広島大学附属三原学校園研究紀要　第３集　2013　pp. 179-186

数　学　科

論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究（２）

―図形の性質間の関係の対象化に焦点をあてて―

妹　尾　進　一

１　はじめに

わが国では，小学校算数科における図形の学習は図形の性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して，中学校数学科における図形の学習は論証をとおして性質間の関係としての命題の真偽性，すなわち正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが，中学校数学科における論証理解の困難性に現れている [1]。

中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究，学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来からも精力的になされている [2]が，今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。

図形指導の体系を研究した前田（1979）は，「性質の理解は，関係の把握と不離一体である。」と述べ，性質理解に対する関係把握の重要性を指摘している。前田が言うところの「関係」には，図形の構成要素間の関係と性質間の関係との両者が含まれていることを付言しておきたい [3]。

松尾（2008）は，新教育課程における中学校数学科の図形領域の指導のあり方について提言するなかで，小学校での図形指導と中学校での図形指導の橋渡しをすることの必要性を指摘している [4]。

また，小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎（2003）は，算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の２期に分け，中学校数学科における移行後期教材として，作図がもつ性格，すなわち命題を構成する手段，経験的認識から論理的認識への媒介者としての性格に着目している [5]。高本・岡崎（2008）も同様である [6]。

筆者ら（2012）は，小学校における移行前期と中学校における移行後期との間のスムーズな接続を図るための小中一貫の図形指導の構想を作成した [7]。まず，移行前期の「図形の性質間の関係性の意識化」とは，活動のレベルで，図形の性質を顕在化し，それらの性質間には順序関係がありそうだということをその活動の中で捉えることである。また，移行後期の「図形の性質間の関係の意識化・対象化」とは，活動のレベルで，図形の性質を顕在化させ，現れた図形の性質に順序関係を見いだし，その関係を考察の対象として捉えることである。そして，論証期の「図形の性質間の関係の対象化」とは，言語や記号のレベルで，図形の性質間に順序関係が埋め込まれた命題そのものを考察の対象として捉えることである。

筆者らはこれまで小中一貫の図形指導の構想を具体化した授業実践を行ってきている [8]。本稿では，論証期にあたる中学校第９学年での実験授業をもとに，生徒の論理的な図形認識の様相について考察することが目的である。

２　中学校数学科における論証指導の在り方

岡崎・岩崎（2003）が提起している図形の学習指導における移行段階の枠組みは van Hiele の図形に関する思考水準の理論を主な論拠として構築されている。本稿における思考水準は主に性質が順序づけられ，ある性質は他の性質から演繹される第３水準である。van Hiele によると，この水

表１　小中一貫の図形指導の構想

段階	学年	必要な視点	期待される子どもの姿
移行前期への接続期	幼稚園～小２	○形遊びや造形 ○性質	・身のまわりにあるものを形として捉える。 ・図形の性質を理解する。
	小３，４	○図形の性質の意識化 （図形からその図形の性質を列挙することができるとともに，特殊な図形の性質からその性質を持っている図形の他の性質を考えたりすることができる）	・図形の性質を具体的な活動のもとで発見する。 ・図形の性質を並列的に捉える。
移行前期	小５,６	○図形の性質間の関係性の意識化 （図形の性質を顕在化する中で，現れた性質と性質の間には関係がありそうだということに気づく）	・作図において，図形の性質の一部を定めることによってできた図形が他の性質を持っていることに気づくことができ，自分のことばで説明しようとする。
移行後期	中１	○図形の性質間の関係の意識化 （図形の性質と性質の間の関係を捉える） ○図形の性質間の関係の対象化 （図形の性質と性質の間の関係を考察の対象とする）	・作図において，図形の性質の一部を定めることによってできた図形の他の性質が成り立つことを，理由をつけて説明することができる。
論証期	中２,３	○図形の性質間の関係の対象化 （仮定，結論が明確になった命題を考察の対象とする）	・条件の一部を変更させて結論を予測し，それが正しいかどうかを証明したり，結論が成り立つ他の条件を考えて証明したりして，新たな性質を見出すことができる。

準では，「演繹のみが行われるのではなく，経験的に確かめたことを演繹的に示したり，演繹的な証明によって経験的事象をよりよく理解することや，第３水準は生徒が幾何学的関係を上手く用いることができるとき達成されている」と述べ，そのことが水準達成の目印であり，かつ次の水準へ上昇するための前提であることが示唆されている。岡崎・岩崎（2003）は，van Hiele の思考水準をもとに，「移行期は子どもが既知の図形の性質を何らかの活動に投入し，その過程で性質を顕在化させるとともに，潜在的な原理として現れる図形の関係を見いだし，意識化する活動のレベルであり，この関係が言語・記号のレベルで形式的に利用されるようになれば論証への接続がなされたと考えることができる」と主張している[9]。

また，山本（1995）は，証明指導において１つの定理を証明したら学習が終わりではなく，それについて発展的に考察を進めたり，別の観点から考察したりする活動の必要性を指摘し，「このような学習活動を実施することによって，生徒自らが予想を立て，果たしてそれが正しいのか，正しいとすればどんな条件が必要かという基本的な動機を持ちながら証明を進めていくことができる」と述べている[10]。

本稿では，論証期における図形の性質間の関係の対象化という観点から以下の２つの機能を含んだ思考ができることが論証理解が深まった状態であると捉えることにした。

（ア）発展的に考察したり，別の観点から考察する活動

（イ）見出した性質の関係が成り立つことを，

言語，記号を用いて形式的に表現する

3　授業設計の基本方針と教材研究

本節では，中学校第９学年の図形指導における図形の性質間の関係の対象化を促す学習指導のあり方について検討する。

(1) 対象生徒

授業対象生徒は広島大学附属三原中学校９年生1クラス 40 名である。実施時期は平成 24 年 11 月，単元は「円」で，接弦定理を考える学習課題を設定した。

(2) 学習前の事前調査の実態

生徒達は，小学校５年生から中学校８年生までの間，作図教材を用いて，作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。平成 24 年度全国学力状況調査[11]（平成24年４月実施対象生徒９年生80名）によると，２つの直線が垂直に交わることを三角形の合同条件を利用して証明する問題（Ｂ問題，記述式）の正答率は 93.6%（全国 46.8%）であり，論理的図形認識を促す論証指導の成果が現れていると考える。

しかし，この問題はあくまで既習事項の定着状況の確認であり，本研究の目的である論証理解を一層深めていくためには，ある図形の性質の関係を証明し，そこから発展的に考察したり，別の観点から考察するような単元授業を設計していく必要がある。

(3) 単元授業設計の視点

清水(1995)は，発展的に考察していくポイントとして，「子どもに論証の必要性や必然性を明確にするために，事実の推測・発見を伴う創造的・生産的な活動の過程に論証を位置づけることが大切である。」[12] と述べている。また，「発展的」という言葉から初めから難しそうだと抵抗感を与えないことも大切である。そこで教科書にある問題を積極的に活用し，これまで学習した図形の性質をもとに円に関する様々な性質を考察したり，それを活用することで新たな円の性質が発見できるように単元を設計した。

第１次　円周角の定理（４時間）
第２次　円周角の定理の逆（１時間）
第３次　円周角の定理の活用（５時間）

実験授業４／５

(4) 評価材

本単元の学習目標（望まれている結果）を生徒がどの程度達成したのか，つまり，「図形の性質間の関係の対象化」がどの程度なされたかの変容を具体的に示すための評価材（承認される証拠）として実験授業前，実験授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。

○　パフォーマンス課題

（実験授業前）

図１で，円Ｏの円周上に点Ｑをとり，QA，QB をひく。図の中から∠AQB に等しい角を見つけなさい。また，見つけた角が等しいことを証明しなさい。

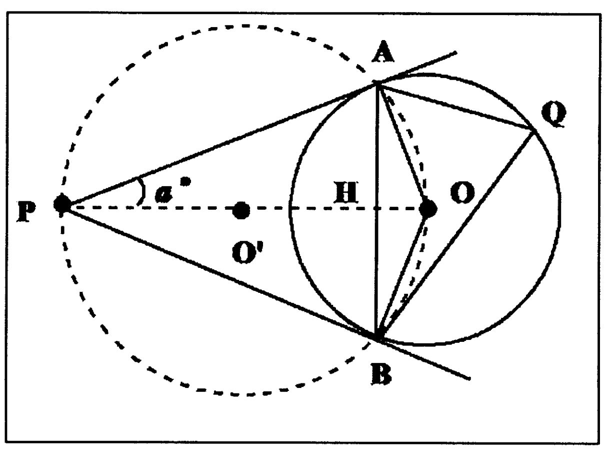

図１　事前のパフォーマンス課題

（実験授業後）

図２で，点Ｑを円周上で弧 AB まで動かす。∠APB に等しい角を見つけなさい。また，見つけた角が等しいことを証明しなさい。

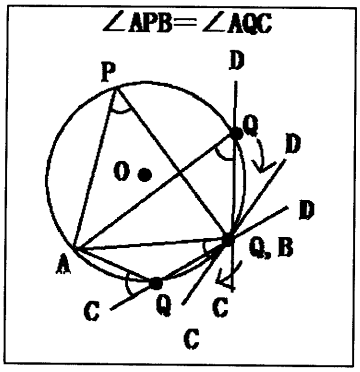

図２　事後のパフォーマンス課題

○　評価規準

図の中の等しい角を見つけ，見つけた角が等しいことを既習事項を活用して証明することができる。

○　ルーブリック

表２は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。評価基準Ⅳ以上の段階で評価規準を達成したものとみなす。

表２　ルーブリック

	評価基準
Ⅴ	等しい角をみつけ，根拠をもとに，ことばや記号を使って筋道を立てて証明することができる。
Ⅳ	等しい角をみつけ，記述や表現が不十分なところもあるが，ことばや記号を使って説明しており，証明の筋道は正しいと認められるもの。
Ⅲ	等しい角をみつけており，ことばや記号を使って説明しようとしているが，条件不足，条件の誤りなどがあり，証明の筋道が不明確である。
Ⅱ	等しい角をみつけているだけである。
Ⅰ	等しい角をみつけることができない。

4　実験授業の実際 [13)]

本節では，第３次の授業の実際について述べる。

第１時では，既習事項の確認として円周上の１点で接する接線の作図から始めた。ほとんどの生徒は，円の接線は接点を通る半径と垂直であることを利用して作図ができた。次に，「円周上の１点」を「円外の１点」と条件を変え，円外の１点を通る円の接線の作図を考えさせた。この作図は，「円の接線は接点を通る半径に垂直である」こと及び「半円の弧に対する円周角は90°である」ことの２つの性質を利用して作図するものである。生徒は思考錯誤を繰り返していたが，なかなか作図法が思いつかない様子であった。そこで授業者がヒントとして完成イメージ図を板書すると，生徒達はこの２つの性質に気づき，その性質を利用して作図を完成させることができた。ここで，この図に関して分かることを考えさせた。生徒からは，次のようなものが出された。

・∠APO＝∠BPO　　・PA＝PB
・△PAO≡△PBO　　・△PAB は二等辺三角形

これらはすべて△PAO≡△PBO が証明できれば容易に導かれる。これまでも作図してそれが正しいことを証明するという過程を経てきているので自然な流れで証明につなげることができた。また，この証明は三角形の合同条件を用いた基本的な証明であるためほぼ全員が証明できていた。その後，「円外の１点から，その円にひいた２つの接線の長さは等しい」ことを確認した。

第２時は，第１時で用いた図を利用して進めていった。

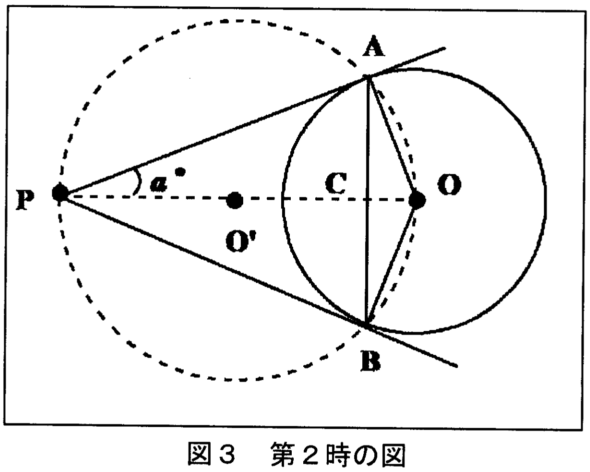

図３　第２時の図

図の中で，∠APO（∠BPO）＝a°とすると，a°と等しい角を見つけ証明するという課題である。ここでは，大きく分けて３つの考えが発表された。

生徒の考え方１　三角形の内角の和を利用

△PAO において
$\angle AOP = 90° - a°$ ①
△AOC において $\angle ACO = 90°$ ②
①，②より △AOC で
$\angle OAC = 180° - 90° - (90° - a)$
$= a°$
△OAB は二等辺三角形だから $\angle OAC = \angle OBC = a°$

生徒の考え方２　相似を利用

△APO と △CAO において，
仮定から，
$\angle OAP = \angle OCA = 90°$ ①
また，$\angle AOP = \angle COA$ ②
①②より，２組の角がそれぞれ等しいので，△APO ∽ △CAO
よって，$\angle APO = \angle OAC = a$

生徒の考え方３　円周角を利用

OB に対する円周角はすべて等しいので
$\angle CAO = \angle BPO = a°$
同様にして．$\angle CBO = \angle APO = a°$
よって．$\angle CAO = \angle CBO = a°$

考え方３に気づいている生徒はわずかであった。考え方１，考え方２を利用している生徒は，考え方３の発表を聞いて「円周角とは気づかなかった。」「そんなに簡単に証明できるとは･･･」と驚いている様子であった。授業後の生徒の感想には次のような記述が見られた。

○　証明をするのにも３つのやり方があっておもしろかった。
○　一番やりやすい方法でするのがよいと思った。
○　円周角の定理が一番簡単だと思った。できるだけ簡潔に証明すれば自分もわかりやすいし，人にもわかってもらいやすいと思った。
○　図形の見方を少し変えるだけで，簡単にできるんだと思った。いろいろな見方がないか一度探してから証明しようと思う。

多様な見方・考え方の大切さや簡潔に表現することの大切さが実感された授業であった。

第３時も引き続き同じ図を利用して，次のような問いを投げかけた。これは，事前のパフォーマンス課題を兼ねている。

問題　円Ｏの円周上に点Ｑをとり，QA，QB をひく。この図の中から∠AQB に等しい角をみつけなさい。また，見つけた角が等しいことを証明しなさい。

生徒たちは，たちまち∠AOP，∠BOP を発見した。

生徒の考え方４

前回の授業で証明ずみ
△APO ≡ △BPO より
$\angle AOP = \angle BOP = 90° - a°$
よって $\angle AOB = 180° - 2a°$
円Ｏにおいて円周角の定理より
$\angle AQB = \dfrac{\angle AOB}{2} = \dfrac{180° - 2a°}{2} = 90° - a°$
よって $\angle AQB = \angle AOP = \angle BOP$

他にもないか問うと，しばらく考えていたが∠ABP，∠BAP を発見し証明した。

生徒の考え方５

弧 AO に対する円周角なので
$\angle APO = \angle ABO = a°$
AO と BO は半径なので △AOB は二等辺三角形である。
よって　$\angle APO = \angle BAO = a°$ …①
PA，PB は円の接線なので PA と OA，PB と OB は垂直に交わっている。…②
①，②より $\angle PAH = \angle PBH = 90° - a°$ …③
$\angle AOB = 180° - (\angle OAB + \angle OBA)$
$= 180° - 2a°$
$= 2(90° - a°)$
∠AQB は ∠AOB の $\frac{1}{2}$ 倍なので
$\angle AQB = 2(90° - a°) \times \frac{1}{2}$
$= 90° - a°$ …④
③，④より $\angle AQB = \angle PAH = \angle PBH$　　∠PAH，∠PBH

この発見は，すでに接弦定理の証明になって

いるわけであるが，この時点で生徒はそのことにまだ気づいておらず，改めて接弦定理に必要な部分だけ取り出して証明を考えさせていく。これまでの発見を手がかりに，補助線をひいて証明に取り組んでいた。全体で証明を確認後，接弦定理としてまとめた。授業の最後には，円周角の定理と接弦定理との関連性を捉えることができるよう，パワーポイントを使って点を動かしていった。点Ｑが点Ｂと一致した瞬間，「おおっ！」と言った声があちこちからあがり，接弦定理は円周角の定理の特別な場合と見ることができることに生徒は驚きや感動を覚えているようであった。以下，授業後の生徒の感想である。

○　接線から弦をひき，その線を結んでいくと同じ角ができることに驚きました。すごいですね。数学って。おもしろいことがわかるんですね。
○　最後の移動していくのはすごく感動しました。なるほど，少し考え方を変えるだけでそうともとれるのか。
○　最後の図は本当におお！と思いました。
○　スライドを見てやっと理解することができた。とても不思議だなと思う。∠ACB と∠ABD が等しいならば，∠CAB と∠CBE も等しいと思う。
○　図の形が変わっても性質はそのまま残るのだなあと思いました。

円の不思議な性質に感動を覚え，性質間の関係に触れることができた授業であった。

5　ルーブリックに基づく評価

実験授業後にパフォーマンス課題とルーブリックによる評価を行った。評価規準を達成した生徒 18 名であった。基準Ⅳの３名の生徒は，証明の記述に多少の不備はあるものの，証明の筋道は正しいと認められた生徒である。

表３　事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後 V	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	V	3	1	0	1	0	5
	Ⅳ	5	1	2	2	0	10
	Ⅲ	5	0	3	4	0	12
	Ⅱ	2	1	5	1	0	9
	Ⅰ	0	0	0	0	0	0
	計	15	3	10	8	0	36

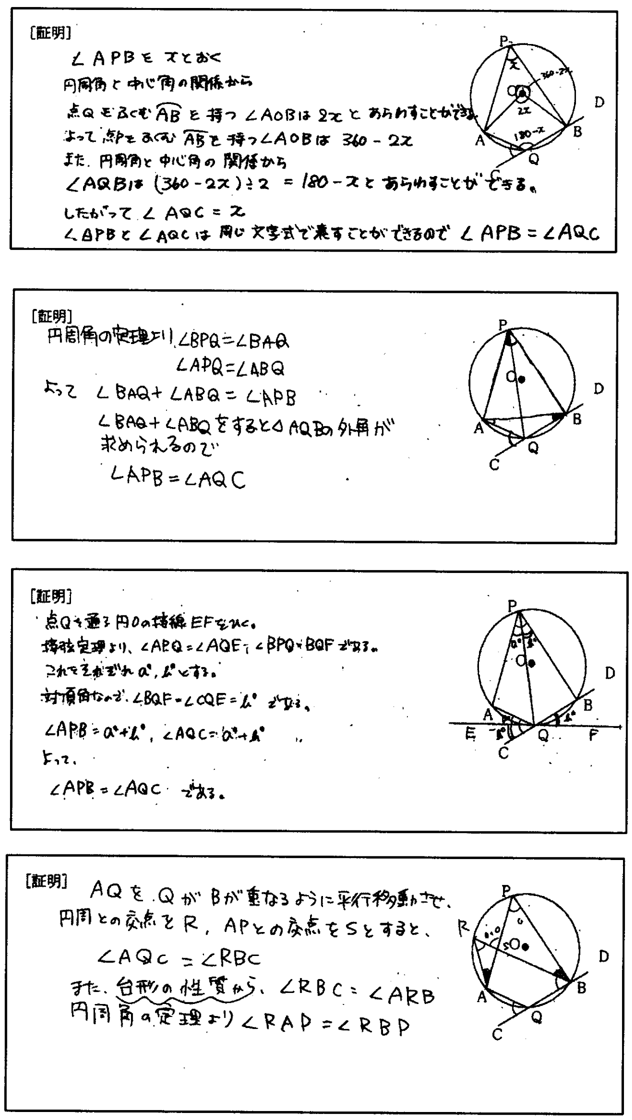

図４　生徒の証明

計が 36 名であるのは，事前または事後調査の両方もしくはどちらかを受けていない生徒がいるためである。基準Ｖになった生徒の考え方の

内訳は，円周角の関係から三角形の内角と外角の関係を用いた者が７人，円周角と中心角の関係を用いた者が４人，接弦定理を用いた者が２人，その他２人という結果であった。基準Ⅳも基準Ｖと同様の考え方によるものであるが，記述に多少の不備が見られた。基準Ⅲの 10 名は，根拠の誤りや条件不足などがあり筋道は通っていないが，どの生徒も形式化による記述はみられていた。なお，事前Ｖから事後Ⅱになった１名と事前Ⅳから事後Ⅱになった２名は∠APB と∠AQC の関係を正しく捉えられていないことによる誤答である。また，事前，事後とも基準Ｉの生徒はいなかった。

６　考察およびまとめ

本実践研究の成果と課題を整理しておく。

第一の成果は，教科書にある問題の条件を変えたり発展的に考察したりすることで，生徒が証明の必要性を感じ，意欲的に証明に取り組んだことである。接弦定理の導入では，角の大きさを直接測って気づかせたり，点を動かして気づかせたりする問題がよく取り上げられているが，初めから結論ありきの感は否めない。そこで，円外の点から円への接線の引き方を基に，図の中の等しい角に注目させていく授業展開にすることで，場面のつながりが生まれ，それぞれの場面が次の場面に生きるような授業展開が構成される。そのことによって性質間の関係が生じ生徒自らが性質を発見していく授業をすることができ，証明に取り組もうとする意欲が高まっている。

第二の成果は，別の観点から考察する活動を取り入れたことにより，１つの命題に対して多様な証明方法が見られたことである。事後評価問題では４種類の証明方法が出されたが，自分が気づかなかった他者の様々な証明方法に触れることは，図形に対する見方・考え方が一層深まり，豊かな図形認識につながるものである。このことは単元後の生徒の感想記述からも伺うことができる。

○　１つの証明問題でも，いろんな証明の仕方があって，それぞれの証明の仕方は違っても同じ結論にたどりつくのがスゴイと思いました。習っていない定理でも今まで学習したことを使って導くことができました。おもしろいと思いました。

○　円の定理を知るためにいくつもの証明をしました。そのおかげで考え方の視野が広がり，色んなところに目を向けられるようになった。

○　円周角の定理の見方を変えれば接弦定理につながるように見方を変えれば新しいものが見えること。

最後に，今後の課題について述べておく。

第一に，事前事後のルーブリックの結果を見ると，評価基準Ⅳ以上を達成した生徒は 36 名中 18 名と半数に留まっている。上位層の生徒に対しては論理的な図形認識を高めることができた一方で，中間層や下位層の生徒の伸びがまだ十分ではなかった。そういった生徒に対する支援を考慮した授業作りを行う必要がある。

第二に，証明を読んで新たな性質を見いだす活動を取り入れていくことである。証明を読むことを通して，論理的な図形認識が一層高まっていき，そのことが他の領域にも波及していけば，相対的に生徒の論理的な認識の高まりが期待できるであろう。多様な見方・考え方に触れることができるような教材を開発し，生徒の論理的な図形認識を高めていきたい。

以上のことから，小中一貫のカリキュラムのもとで，発達段階に即した教材開発を行ってきたことは，中学校での論証理解の困難性を克服し，論理的な図形認識を高めるために概ね有効であったと考える。これからも生徒に学習する内容のおもしろさやよさを感じ取らせることができるような教材を開発し，意欲を高めながら，論証理解の困難性を克服していきたい。

＜注および引用文献＞

1) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌 vol. 80, pp. 3-27, 2003.

2) 例えば，以下のような研究に見られる。

國宗進：「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」，数学教育学論究，vol. 47, 48, pp. 3-23, 1987.

小関熙純：「図形の論証指導」, 1987, 明治図書.

3) 前田隆一：「算数教育論－図形指導を中心として－」，p. 127, pp. 144-145, 1979, 金子書房.

4) 松尾七重：「新教育課程における図形指導の実現に向けて－小学校算数科図形領域の指導との連携を考えて－」，日本数学教育学会誌，vol. 90, pp. 3-13, 2008.

5) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌，vol. 80, pp. 3-27, 2003.

6) 高本誠二郎・岡崎正和：「図形の論理的位置づけの初期の様相について－論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験（1）－」, 全国数学教育学会誌, vol. 14, pp. 41-50, 2008.

7) 川﨑正盛・村上良太・妹尾進一・木村惠子・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・松浦武人・植田敦三：「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（2）－図形の性質の意識化に焦点を当てて－」，全国数学教育学会誌，vol. 17, pp. 61-71, 2011.

8) 例えば以下のような研究に見られる。

妹尾進一：「論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究－中学校第７学年における論証への移行を促す実践的研究－」，広島大学附属三原学校園研究紀要，pp. 103-122，2011．

妹尾進一・村上良太・鈴木昌二・川﨑正盛・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・木村惠子・松浦武人・植田敦三(2012)，「論理的な図形認識を促す算数･数学科カリキュラムの開発 (3) －４年間の追跡による生徒の論理的な図形認識の変容についての考察－」，全国数学教育学会誌，第 19 巻，第 1 号 pp. 89-102.

9) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌，vol. 80, pp. 3-27, 2003.

10) 山本信也:『論証による発展的な考察の指導のポイント』，中学校数学科教育実践講座 CRECER, 第 6 巻, pp. 288-289, ニチブン, 1995.

11) 国立教育政策研究所教育課程研究センター：『平成 24 年度 全国学力・学習状況調査解説資料 中学校数学』，2012.

12) 清水静海：『論証』，中学校数学科教育実践講座 CRECER，第 6 巻，pp. 204-209，ニチブン，1995.

13) 玉置崇・鈴木良隆・八槙直幸・永井聡・鈴木登美雄：「数学の授業を感動の連続に」，pp. 138-143，1996，明治図書.