

算 数 科

図形の「性質間の関係の意識化」を促す算数科授業の開発

—小学校第6学年「対称な図形」における実践を通して—

村 上 良 太

1 はじめに

わが国の中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究、学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来から精力的になされているが¹⁾、今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。

生徒にとっての論証理解の困難性は、単に中学校数学科における課題であるというだけではなく、小学校算数科における学習指導上の課題でもある。

ここで、論証理解について考えていくために改めて図形指導における小学校算数科と中学校数学科の違いを整理してみたい。小学校算数科における図形学習では、実際に図形を観察、構成、弁別したりといった直観的・操作的な活動を通して、図形の性質を発見することが主な内容である。一方、中学校数学科における図形学習は論証を通して性質と性質の間関係を考察の対象とすることが主となる。岡崎・岩崎(2003)は、このような小学校算数科と中学校数学科の学習内容の違いに着目し、その違いが中学校数学科における論証理解を困難にしていると述べている²⁾。以上のように、小中9年間を通して論証理解をながめると、論証理解の要件として、少なくとも図形の性質を明らかにすることと、図形の性質と性質の間関係の意識化・考察の対象化をあげることができる³⁾。ただし、ここで留意したいのは、図形の性質を明らかにすることは小学校算数科の範囲であり、性質間の関係の認識は中学校数学科の範囲に属すると区分してはならないことである。図形指導の体系を研究した前田(1979)は、「性質の理解は、関係の把握と不離一体である。」⁴⁾と述べ、性質

理解に対する関係把握の重要性を指摘している。前田(1978)がいうところの「関係」には、図形の構成要素間関係と性質間関係との両者が含まれていることを付言しておきたい⁵⁾。

松尾(2008)は、新教育課程における中学校数学科の図形領域の指導のあり方について提言するなかで、小学校での図形指導と中学校での図形指導の橋渡しをすることの必要性を指摘している⁶⁾。

また、小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的、実践的研究を行った岡崎・岩崎(2003)は、算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と、数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の2期に移行期を分け、移行後期に焦点を当てている⁷⁾。高本・岡崎(2008)も同様である⁸⁾。

このように、先行研究からも小学校における算数としての図形認識から数学の図形認識へと移行を促す、押し上げ教材の開発の必要性と小学校算数科における図形指導の再構成が今日求められていることがわかる。

筆者ら研究グループは、これまで岡崎・岩崎(2003)が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき、「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す教材として「作図」が機能するかどうかを小学校5年の実践を通して検討し、「移行前期」教材としての「作図」の有効性を例証する研究を行ってきた⁹⁾。こうした実践研究の成果と課題をもとに研究グループでは小中9カ年の図形指導(平面図形)のカリキュラムの構想および、発達段階における図形指導に必要な視点および、めざす子ども像(表

1) を明らかにした¹⁰⁾。

本研究では、上述のカリキュラムをもとに新たに「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す作図教材をとりあげ、その実験授業の有効性を検討することを目的とする。その際、作図教材は教科書教材として採用されているもので、小学校から中学校にかけて繰り返し扱うことのできる教材を選びたいと考え、「角の二等分線」の

作図を選択した。

なお、本研究で述べている「図形の性質間の関係の意識化」とは、「ある性質によって図形が決まる」という認識をもつこと、および「その性質が他の性質を導く役割をもっている」という図形認識をもち、「性質間の順序性」を意識することと捉えている。

表1 小中一貫の図形指導に必要な視点および、めざす子ども像

段階	学年	必要な視点	期待される子どもの姿
移行前期 への接続 期	幼稚園 ～小2	○ 形遊びや造形 ○ 性質	・身のまわりにあるものを形として捉える。 ・図形の性質を理解する。
	小3,4	○ 図形の性質の意識化 (図形からその図形の性質を列挙することができるとともに、特殊な図形の性質からその性質を持っている図形の他の性質を考えたりすることができる)	・図形の性質を具体的な活動のもとで発見する。 ・図形の性質を並列的に捉える。
移行前期	小5,6	○ 図形の性質間の関係性の意識化 (図形の性質を顕在化の中で、現れた性質と性質の間には関係がありそうだということに気づく)	・作図において、図形の性質の一部を定めることによってできた図形が他の性質を持っていることに気づくことができ、自分のことばで説明しようとする。
移行後期	中1	○ 図形の性質間の関係の意識化 (図形の性質と性質間の関係を捉える) ○ 図形の性質間の関係の対象化 (図形の性質と性質間の関係を考察の対象とする)	・作図において、図形の性質の一部を定めることによってできた図形の他の性質が成り立つことを、理由をつけて説明することができる。
論証期	中2,3	○ 図形の性質間の関係の対象化 (仮定、結論が明確になった命題を考察の対象とする)	・条件の一部を変更させて結論を予測し、それが正しいかどうかを証明したり、結論が成り立つ他の条件を考えて証明したりして、新たな性質を見出すことができる。

2 研究の方法

(1) 対象児

広島大学附属三原小学校の6年生 37名を対象とした。

(2) 授業実施時期

平成24年11月

(3) 単元設計

実験授業は、第6学年の「対称な図形」の単元学習の発展的内容として位置づけて行った。単元

時間は全 11 時間で、単元計画は以下のようにした。なお、実験授業は第3次の3時間目である。

第1次	線対称な図形・・・	3時間
第2次	点対称な図形・・・	4時間
第3次	多角形と対称・・・	4時間
(実験授業 3/4)		

本単元は、既習の基本的な平面図形を中心に、「対称性」という新しい観点で見直し、図形に対する豊かな感覚を身につけることをねらいとする学習単元である。具体的には、「対称の軸」「対称の中心」「対応する点、辺、角」など、対称の特徴を理解していく算数的活動を展開する。さらに、既習の「ひし形」「たこ形」の対角線が、「対称の軸」であるという性質を活用して論理的に説明できる作図教材（角の二等分線）を学習することで、図形の性質と性質の間にある関係性を意識させ、中学校論証指導につながる論理的な図形認識への素地を育みたい（実験授業）。上記の作図教材は、中学1年そして2年でも扱う。その意味では、同素材の作図教材を用いたスパイラルな学習と位置づけたい。

(4) 評価方法

本研究では、評価の視点・方法として Wiggins & McTighe (2005) の提唱する「逆向きの設計 (Backward Design)」の発想¹¹⁾に立ち、パフォーマンス課題およびルーブリックを作成し、評価を

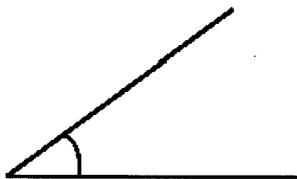
行う。評価時期は、第Ⅲ次で既習の図形（ひし形、たこ形など）の対称性について学習した直後を事前とし、実験授業2日後を事後とした。

実験授業の学習目標を「角の二等分線を作図し、図を確定する根拠を考える活動を通して、既習の図形の定義や性質を活用して説明できるとともに、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定できるという性質間の関係性を意識する」とした。

また、評価規準を「角の二等分線の間において、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定することを、『ひし形』もしくは『たこ形』の辺の性質や、対称性の性質や合同条件などを活用して論理的に説明しようとしている」とした。

図1は、子どもに事前事後に実施したパフォーマンス課題である。表1は、パフォーマンス課題に対するルーブリックである。表2中のパフォーマンス事例は、子どもが実際にパフォーマンス課題に取り組んだ際のパフォーマンスを想定し、各評価基準の記述語を具体的に示すパフォーマンスを事例として添付したものである。また、ここでは評価基準Ⅳの段階で評価規準を達成したと見なす。

①下図の角の角度を半分にする直線をかきましょう。

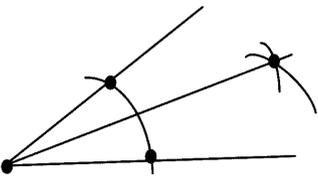


②どのように直線を作図したのか、できるだけ詳しく説明しましょう。

③作図した直線が、どうして角度の半分であるといえるのか、説明しましょう。

図1 パフォーマンス課題

表2 ルーブリック

	評価基準	パフォーマンス事例
V	<p>角の二等分線の作図において、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定することを、「ひし形」もしくは「たこ形」の定義や性質を活用して論理的に説明することができる。</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p>(ひし形の場合)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・辺アイ＝辺アエ＝辺イウ＝辺エウであるため、四角形アイウエは「ひし形」です。ひし形は線対称な図形で、直線アウはひし形の対称の軸にあたります。線対称は、対応する角がそれぞれ等しいため、角イアウ＝角エアウとなり、直線アウは角を半分にした直線であることがわかります。 ・三角形アイウと三角形アエウは、三辺が等しいので、合同です。そのため角イアウ＝角エアウとなり、直線アウは角を半分にした直線であることがわかります。 <p>(4辺が等しいことから「ひし形」であること、および「ひし形」の対称性と合同をもとに述べていること)</p>
IV	<p>角の二等分線の作図において、図形の性質の一部を定めることによって図形が確定することを、「ひし形」もしくは「たこ形」の定義や性質を活用して論理的に説明しようとしている。</p>	<p>(ひし形の場合)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・辺アイ＝辺アエ＝辺イウ＝辺エウであるため、四角形アイウエは「ひし形」です。ひし形は線対称な図形で、直線アウはひし形の対称の軸にあたります。線対称は、対応する角がそれぞれ等しいため、角イアウ＝角エアウとなり、直線アウは角を半分にした直線であることがわかります。 <p>(4辺が等しいことから「ひし形」であること、および「ひし形」の対称性をもとに述べているが、合同条件については触れていない。)</p>
III	<p>角の二等分線の作図はできているが、「ひし形」もしくは「たこ形」の辺の性質や、対称性の性質などを活用して論理的に説明することができていない。</p>	<p>(図は上記と同じ)</p> <ul style="list-style-type: none"> ・四角形アイウエは「ひし形」です。(「ひし形」である理由を説明していない) ひし形は線対称な図形で、直線アウはひし形の対称の軸にあたります。線対称は、対応する角がそれぞれ等しいため、角イアウ＝角エアウとなり、直線アウは角を半分にした直線であることがわかります。 <p>(4辺が等しいことから「ひし形」であること、および「ひし形」が線対称な図形であり、直線アウを対称の軸としたとき対応する角が等しくなること、について、どちらか一方でも根拠の説明が不十分な場合。)</p>

II	分度器を使って作図し、その手順をもとに説明することができる。	・分度器で角度を測り、その角度の半分の角度を求めて直線をひいたから。
I	正確に作図することができておらず、作図の根拠を説明することができていない。	・（角の二等分を感覚的にとり）半分に見えるから ・無答

3 実験授業の実際

(1) 論理的な説明を促す学習課題の設定

角の二等分線を作図するように問題提示をすると、分度器を用いて作図する姿がみられた。この姿は予想通りであったので、分度器は使用しないことを説明すると、「そんなの無理」という声があがった。そこで、本時の作図方法（定規とコンパスのみでの角の二等分線の作図）を教師のから提示した（図2）。提示するなかで、仮定と結論をはっきりと意識させるために作図したことを板書にのこした。

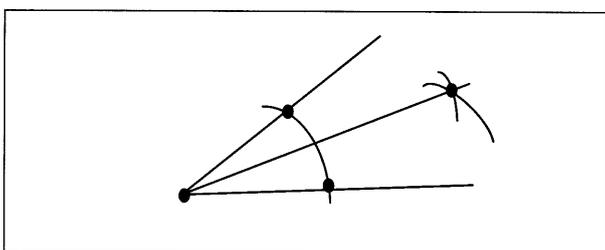


図2 実験授業で扱う作図

T：（子どもたちの作図後）角の半分になっていますか？確かめるために分度器で測ってごらん。

P：おお、おそろしい。

P：なんで？？

T：（作図したことを板書で示しながら）この作図をただけなのに「角が半分」になったね。どうして作図できたのだろう？なぜ、作図できたのか説明してみよう。

分度器を使用できない条件では作図できないと考えていた子どもたちにとって、コンパスと定規だけでおこなう角の二等分線の作図は驚くもので

あり、複数の子どもの反応（下線部）から「なぜ？」という問いが発生したことが伺える。この問いの発生の様子からも、実験授業の問題提示が、図形の性質と性質の間に何か関係があるのではないかと、という性質間の関係に目をむけさせるのに有効であったと考える。

(2) 論理的な説明を促す展開

その後、学習課題を設定し、自力で解決する時間をとった。しかし、多くの子どもはどう説明してよいか困っていた。一方、一部の子どもが作図のなかに「ひし形」を見いだしていた。そこで、一度全体で考えることにした。

T：この作図をみて、ある形がみえるという人がいます。どんな形がみえるかわかるかな？

P3：ひし形です。

T：本当に？どこに「ひし形」がみえるか、隣の人と確かめてごらん。

P4：点アイウエをすべて結ぶと、「ひし形」になると思います。

T：結んだら、と言ってくれましたね。（実際に直線で結んで）見た目判断しているんじゃないかな？どうして「ひし形」だといえるのですか？

P5：ひし形の性質というか、4つの辺の長さが等しくて、直角ではないというのが「ひし形」ですよね。コンパスで等しい長さにとった点を結ぶと「ひし形」になると思います。

T：どこの長さが等しいのですか？

P6：辺アイ、辺イウ、辺アエ、辺エウの長さが等しいです。

T：学習した「ひし形」の性質をもとに説明を

してくれましたね、すばらしいね。

T：なるほど、「ひし形」であることはよくわかりました。ただ・・・どうして「ひし形」だったら角が半分になるの？その説明が必要です。もう一度考える時間をとります。

下線部のように、「ひし形」だと判断する根拠を「ひし形」の性質をもとに説明させるため発問をし、論理的な説明を促すことができた。その後、授業ではさらに「ひし形」が線対称であるという性質や、合同条件をもとにした説明をする展開となる。

P7：ひし形は線対称なので、点アとウを結ぶと対称の軸ができて、そこで折ったらぴたり重なるので、角が半分になるんだと思います。

T：同じことがいえますか？

P8：ひし形は線対称なので、点アウを直線で結ぶと対称の軸ができて、そこで折ると角が半分になります。

(省略)

T：折ったら重なるとは別の言葉でいうとどういうことかな？

P9：合同ということです。

T：どこの形とどこの形が合同なのですか？

P10：三角形アイウと三角形アエウです。

T：合同の話がでましたが、線対称の言葉を使わずに、なぜこの二つの三角形が合同だと言えますか？

T：4辺がすべて等しいということはすでに確かめましたね（ひし形アイウエを図示しながら）。この図をもとに三角形アイウと三角形アエウが合同である理由をいえるかな？

P11：4つの辺が等しいですね。さらに真ん中の辺（対角線アウを図示しながら）も等しいので、同じ二等辺三角形ができるんだと思います。

P12：以前学習したことだけど、辺の長さが決ま

れば、角の大きさも決まるので、だからこの2つの三角形が合同なんだと思います。

ひし形が線対称な図形であるという点から説明した子ども P7, P8 の発言をもとに、さらに論理的な説明を促すために、合同条件にもとづく説明を促す発問をおこなった。その際、「線対称という言葉を使わずに」「図をもとに説明」の2点を発問のなかに取り入れたことは、その後の子ども P11, P12 の発言をみても有効であったと考える。

(3) 図形の「性質間の意識化」を促す振り返り

学習したことを定着させるために、ペアでの説明活動や、自分で学習したことを書いてまとめる時間をとった後、学習全体を振り返り、性質と性質との関係を意識させるよう発問していった。

T：今日作図したことはこれですね。はじめから「ひし形」を作図するつもりでしたか？

P13：いいえ

T：同じ半径をかいたことで、4つの辺が等しい四角形になり、何が決まりましたか？

P14：ひし形

T：ひし形が決まれば何が決まりましたか？

P15：線対称や対応する角が等しいこと。

T：そうですね、そして合同からも対応する角が等しいこともいえました。このようにある性質が決まれば次の性質が決まっていく学習を今日はしました。中学校ではこのような性質と性質をつなげていくような学習をもっとしていきますよ。

最後に、「たこ形」をもとにした「角の二等分線」の作図方法だけを紹介し、本時の学習と同じように「角が半分になるだろうか？」、また「もし半分になるならなぜだろうか？」という問いを投げかけ、次時へとつなげて授業を終えた。

4 結果と考察

実験授業の2日後に、上述したパフォーマンス

課題とルーブリックによる評価を行った。

表3は、単元学習第3次で既習の図形(ひし形、たこ形など)の対称性について学習した直後に実施したものを事前、授業後を事後として、子どものパフォーマンスの変容を示したものである。その結果、事後では基準Vは11人、基準IV19人、基準IIIは7人、基準IIとIは0人であった。

事前において評価基準III以下であった36人のうち、事後には29人が評価基準IV以上へと変容している。これらの子どもは、実験授業を通して評価基準を達成したものと捉えられる。また、事前から評価基準Vであった1名も、事後のパフォーマンス課題では複数の方法で説明するといった様子がみられ、実験授業を通して理解が深まっていることがよみとれた。

表3 事前事後のパフォーマンスの変容①

評価基準		事後					計
		V	IV	III	II	I	
事前	V	1	0	0	0	0	1
	IV	0	0	0	0	0	0
	III	0	0	0	0	0	0
	II	10	19	7	0	0	36
	I	0	0	0	0	0	0
	計	11	19	7	0	0	37

また、表4は評価基準を達成しているか否かという視点からルーブリックに基づく子どものパフォーマンスの変容を示したものである。

表4 事前事後のパフォーマンスの変容②

評価基準		事後		計
		V~IV	III~I	
事前	V~IV	1	0	1
	III~I	29	7	36
	計	30	7	37

事後に評価基準を達成した30名のうち、基準IVであった19名は、4辺がすべて等しいことを根拠に「ひし形」であることを述べるとともに、「ひし形」の対称性をもとに説明できているが、合同

条件については触れていない子どもである。

一方、基準IIIの7名は評価基準には至っていない。具体的な実態としては、ひし形だと判断する根拠の説明不足が2名、対称性をもとにした説明についての記述不足が5名にみられた。

なお、評価基準に達成しなかった7人には、調査後に個別指導を行い、再度学習したことを確認した。

5 おわりに

本研究では、新たに「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す作図教材として「角の二等分線」をとりあげ、実験授業を行うことを通じて、その授業の有効性を検討することが目的であった。

パフォーマンス課題の事前と事後における評価基準を達成した子どもの実態から、本実践が「図形の性質間の意識化」に対して一定の効果があったことが示唆された。そこで、最後に研究を通して確認できた成果と課題を整理しておきたい。

まず成果として第一に、図形の性質間の意識化を促す図形指導を構成することが、ひし形の性質、対称性および合同の学習など、既習の図形学習を活用した問題解決を促し、既習の図形の性質の理解をいっそう深める効果があることが示唆されたことである。これは、教師が9年間の図形指導の系統性を理解した上で、図形の性質間の意識化を子どもに促すためにはどのような指導をすればよいかを考えて、意図的・計画的に授業実践していくことの重要性を示すものであると考える。

また第二に、「角の二等分線」という中学校図形指導には欠かせない作図教材を、小学校段階からどのように扱うことが有効かについて、実験授業を通して検討できたことである。そのなかで子どもの直観的・操作的な図形の見方を大切に扱いつつも、論理的な見方へと押し上げていく思考の場を積極的に教師が設定することの必要性を実験授業を通して、確認することができた。実際に、ある教科書会社では中学校にむけての学習教材の一つとして「角

の二等分線」の作図を掲載している。その扱い方については、中学校との学習指導の違いも含めて今後とも検討していく必要は残されている。

また第三に、広島大学附属三原学園算数・数学部が発案した小中9か年の図形指導のカリキュラム構想に基づき、単元学習および実験授業を行い、実行性を前進させたことである。

今後の課題としては、本研究の最終目的である義務教育9か年の図形領域のカリキュラム開発に向けて、構想している図形カリキュラムを今後いっそう実行性が高められるように、授業開発を進めていくことが大切である。この点について、これまでの筆者らの研究を振り返ってみると、継続的な課題として小学校中・高学年の実践研究は重点的に積み重ねることができている一方で、小学校低学年の図形指導についての実践研究が乏しい。そのため、今後は小学校低学年の図形指導にも焦点をあてて研究を進めていきたい。

また、今回の指導でも見られた評価規準に達しなかった児童への支援や指導を考慮した授業づくりが不可欠である。事前・事後のパフォーマンス課題、ルーブリック評価の質の向上はもちろん、単元途中や授業中の形成的評価を通して指導と評価の一体化をめざした指導を開発していきたい。

<注および引用・参考文献>

- 1) 例えば以下のような先行研究がある。
 - ・國宗進：「論証の意義」の理解に関する発達の研究, 数学教育学論究, Vol. 47・48, pp. 3-23, 1987.
 - ・小関熙純：「図形の論証指導」, 1987, 明治図書.
- 2) 岡崎正和・岩崎秀樹, 「算数から数学への移行教材としての作図 —経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践—」, 数学教育学論究, Vol. 80, pp. 3-27, 2003.
- 3) 例えば以下のような先行研究がある。
 - ・岡崎正和, 「算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴—除法の一般化を事例として—」, 上越数学教育研究, 14,

pp. 39-48, 1999.

- ・前掲載 2)
- 4) 前田隆一：「算数教育論—図形指導を中心として—」, 金子書房, 1979.
- 5) 前掲載 4)
- 6) 松尾七重：「新教育課程における図形指導の実現に向けて —小学校算数科図形領域の指導との連携を考えて—」, 日本数学教育学会誌, 第90巻, 第9号, pp. 31-38, 2008.
- 7) 前掲載 6)
- 8) 高本誠二郎・岡崎正和, 図形の論理的位置づけの初期の様相について —論証への移行を目指した中学1年『平面図形』のデザイン実験(1)—, 全国数学教育学会誌, 第14巻, pp. 41-50, 2008.
- 9) 筆者ら研究グループのこれまでの研究は以下を参照していただきたい。

村上良太・川崎正盛・妹尾進一・木村恵子・松浦武人・植田敦三：「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発(1)—小学校5学年における移行を促す算数での実践的研究—」, 全国数学教育学会誌, 第16巻, 第1号, pp. 73-85, 2010.

村上良太：「図形の『性質間の関係の意識化』を促す算数科授業の開発—小学校第5学年「三角形・四角形の角」における実践を通して—」, 広島大学附属三原学校園研究紀要, 第2集, pp. 63-70, 2011.

- 10) 妹尾進一・村上良太・鈴木昌二・川崎正盛・木村恵子・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・松浦武人・植田敦三(2012)：「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発(3)—4年間の追跡による生徒の論理的な図形認識の変容についての考察—」, 全国数学教育学会誌(印刷中).
- 11) Wiggins, G. & McTighe, J., *Understanding by Design, Association for Supervision and Curriculum Development*, pp.13-34, 2005.