広島大学附属三原学校園研究紀要　第４集　2014　pp. 167－174

数　学　科

関数理解を促す小中接続のカリキュラムの開発

―中学校第９学年における関数の観念を育成する授業の創造―

妹　尾　進　一

１　はじめに

自然現象や社会現象の考察においては，考察の対象とする事象の中の対応関係や依存，因果などの関係に着目して，それらの関係を的確で簡潔な形で把握し表現することが有効である。

「関数の考え」や「関数的な見方や考え方」についての指導は，小学校から始まり，中学校，高等学校へと児童生徒の発達段階に応じて段階的，発展的に展開されている。しかし，関数は数量の変化や対応の様子など，対象を動的に考察しようとする際や動的な対象を考察する際に用いられる抽象的な概念であるため，中学校数学科における関数理解の定着状況は依然として厳しい状況にある。

平成 25 年度の全国学力・学習状況調査では，中学校数学Ａ問題の「ｙがｘの関数である事象を選ぶ」問題の正答率は 13.8%（本校 10.3%）と極めて低く，ｘの値を１つ決めるとｙの値がただ１つ決まるという関数の意味を１割ほどの生徒しか理解できていないことが明らかになっている[1]。また，平成24年度の調査では，小学校算数Ａにおいて相当数の児童が２つの数量の関係を表を用いて捉えることができている[2]のに対して，中学校数学Ａでは具体的な２つの数量の関係を表，式，グラフなどの数学的表現を用いて捉えることに課題がある[3]と指摘されており，小中の実態の間には大きな隔たりがあることが伺える。

２　小学校と中学校における関数指導

小学校学習指導要領解説算数編では，関数の考えを「数量や図形について取り扱う際に，それらの変化や対応の規則性に着目して問題を解決していく考え」とし，関数の考えによって，数量や図形についての内容や方法をよりよく理解したり，伴って変わる２つの数量の関係を考察し，特徴や傾向を表したり読み取ったりできるようにすることが大切なねらいであると述べられている[4]。よって，小学校算数科における数量関係の領域では，いろいろな内容を指導していく中で，２つの事柄の間の依存関係に着目すること，変化や対応の特徴を調べていくこと，見いだした変化や対応の規則性を問題解決に活用することといった関数の考えが育つようにし，関数の考えを生かして各領域の内容をよりよく理解していく学習指導が行われる。その際には，各領域のねらいや扱われる内容を大事にした上で，さらに関数の考えが加味されるよう留意する必要がある。

中学校学習指導要領解説数学編には関数指導について，いろいろな事象の中に潜む関係や法則を数理的にとらえ，数学的に考察し処理できるようにすることをねらいとして，具体的な事象の中から２つの数量を取り出し，それらの変化や対応を調べることを通して，関数関係を見いだし表現し考察する能力を３年間を通じて徐々に高めていくことが大切であると述べられている[5]。よって，中学校数学科においては，主に関数の領域において，関数の概念についての理解を深めるための学習指導が行われる。また，具体的な事象において，関数関係を見いだし表現し考察することを通して関数的な見方や

考え方を養い，それらをいろいろな事象の考察や問題解決に活用する態度を養うための学習指導が行われる。

このように，小学校段階から漸次，関数の素地指導が行われ，中学校段階では主に関数領域において，関数的な見方や考え方を養う指導が行われるわけであるが，学力調査の結果等を踏まえると，学習指導の改善が必要な状況にある。

3　先行研究からの知見

小倉(1928)は，「数学教育の意義は科学的精神の開発にある」，「数学教育の核心は関数の観念の育成にある」と述べ，関数の観念を徹底させてこそ数学の教育は価値あるものになると力説している[6]。小倉のいう関数の観念とは，２つ以上の事象があるとき，経験的事実を基にしてそれらの事象を関係づけ，その間にどんな法則があるのかを調べていくという過程のことである。また，科学的精神とは，関数の観念（科学的）で事象を考察しようとする（努力，精神）ことである。そして，関数の観念を徹底させるためには，これまで関数という言葉を用いないでやっていた代数や幾何などの様々な領域において，関数の思想を見いだす必要があることや，関数の観念が数学の理論を理解するために必要なだけでなく実生活上の諸問題を最も良く処理するものであることも強調している。

小倉は，日常の現象を考察するために，変数をみつけ，その間にある関係を見いだしていくことを重視しており，このことは小学校「数量関係」の領域や中学校「関数」の領域において，事象の中にある依存関係や因果関係に着目することを強調しているものと捉えることができる。

中島（1981）は，「中学校などでは，関数を理解させることに重点がおかれ，$y=x^2$とか決まった関数について，x に種々の値を与えたとき，y がどんな値をとるか，グラフではどういう形をとるかという考察が中心になる。」[7]と指摘している。中学校での実際の関数指導に目を向けると，関数の特徴を理解することや表・グラフ・式で表現することを強調した学習指導が依然として見られる状況がある。国宗(2000)[8]も同様の指摘をしており，具体的事象の中から，関数関係にある２つの数量を見いだす能力を伸ばすことや関数的な見方・考え方をいろいろな問題の解決に活用する能力を伸ばすことをねらいとする指導を重視する必要性を主張している。

布川（2010）は，関数の学習における認識の飛躍の場として，同一量の関係について表を横に見る見方（加法的，スカラー的見方）から，二量間の関係について表をたてに見る見方（関数的な見方）への変容の場をあげている[9]。そして，共変性（２つの数量の間の依存関係や関連性の観念）に着目し，共変性が感覚的に捉えられた状態（スカラー的見方）と意識化された状態（関数的な見方）との差異が問題であるとし，そこに van Hiele による思考水準論を援用している。それによると，第１水準はある共変性を感覚的に捉えている水準，第２水準は共変性を様々な性質を備えたものとして捉えている水準，第３水準は共変性が性質の一部により定義されるものとして捉えられ，他の性質はその定義から演繹的に導出される水準である。

そして，小学校では第１水準から第２水準への移行をめざして，感覚的に捉えられた共変性の意識化，中学校では第２水準から第３水準への移行をめざして，共変性の諸性質間の関係の意識化が問題になると述べている。

共変性の意識化のためには，学習者が感覚的に捉えているものを意識化するという学習の流れや多面的に数量関係を捉えることが重要である。日野（2009）はスカラー的見方と関数的見方とを関連づけることで多面的な捉え方も可能になるとし，両者の見方を統合することが重要である[10]と述べている。

このことは，同一水準内の思考だけでは共変性の意識化が促されず，それを促すためには一つ上の水準の思考が必要であり，この上と下，両方向からの統合が共変性の意識化に有効に機

能することを主張しているものである。

表１は，現段階までの関数の観念の育成における必要な視点及び期待される子どもの姿をまとめた指導構想である。

表１　小中一貫の関数の観念の育成における指導構想

段階	学年	必要な視点	期待される子どもの姿
第1水準↓第2水準	小1，2	○共変性に感覚的に関わる	・２量を対応づけたり，数を順序よく並べたりすることで，２量の関係に着目できるようにする。
	小3，4	○感覚的に捉えられた共変性の意識化（感覚的に捉えられた数量関係の様々な性質を見いだす）	・対応する数量を見出し，数量の関係を，表を用いて調べることで，対応のきまりを帰納的に見つけることができる。
	小5，6	○共変性の意識化（表によって捉えられた数量関係の様々な諸性質を帰納的に見いだす）	・変わる数量と変わらない数量を区別し，変わる数量を変化させて表から対応のきまりを見つけ，そのきまりを使って問題を解決することができる。
第2水準↓第3水準	中1	○共変性の諸性質間の関係の意識化（数量関係を式化し，定義し，関数の諸性質をゆるやかに関係づける）	・加法的見方やスカラー的見方と関数的見方の双方を適宜利用し，多面的に数量関係を捉えることができる。
	中2		
	中3		・既知の変量や関数関係を活用して，未知の変量の変化を予測することができる。
第3水準	高校	○共変性が性質の一部により定義されるものとして捉えられ，他の性質はその定義から演繹的に導出される	

4　研究の目的

本来，関数的な見方や考え方は精神的な側面と方法的な側面の両方を合わせ持ったものである。これまでも関数的な見方や考え方をテーマにした学習指導は数多く行われてきているが，どちらかというと方法的な側面に焦点をあてた学習指導に偏っていたのではないだろうか。つまり，関数的な見方や考え方を形式的に教えるだけでは実感を伴わないため，関数的な見方や考え方を積極的に活用していこうとする精神的態度は高まらず，生徒に獲得させるところまでには至らない。このような状況を改善していくためには，関数的な見方や考え方を積極的に意識させたり，そのよさに気づかせるなど，もう一方の側面である精神的な側面を重視していくことが必要である。ここで大切なのは，問題を解決しようとするときに子どもが自分の力で個性的に働きかけることができるようにすることである。

筆者らは，精神的な側面をあえて強調するために，関数的な見方や考え方を用いて事象を捉えていこうとする精神的態度を「関数の観念」と定義し，研究主題として掲げた。そして，小中９年間を通じて，様々な領域において，関数の観念を育成していく指導は，学習指導要領のめざす関数指導の一層の充実・発展を図る指導になるものと考える。

そこで，本研究の第１年次では，「数と式」領域においてこれまで関数的な視点では扱ってこなかった内容や教材を関数の視点で捉え直し，関数的な見方や考え方に目を向けさせ，子どもに意識させることができるような授業実践を行っていき，成果と課題をまとめていくことを目的とする。これらの実践を蓄積していき，関数の観念の育成を図る小中接続のカリキュラムを開発していきたい。

5 授業設計の基本方針と教材研究

(1) 対象生徒

授業対象生徒は広島大学附属三原中学校９年生１クラス40名である。実施時期は平成25年11月，単元は「２次方程式の活用」で，面積の最大値を考察する学習課題を設定した。

(2) 生徒の実態

関数に関する調査(平成 25 年８月実施)を行った。関数の意味を記述で問うたところ，「x の値を１つ決めれば y の値がただ１つ決まる」と答えている生徒の割合は20%，比例，１次関数といった関数名や y＝ax＋b といった関数を表す式など個別具体例をあげているもの 25%，無回答 20%であった。関数の学習を積み重ねてきている９年生においても，関数に対する理解不足の状況が明らかとなり，関数理解を促すための学習指導の改善・工夫が必要である。

(3) 授業設計の視点

通常，２次方程式の活用は２次方程式の解き方の学習に続けて行うが，本単元は関数的な見方や考え方を発揮して問題解決を図ることを通して，関数の観念を伸ばしていくことを強く意図しているため，関数 $y=ax^2$ を学習した後に設定し，方程式と関数を統合的に扱えるようにした。教科書にある問題の条件を変えて提示することで，現象を静的に見る考え方だけでなく，表やグラフを利用して動的に見る考え方の必然性を感じさせるようにする。また，式，表，グラフ等を相互に関連づけてみることによって多面的に数量関係を捉えられるようにしていく。こうした考え方のよさに気づかせ，関数の観念の育成を図っていくとともに，高校で学習する２次関数の素地としていきたい。

第１次　数に関する問題　（１時間）
第２次　動点に関する問題（２時間）
第３次　図形に関する問題（３時間）
実験授業２／３

(4) 評価材

共変性の諸性質間の関係の意識化がどの程度なされたかの変容を具体的に示すための評価材として実験授業前，授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。

○　パフォーマンス課題

下の図１のように，１辺の長さが１cm の正方形の紙を，階段の形に何段か積んでいく。「x 段のときの面積 $y\text{cm}^2$」は，㋐「y は x に比例する」，㋑「y は x に反比例する」，㋒「y は x の１次関数」，㋓「いずれでもない」のどれですか。また，そのように判断した理由を説明しなさい。

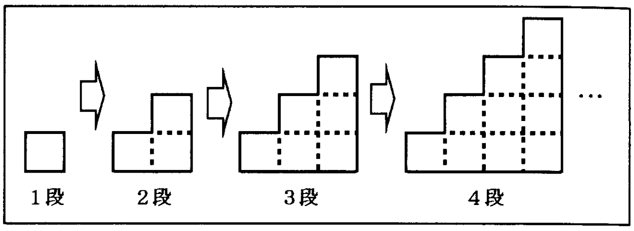

図１　パフォーマンス課題

○　評価規準

関数的な見方や考え方を用いて考察することを通して，事象における変化の特徴や２変数の関係を捉えることができる。

○　ルーブリック

表２は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。評価基準Ⅳ以上の段階で評価規準を達成したものとみなす。

表２　ルーブリック

	評価基準
Ⅴ	式により対応関係を表すことができ，その関係が２次関数であることや，その関数の諸性質間の関係を考察することができる。
Ⅳ	表やグラフで変化の特徴を捉えたり，既習の式を基にどのような関数か考察することができる。
Ⅲ	変化の様子を表やグラフに表すことができている。
Ⅱ	変化の様子を表やグラフで表せていない。
Ⅰ	変化の様子を調べようとしていない。無回答。

6　実験授業の実際

第３次第１時では，２次方程式の活用問題として次の問題１に取り組ませた。

問題１　たて 16m，横 25mの長方形の土地に同じ幅の道をつけて残りを畑にする。畑の面積を 360m²にするには道幅を何mにすればよいか。

多くの生徒は道幅を xmとし，方程式の解法手順（現象を静的にみる）によって解決を図っていた。第２時では，数量を変化させて考える関数の考え（現象を動的にみる）が自然と現れるように条件を変えた問題２に取り組ませた。

問題２　たて 16m，横 25mの長方形の土地に縦と横に同じ幅１mの道をつくる。ただしAは正方形とする。

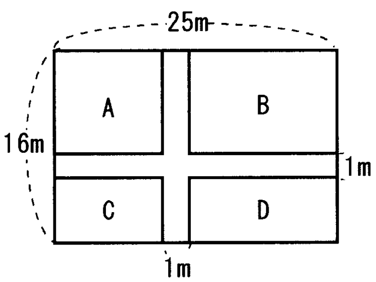

図２　問題２の図

問題を提示し，Aの１辺の長さを変えたときに変化する数量，変化しない数量について考えさせた。変化する数量については，A，B，C，Dの面積，A，Dの周りの長さがあげられた。また，変化しない数量については，道の面積，A，B，C，Dの面積の和，全体の面積があげられた。この中から，Aの１辺の長さと依存関係にあるBの面積に焦点をあてて，どのように変化しているか考えさせた。「１辺の長さを増やしていくと，面積は増え続けるのか。」と問い，変化の様子をイメージさせた。面積は最初は増加するが，やがて減少していくことを概ね生徒が予想できたところで，パソコンソフト Geogebra を使って変化の様子を確認した。生徒はスクリーンを見ながら，だんだん増加し，やがてだんだん減少していくことを確認することができた。また，変化の様子が変わる時点で面積が最大になることにも気づき，それらを明らかにしていくことが課題となった。そこで，「Aの１辺の長さを xm，Bの面積を y m²　としてxを１ずつ変化させたときの面積yの変化を調べよう。」と問うと，生徒達は表やグラフを活用して変化の様子を調べていった。

x(cm)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
y(cm²)	23	44	63	80	95	108	119	128	135	140	143	144	143	140	135

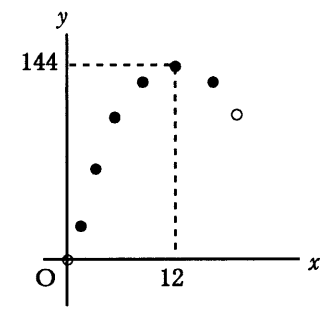

図３　変化の様子を捉えた表と図

表やグラフで表した後，変化の様子について考察させていった。以下，生徒から出された気づきである。

ア　yはxの関数である。
イ　x＜12 で増加し，x＞12 で減少している。
ウ　x＝12 のとき，面積が最大になっている。
エ　面積の最大値は 144 である。
オ　グラフは放物線の一部になっている。

アについては，x の値を１つ決めると y の値がただ１つ決まることを確認した。イについては表やグラフで変化の様子を視覚的に捉えることで確認した。ウ～オについては，表やグラフからそのように読み取ることはできる。しかし，それだけでは x＝12 のとき y＝144 が最大になる保証は得られたことにはならない。また，放物線になるかどうかも判断することはできない。そこで，「ど

うして x＝12 のときが最大といえるのだろうか。」と投げかけた。すると，y を x の式で表した生徒から $y=-x^2+24x$ という式が出された。すると，２次関数の式による定義や２次関数のグラフは放物線になることを学習していた生徒達は，この関数が２次関数であることに気づき，なめらかな曲線で点をつないでいき，オのグラフは放物線の一部になっていることを確認することができた。残るはウとエである。ここで授業者が，関数 $y=ax^2$ で，$a<0$ のとき放物線の頂点（0，0）が最大値になることを想起させ，方針として式を変形して頂点の座標（12，144）がはっきりわかるような形にすればよいことを述べたが本時はここまでとなった。

次時に授業者が誘導する形で平方完成による式変形 $y=-(x-12)^2+144$ を行い，$-(x-12)^2$ が０になるとき，つまり x＝12 のとき y は最大になり，最大値は 144 であることが論理的に示させ，課題を解決することができた。

以下，授業後の生徒の感想の一部である。

○　２次方程式と関数をつなげて考えることができたのでよかった。

○　一見何の関係もなさそうな２数が，式にしてみると関数であることがわかりました。式，表，グラフって素晴らしいと思いました。

○　いろいろな方法で考えるとわかりやすいし，考えたことを総合していくと新たな発見ができることを知ることができた。

○　答にはなぜこうなるのかという根拠があっておもしろいなと思いました。

○　今までやっていた２乗に比例する関数の方が特殊だったのだと痛感しました。

○　２次関数の式から頂点や最大値を求めるやり方を知ることができてよかった。

時間の都合上，関数の諸性質間の関係を十分考察することはできなかったが，式，表，グラフ等を相互に関連づけてみることによって多面的に数量関係を捉えられることに気づいたり，こうした考え方のよさに気づいたりすることができ，関数の観念の育成につながる１つの授業であったように思う。また，高校で学習する２次関数の素地として本時の授業が役に立てば幸いである。

7　ルーブリックに基づく評価

実験授業前後にパフォーマンス課題とルーブリックによる評価を行った。表３は事前事後の変容である。

表３　事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後 V	事後 Ⅳ	事後 Ⅲ	事後 Ⅱ	事後 Ⅰ	事後 計
事前	Ⅴ	1	0	0	0	0	1
事前	Ⅳ	0	3	0	0	0	3
事前	Ⅲ	1	4	3	0	0	8
事前	Ⅱ	1	6	4	5	2	18
事前	Ⅰ	0	2	3	3	2	10
事前	計	3	15	10	8	4	40

評価規準を達成した生徒は，事前が４名だったのに対して事後は 18 名であった。事後の基準Ｖの３名は x と y の関係を $y=x^2/2+x/2$ と式で表すことができ，式の形から直接的に２次関数と判断していた生徒である。事後の基準Ⅳの生徒 15 名は間接的に理由を述べていた生徒である。その内訳は，変化の様子を表に表し，変化の割合の増加の仕方に着目し比例・反比例・１次関数の特徴のどれにもあてはまらないとしていた生徒が 11 名，比例・反比例・１次関数の式に対応する x，y の値を代入してあてはまらないことを確かめていた生徒が４名であった。事後の基準Ⅰの４名はいずれも無回答であったが，この生徒達は学力中～上位層であり，パフォーマンス課題に取り組む時間が不足していたことが原因と考えられる。

以上のような実践の他に，「数と式」領域においてこれまで関数的な視点ではあまり扱ってこなかった内容や教材を関数の視点で捉え直したものが表４である。各単元のどの場面でどのよう

な関数の観念を育成することができるかをまとめたものである。紙面の都合上，中学校分のみをのせておく。

表４　「数と式」領域における関数の観念を育成できる場面

学年	単元名	場面	関数の観念
７年生	正の数と負の数	・(正の数)＋(負の数)の計算方法を学習する際に，足される数は変えないで，足す数を１つずつ小さくすると計算結果がどのように変わるかに着目させ，帰納的に法則に気づく。	・順序よく数量を変化させて考える。 ・変化の特徴を見つける。
	文字式	・正方形の個数がａ個のとき，ストローの本数を求める。 ・１辺がacmの正三角形の周の長さを３ａと表したとき，文字 ａ にいろいろな値を代入して３ａ の意味を確かめる。３ａのａを変えれば図の大きさが変わることや，３ａの３を変えると正ｎ角形の周の長さを表すことがわかる。	・対応のきまりや変化の特徴を見つける。 ・順序よく数量を変化させて考える。
	方程式	・方程式の解の意味を学習する際に，方程式を変数ｘがみたすべき条件と捉え，ｘ＝０，１，２・・・と変化させて代入し，成り立つかどうか確かめる。	・順序よく数量を変化させて考える。 ・きめればきまるという対応の考え。
８年生	式の計算	・文字を用いた式で，数量の関係や法則を捉え説明する。 ・地上の気温 18℃，地上 xkm の気温を y℃としたときの，ｘとｙの関係を等式に表し考察する場面で，ｘの値を決めればｙの値が１つきまるという対応の考えがいえる。	・きめればきまるという対応の考え。
	連立方程式	・２元１次方程式の中の２つの文字はいずれも変数であり，依存関係にあることを捉える。 ・２元１次方程式の解を求める際に，表をつくることによって値の変動や規則性に着目する。	・２つの数量の依存関係に着目して考える。 ・対応のきまりや変化の特徴をみつける。
９年生	式の計算	・整数の性質を調べる際に，いろいろな場合について帰納的な方法で調べ，特徴をみつける。	・対応のきまりや変化の特徴をみつける。
	平方根	・平方根の大小関係を学習する際に，正方形の面積と１辺の長さが依存関係にあることに着目して理解する。	・２つの数量の依存関係に着目して考える。
	２次方程式	・２次方程式の導入段階では，代数的に解くことができないので，式に数値を代入して解を求めたり，表をつくることによって値の変動や規則性を調べて解を求めていく。 ・２次方程式の活用の場面で，最大値や最小値を求める場面を設定し，表，グラフ，式等を活用して求めていく。	・順序よく数量を変化させて考える。 ・対応のきまりや変化の特徴を活用して課題を解決する。

８　考察およびまとめ

本実践研究の成果と課題を整理しておく。

第一の成果は，教科書にある問題の条件を変えたり発展的に考察することで，現象を静的に見る考え方だけでなく，表やグラフを利用して動的に見る考え方の必然性を感じさせることができたことである。「変えればどう変わるか」と事象に積極的に働きかけることは，関数の観念の育成を図る上で大切なことである。問題を解決しようとするときに子どもが自分の力で個性的に働きかけることができるようにしていきたい。

第二に，パソコンソフト GeoGebra を活用したことで，共変性をより意識化させることができたことである。二量間の関係を視覚的に捉えることは生徒の学習を促すことにつながる。共変性の意識化という点から，共変性を動的に捉える環境を用意することも必要である。

第三に，関数の観念を伸ばす指導が「数と式」領域全体を通じて行えたことである。関数の観念が身に付くようにするためには，その見方や考え方に目を向けさせ，意識させることが大切である。これまで関数的な視点ではあまり扱ってこなかった内容や教材を関数の視点で捉え直し，関数的な見方や考え方に目を向けさせ，子どもに意識させることができるような授業実践を今後も積み重ねていく必要がある。

最後に，今後の課題について述べておく。

第一に，共変性の諸性質間の関係の意識化が十分図れなかったことである。パフォーマンス課題の結果を見ても，２量間の関係を捉えるときに表を横に見る見方（加法的，スカラー的見方）をしている生徒が多かった。二量間の関係について表をたてに見る見方（関数的な見方）への変容を促すような場を設定することが必要である。

第二に，各学年や発達段階における関数の観念についての思考水準を整理していき，関数の観念を育成する小中接続のカリキュラムを開発していくことである。関数的な見方や考え方を活用できる素材はたくさんある。図形領域にも多くの素材がある。教師が明らかな意図を持って指導にあたることで，このような考え方にふれさせていきたい。その中で既知の変量や関数関係を活用して，未知の変量の変化を予測するという関数的な見方や考え方のよさ等にも触れていけば，数学の有用性を感得し，実生活の中で関数の観念を積極的に生かしていく態度にもつながっていくであろう。今後も本研究を継続していき，中学校数学科での関数の指導及び児童・生徒の関数理解の困難性を克服していきたい。

＜注および引用文献＞

1)　国立教育政策研究所教育課程研究センター：「平成 25 年度全国学力・学習状況調査解説資料　中学校数学」，2013.

2)　国立教育政策研究所教育課程研究センター：「平成 24 年度全国学力・学習状況調査解説資料　小学校算数」，2012.

3)　国立教育政策研究所教育課程研究センター：「平成 24 年度全国学力・学習状況調査解説資料　中学校数学」，2012.

4)　文部科学省：「小学校学習指導要領解説　算数編」，2008，東洋館出版社.

5)　文部科学省：「中学校学習指導要領解説数学編」，2008，教育出版.

6)　小倉金之助：「現代数学教育の改造」，pp. 88-115. 1928，モナス.

7)　中島健三：「算数・数学教育と数学的な考え方」，p. 179，1981，金子書房.

8)　国宗　進:「関数指導再考」,数学教育 No. 511，pp. 4-9，2000，明治図書.

9)　布川和彦：「数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化」，上越数学教育研究，第 25 号，上越教育大学数学教室，pp. 1-10 ，2010.

10)　日野圭子：「中学校比例の授業での生徒の表・式・グラフの内化の様相－表に焦点をあてて－」，日本数学教育学会第 42 回数学教育論文発表会論文集，pp. 505-510，2009.