順の理解だけでなく、与えられた条件から分かる性質や定理の引き出し方についても十分理解していると考えられる。知識の引き出しが出来れば、後は組み合わせていく作業であるから、楽しく考えられ、達成

感もあることから、好きであるようだ。しかしながら、無回答の生徒においては、「文章の構成の仕方が分からなく見通しが持てない」という意見があるため、証明の手順については、丁寧に指導し続ける必要がある。

第9学年では、難易度も上がり、知識も膨大になり、論証問題へのアプローチの方法が多様になることから、無回答も増えていると考えられる。そのため、論証問題を得意と感じている生徒の、考え方や捉え方が共有できる教材や指導の工夫に取り組む必要がある。そのアプローチの方法を授業の中で明確にし、指導していくことで、論理的に思考し表現する能力を培っていくことにもつながると考える。

(4) 指導内容の概観

現行の学習指導要領の図形領域における各学年の主な内容は次の通りである²⁾。

<第7学年>

- ・観察、操作や実験などの活動を通して、見通しを持って作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに、論理的に考察し、表現する能力を培う。
- ・観察、操作や実験などの活動を通して考察し、空間図形についての理解を深めるとともに、図形の計量についての能力を伸ばす。

<第8学年>

- ・観察、操作や実験などの活動を通して基本的な平面図形の性質を見出し、平行線の性質を基にして、それらを確認することが出来るようにする。
- ・図形の合同について理解し図形についての見方を深めるとともに、図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察し表現する能力を養う。

<第9学年>

- ・図形の性質を三角形の相似条件などをもとにして確かめ、論理的に考察し表現する能力を伸ばし、相似な図形の性質を用いて考察できるようにする。
- ・観察、操作や実験などの活動を通して円周角と中心角の関係を見出して理解し、それを用いて考察できるようにする。

以上のように中学校では、観察、操作や実験などの活動を通して段階に応じた指導をするなかで、学年間の系統性や連続性を意識した学習活動を展開していくのである。

(5) 系統性を意識した教材

現行の学習指導要領から読み取れる各学年間における系統性については次の通りである。

小学校算数科では、図形に対する直観的な取り扱いをしており、それを通して図形に対する直観

的な見方や考え方についての能力は高まってきているといえる。中学校数学科ではそれを広くし、内容的にも深くしていくことをめざしている。算数から数学への学習を円滑に行うために第7学年では、観察・操作や実験から直観的に理解し考える学習に取り組み、段階に応じた学習過程を踏んでいる。

<第7学年から第8学年へ>

第7学年では、作図の学習内容で系統性を持たせることが出来る。作図については、図形の性質を理解する手段として取り扱うことが多い。しかし、観察、操作や実験などの活動を通して、図形についての直観的な見方や考え方を深めることを中心としながら、論理的に考察し表現する能力を培っていくことが出来る。初めは、試行錯誤しながら作図の手順や方法を考えていく。その中で、どうしてこの方法であれば作図できるのか、作図の手順をもとに論理的に考え説明する活動を取り入れる。そのことが、第8学年における論証へと系統的につなげていくことが出来る教材であると考える。

<第8学年から第9学年へ>

第8学年では、三角形の合同を学習することで、第9学年の論証問題に系統性を持たせることが出来る。第8学年では、第7学年に引き続き、観察、操作や実験などの活動を通して、三角形や多角形についての角の性質を見だし、平行線の性質を基にしてそれらを確認する。また、平面図形の合同の意味を理解し、合同な三角形や平行四辺形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめる。さらに、図形の性質の証明を読んで新たな性質を見出すことも学習する。このように、論証によって図形の性質を確認する能力を培っていく。以上のように、平行四辺形や二等辺三角形などの性質を三角形の合同を用いて論証したり、図形の性質を用いて合同を証明したりすることで、第9学年の論証へとつながっていくことが出来る。しかし、第9学年では、三角形の相似条件などを用いた図形の性質の証明、平行線についての線分の長さの比の性質、円周角と中心角の関係、三平方の定理

など論証に用いる性質や定理が多くなり、つまずきやすい。しかし、既習事項を定着させ、論証の中で引き出すことが出来れば、論理的に考察し表現する能力を伸ばすのにふさわしい内容といえる。

4 研究の方法

今までの系統的な指導に加え、既習内容である図形の性質や定理を、スパイラルで定着をさせる指導と、与えられた条件から必要な性質や定理を引き出す能力を育成する指導をしていく。

(1) 既習内容の定着

論証問題を解く上で、知識が無ければ、論理的に考察することも出来ない。そこで、一つ目の指導として、既習内容の定着を挙げる。既習内容については、観察、操作や実験などの活動を通して、図形についての直観的な見方や考え方を深めることを中心としながら、平行四辺形や二等辺三角形など、一般的な図形の性質や作図を通して、角の二等分線や垂直二等分線の性質を学習してきている。論証によって、円周角の定理、中点連結定理、平行線と比の性質などを学習してきている。そこで、毎時間、授業開始の5分間は、今まで既習した「数と式」・「関数」・「図形」などの問題を解かせることにした。

スパイラル学習について生徒に意見をきくと、初めは、取り組みに対して消極的に考える生徒が多く、ネガティブな意見が目立った。しかし、毎時間のスパイラル学習をやりきることで、生徒の印象が変わっていった。図4は、実施後半の生徒の感想の一部である。

- ・ためになりました。毎時間コツコツやることで、忘れていた問題を思い出したり出来たので良かったです。
- ・時間コツコツすることで中1から中3の復習が出来てよかったです。そして自分が出来ていない単元を見つけられた。スパイラルでの学習は基礎が身につくので大切だと思った。
- ・見直しを何回もするようになった。
- ・相似の問題の克服につながった。今までの復習が簡単に出来た。
- ・似た問題が繰り返し出て来て理解することが出来た。

図4 スパイラル学習を振り返っての感想

次に、系統的な指導に加え、条件から必要な性質や定理を整理し活用する能力を育てていかないといけない。この力は、図形の学習の意義でもある図形に対する直観的な見方や考え方及び図形の性質を数学的な推論の方法によって考察する過程を通して養われる、論理的な見方や考え方を鍛えていくためには、重要な能力であると考えられる。引き出す能力を、次の図5のように位置づけて考えた。引き出す能力は、与えられた仮定と既習内容を結びつけ、論証に必要な知識を整理する力とする。

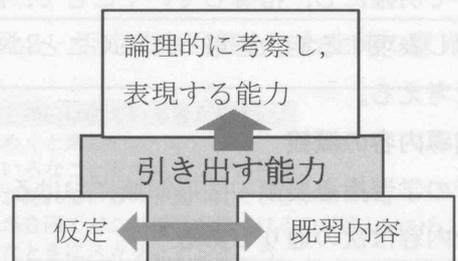


図5 引き出す能力

論証問題において仮定から考えられる性質や定理などの既習内容を引き出す能力やノウハウが分からなければ、図形領域の論証で身につけたい論理的に考察して表現する力にはたどり着かない。

第8学年までにおける論証は、合同な三角形を用いることが多く、解法パターンとしては限られたものであった。結論が「長さが等しい」や「角度が等しい」の場合は必ずといっていいほど三角計の合同を活用するところが中心になり、合同条件にすぐたどり着けた。また、条件に当てはまる性質も、四角形の性質や、錯角や同位角、対頂角など限られた知識で証明してきた。学年があがると、これまでの論証の手順は同じだが、解法パターンの多様性に対応しなければならない。そのためには、与えられた条件から、論証に必要な性質や定理を引き出す力の育成が必要である。そこで、授業の中では、論証へのアプローチの方法について次のように指導する。1つ目は、文章の中でキーワードとなる条件をピックアップしその条件から分かる知識をひたすら書き上げていくのである。ブレインストーミングのように、出来るだけ多く

リストアップさせる。それに優先順位をつけランキングさせたり、ツリーのように知識を広げさせたりする。頭の中で自然と行っている処理を、丁寧に書き出すことで、知識のつなげ方や広げ方、精選や活用する根拠も、論証が苦手な生徒と共有することができる。いろいろな考え方やアプローチの仕方を視覚的に捉えることを進めていく。2つ目は、本来の問題文から条件を1つ不足させて出題し、解法の可能性を広げ、今まで考えなかったアプローチの仕方を開発させるものである。

(3) 授業の実践

<第1・2・3次>

ここでは、結論に対して「〇〇だから△△である」論証の方法である演繹法を活用し証明の枠に当てはめて論証の指導をしてきた。例えば、結論が「平行である」ということを示すために、図6の手順を踏むよう板書した。

1. 仮定・性質・定理
2. 相似（合同）条件
3. 三角形の相似（合同）
4. 錯角や同位角が等しい
5. 平行である

図6 論証の手順

生徒に「論証問題で気をつけていることは何か」という質問に対して図7のような回答をした。

- ・書いていく手順が分からない。
- ・どのように書いていけばいいイメージできない。
- ・仮定や分かっているところに印を付ける。
- ・相似条件にあうように探す。
- ・条件が満たされているか確認する。
- ・相似（合同）条件にあてはめてみる。
- ・相似条件を探す。
- ・相似条件にあうような仮定を探す。

図7 論証問題で気をつけていること

多くの生徒が相似（合同）条件をもとに考えようとしようとしている。しかしながら、表1で示したとおり、相似条件に必要な角度や辺の比が正しく導かれていなかった。特に、同じ大きさになる角度であることは証明の過程で分かるが、その根拠が明確になっていなかった。

<第4・5次>

ここでは、論証に対して演繹的に証明を進めていくのではなく、与えられた条件から、導き出すことが出来る性質や定理を出来るだけ多く挙げさせ、それから論証に取り組みさせた。図8の手順を踏んだ後、実際の論証問題に取り組みさせた。

- ① 文章を読み与えられた情報から分かる性質や定理を考える。
- ② 関係があるキーワードを線で結んで考える。
- ③ 重要なキーワードを選ぶ

図8 論証問題の指導手順

取り組んだ問題は三角形の合同を証明するものである。生徒のメモには、合同条件が書いてあったり、正方形の対角線や角度、平行線についても考えていたりしていた。図9が出題問題であり、図10は生徒のメモである。

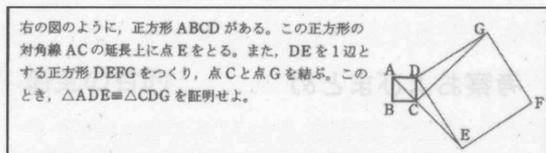


図9 指導に活用した論証問題

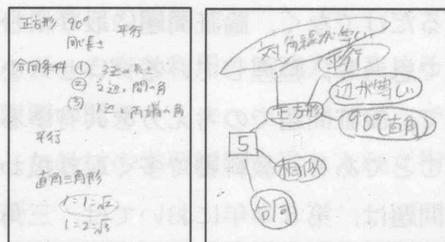


図10 図9の論証に取り組む前の生徒のメモ

実際の証明には、必要ない性質や定理が含まれるが、与えられた知識から導かれる性質や定理を書き出すことは、見方・考え方などアプローチの仕方を多様にする目的である。生徒の意見を黒板に書き出し、重要度順にランキングしたり、語句と語句をつないでみたりした。その後、黒板で演繹的に論証を進めていった。合同条件にあてはまる角や辺の位置を確認し、生徒から挙げた性質や定理を活用して合同を示すことが出来た。また、引き出す能力を鍛えるために別解も考えさせた。他にも、図11の問題を取りくませた。

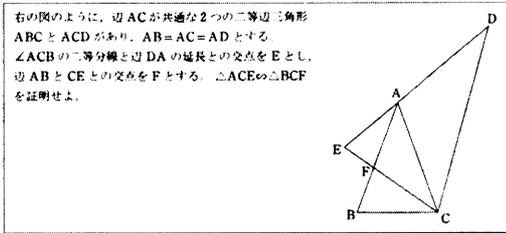


図 11 引き出す能力を鍛える問題

この問題は、本来の問題文から条件を1つ不足させた状態で出題した。そうすることで、今までのパターンでは論証を組み立てることが出来ず、見落としている条件が無いか、読み返したり、今までの知識を確認するために教科書を振り返ったり、ひたすら図中に、しるしや線を書き込んだりする姿が見られた。この問題に取り組んだ生徒のつぶやきに、「普段以上に考えた」や「あらゆる考え方を試した」、「とても疲れた」、「この角度が分かれば解けるのに」という声が上がった。

5 考察およびまとめ

本実践研究の成果と課題を整理しておく。

第一の成果としては、論証問題の答えを授業で共有するだけでなく、論証問題に取り組む前の、頭の中で思考し、整理しているプロセスを板書することで、論証問題での考え方を共有することが出来たことである。教科書で多く取り扱われている論証問題は、第8学年においては、三角形の合同を活用し、辺の長さや角の大きさを示すものである。第9学年においては、三角形の相似を活用し、線分の長さやその比、角の大きさを示すものである。このように、今までは、合同条件や相似条件をヒントに演繹法で必要な角度や辺を探し論証を進めてきた。しかし、三角形の合同や相似が活用できない論証問題も多く存在する。また、論証問題以外でも、論理的に考察する場面は多くある。その問題に取り組むためには、結論から演繹的に必要な条件などを探す方法も必要だが、仮定から導かれる条件をひたすら導き出し、試行錯誤し、解法へつなげていく能力が必要である。さらに、そこで取り出された性質や定理を結びつけ総

合的・発展的に考えなければならない。その点においては、今後も、生徒が頭の中で考えている、思考の部分を板書し視覚的に捉え共有していくことで、周りの考えを自分のものにしていくことで、生徒の知識に幅を持たせアプローチの方法を多様化し、無回答や誤答例からも外れた回答を少しでも減らしていくことができるようにしていきたい。

第二は、教材開発の視点である。条件を不足させた問題を提示した際の生徒のつぶやきに「この角度がわかれば解けるのに」という発言があった。そこで、教材として、必要な条件を挙げさせ、実際にその条件で問題を解くことも効果的だと考えることが出来た。例えば図12である。

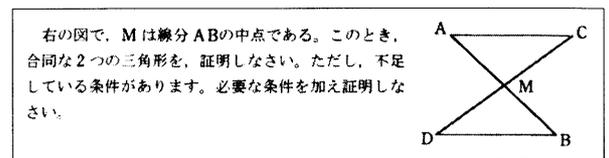


図 12 条件を加え証明する問題

この問題では、合同な三角形を示すために必要な条件として、「 $\angle A = \angle B$ が条件で必要だ」と考えるが、「平行線の錯角は等しいことから線分ABと線分CDが平行」という性質まで深めて考えさせたり、別解を考えたりすることで、思考も深まると考えることが出来た。

最後に今後の課題について述べておく。第一に、生徒の変容が見取ることができるパフォーマンス課題やルーブリックの作成が必要である。数学科としては、論証問題を解くことができる生徒を育成し、そのために必要な、論理的に考察し、表現する能力を培わなければならない。思考の過程を見取ることが出来る評価の仕方を検討していかなければならない。

<注および引用文献>

- 1) 文部科学省：「小学校学習指導要領解説 算数編」, p. 4, 2008, 東洋館出版社
- 2) 文部科学省：「中学校学習指導要領解説 数学編」, pp. 3-6, pp. 46-53, 2008, 教育出版社