広島大学附属三原学校園研究紀要　第２集　2012　pp. 178-185

数　学　科

論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究

—図形の性質間の関係としての命題に焦点をあてて—

妹　尾　進　一

１，はじめに

わが国では，小学校算数科における図形の学習は図形の性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して，中学校数学科における図形の学習は論証をとおして性質間の関係としての命題の真偽性，すなわち正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが，中学校数学科における論証理解の困難性に現れている[1)]。

中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究，学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来からも精力的になされている[2)]が，今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。

図形指導の体系を研究した前田 (1979) は，「性質の理解は，関係の把握と不離一体である。」[3)]と述べ，性質理解に対する関係把握の重要性を指摘している。前田が言うところの「関係」には，図形の構成要素間の関係と性質間の関係との両者が含まれていることを付言しておきたい[4)]。

松尾 (2008) は，新教育課程における中学校数学科の図形領域の指導のあり方について提言するなかで，小学校での図形指導と中学校での図形指導の橋渡しをすることの必要性を指摘している[5)]。

また，小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎 (2003) は，算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の２期に分け，中学校数学科における移行後期教材として，作図がもつ性格，すなわち命題を構成する手段，経験的認識から論理的認識への媒介者としての性格に着目している[6)]。高本・岡崎 (2008) も同様である[7)]。

川﨑ら (2011) は，小学校における移行前期と中学校における移行後期との間のスムーズな接続を図るための小中９カ年の図形指導のカリキュラムを構想し，移行前期において図形の性質や性質間の関係への意識化を促す学習指導を行っている[8)]。

表１　小中一貫カリキュラム構想（一部抜粋）

移行前期	小５，６	・図形の性質間の関係の意識化
移行後期	中７	・図形の性質の顕在化 ・図形の性質間の関係の理解
論証	中８，９	・図形の性質間の関係の命題化 ・数学的な推論の理解と論理的に表現すること

また筆者は，岡崎・岩崎 (2003) が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき，中学校数学科における論証理解の困難性を克服するために，移行後期における図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化・対象化を促す教材としての作図に着目し，作図が有効に機能するかどうかを中学校第７学年における授業実践を通して再考してきた。本稿では，小中一貫カリキュラムをもとで図形指導を受けてきた生徒達の移行後期から論証期へのスムーズな接続を図り，第８学年においてどの程度論証理解を深めることができたのかを授業実践を通して検証していき，義務教育９カ年の図形カリキュラムについて一定の整理をするものである。

2，図形の性質間の関係の命題化

本節では，本研究における図形の性質間の関係の命題化について述べる。岡崎・岩崎（2003）が提起している図形の学習指導における移行段階の枠組みはvan Hieleの図形に関する思考水準の理論[9]を主な論拠として構築されている。本稿における実践研究の対象学年は第８学年であり，そこでの図形の思考水準は主に第３水準である。すなわち，性質が順序づけられ，ある性質は他の性質から演繹される。van Hiele は，この水準では，「演繹のみが行われるのではなく，経験的に確かめたことを演繹的に示したり，演繹的な証明によって経験的事象をよりよく理解する」ということや「第３水準は，生徒が幾何学的関係を上手く用いることができるとき達成されている」と述べ，ある種の操作をできることが，水準達成の目印であり，かつ次の水準へ上昇するための前提であることが示唆されている。また，石原（2007）は「論理的な図形認識を促すためには，一見関係のなさそうなものの間や不透明な全体の間に何らかの関係を見出す活動が有効である。」[10]と述べている。

本稿では，図形の性質間の関係の命題化という観点から，「ある種の操作」や「見出す活動」として以下の２つの機能を含んだ思考ができることが論証理解が深まった状態であると捉えることにした。

（ア）条件の一部を変更させて結論を予測し，それが正しいかどうかを証明できる

（イ）結論が成り立つ他の条件を考えることを通して，その証明を考えたり，新たな性質を見出すことができる

このことによって，「ＡならばＢである」という図形の性質間の関係を命題化の視点でより明確にとらえることができ，生徒が論証についての理解を深め，論理的に考察し表現する能力を高めていくことにつながると考えた。

3，授業設計の基本方針と教材研究

本節では，中学校第８学年の図形指導における「図形の性質間の関係の命題化」を促す学習指導のあり方について検討する。

(1) 対象生徒

授業対象生徒は広島大学附属三原中学校８年生１クラス 41 名である。実施時期は平成 23 年 11 月，単元は「図形の性質と証明」で，二等辺三角形の性質を考える学習課題を設定した。

(2) 学習前の事前調査の実態

生徒達は，小学校５年生で長方形，６年生で直角三角形，中学校７年生でたこ形の作図教材を用いて，作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。生徒の図形認識の実態を比較するために同一問題による２種類の調査を行った。

１つ目は，図形の命題の認識に関する調査である。調査問題は，図形を決定する１つの性質から別の性質への関係性を○×式で問い，その理由を書かせるものである。

表２　図形の命題の認識に関する調査(%)

	ひし形 定→性	平　行 定→性	平　行 性→定
2010.　9 実施(７年)	24.4	15.4	38.5
2011.10 実施(８年)	43.0	34.2	43.0
2009.10 実施(８年)	25.6	20.7	31.7

例えば，「四角形の４つの辺が等しい」という情報からひし形を想起し，述べている事柄がひし形の性質かどうかを判定する質問では 19%の上昇が見られた。理由を見ても，「ひし形は４つの辺の長さが等しくても，４つの角が等しいとは言えない」のように正しく理由を書いている生徒は 33 人おり，命題の認識が高まっていることが伺える。

２つ目は，図形の相互関係に関する調査である。ひし形と平行四辺形の相互関係について，３種類の形態(図の弁別，図形の性質として，直接問う)

で質問したものである。

表３　図形の相互関係に関する調査(%)

	弁別	性質	直接
2010. 9実施(７年)	50.0	39.7	35.9
2011.10実施(８年)	82.0	70.9	73.4
2009.10実施(８年)	69.5	52.4	64.6

この質問においても同様の傾向が見られ，図形の相互関係の理解が大幅に高まっていることが伺える。

本研究に取り組む以前（2009）の生徒との比較も合わせて見ると，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている生徒の認識の方が高いことが分かり，このような活動に取り組むことで一定の成果をあげていると言うことができる。しかし，命題に関する調査では，正解率が高まったとはいえ，50%を超えていないし，相互関係に関する調査でも，図の弁別で問う質問に比べ，文章で問う質問の正解率が低く，まだ見た目による判断を働かせている生徒がいることを示唆している。

これらの調査から，算数での経験的認識と数学での論理的認識との間の隔たりは小さくなってきていると考えられるが，十分解消されているとは言えない。

(3) 単元授業設計の視点

２節であげた（ア），（イ）を踏まえ，以下の点について重点的に指導できるように設計した。

- 証明の必要性を認識できるように，与えられた条件をもとに各自が作図を行うこと。（図の一般性）
- 作図した結果（仮定）からいえること（結論）は何か考えさせること。（性質の顕在化・性質間の関係性）
- 結論を導くためには何がいえればよいかを考えさせること。
- 結論が成り立つ他の条件を考えることを通して，その証明を考えたり，新たな性質を見出すことができること。（性質間の命題化）

以上の点を考慮しながら，図形の単元を次のように構成することにした。

第１次　平行と合同（５時間）
第２次　証明のしくみ（３時間）
第３次　三角形（６時間）実験授業３／６
第４次　四角形（８時間）
第５次　平行線と面積（２時間）

(4) 評価材

本単元の学習目標（望まれている結果）を生徒がどの程度達成したのか，つまり，「図形の性質間の関係の命題化」がどの程度なされたかの変容を具体的に示すための評価材（承認される証拠）として実験授業前，実験授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。なお，パフォーマンス課題については実施時期の学習状況を踏まえ，実験授業前後で出題の仕方を変えている。

○　パフォーマンス課題

（実験授業前）AB＝ACである二等辺三角形ABCに，２本の直線AD, AEを付け加えた。自分で１つだけ同じ長さの辺や同じ大きさの角などの条件をつけて△ABD≡△ACEであることを証明しなさい。

（実験授業後）AB＝ACである二等辺三角形ABCの図に，２本の直線を付け加え，合同な三角形をつくり，合同であることを証明しなさい。ただし，仮定として同じ長さの辺や同じ大きさの角の条件は１つだけ付け加えることとする。

○　評価規準

結論が成り立つ新たな条件を予測して課題を設定し，その条件で成り立つことを，既習事項を活用して演繹的に確かめることができる。

○　ルーブリック

表４は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。評価基準Ⅳ以上の段階で評価規準を達成したものとみなす。基準Ⅳはその記述語及びパフォーマンス課題が示すとおり，結論が成り立つ新たな条件を見つけ，ことばや記号を使って

表４　ルーブリック

	評価基準	パフォーマンス事例
Ⅴ	結論が成り立つ新たな条件を見つけ，根拠をもとに，ことばや記号を使って筋道を立てて証明することができる。	(条件)∠Ｂの二等分線とＡＣとの交点をＥ，∠Ｃの二等分線とＡＢとの交点をＤとすると，ＢＥ＝ＣＤが成り立つ。 (証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢにおいて，ＡＢ＝ＡＣより，∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ･･･①，∠ＤＣＢ＝１/２∠ＡＣＢ，∠ＥＢＣ＝１/２∠ＡＢＣ，①より　∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，①，②，③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅳ	結論が成り立つ新たな条件を見つけ，記述や表現が不十分なところもあるが，ことばや記号を使って説明しており，証明の筋道は正しいと認められるもの。	(条件)Ⅴと同じ。 (証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢで，∠ＡＢＣ＝∠ＡＣＢ･･･①，∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，①，②，③より１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅲ	自分または仲間が見つけた新たな条件で，ことばや記号を使って説明しようとしているが，条件不足，条件の誤りなどがあり，証明の筋道が不明確である。	(証明)△ＢＤＣと△ＣＥＢにおいて，∠ＤＣＢ＝∠ＥＢＣ･･･②，ＢＣは共通･･･③，１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいから△ＢＤＣ≡△ＣＥＢ，よってＢＥ＝ＣＤ
Ⅱ	自分または仲間が見つけた新たな条件で，証明しようとしているが，根拠があいまいである。	語句の羅列にとどまっている。
Ⅰ	新たな条件を見つけることができない。	無答

証明しており，証明の筋道は正しいと認められるものであり，この基準以上で「図形の性質間の関係の命題化」がなされた状態を示すものとした。一方，評価規準に達していない基準Ⅲは，新たな条件を見つけられなかったり，条件の誤り，条件不足等があり証明の筋道が不明確であるもの，基準ⅡおよびⅠは根拠が曖昧であるものである。これらはいずれも「図形の性質間の関係の命題化に至っていない状態を示すものとした。

4，移行後期から論証への移行段階

4.1　プレテストによる生徒の実態把握

本節では，移行後期から論証へのスムーズな移行を促す学習指導について述べる。３節で述べたが，生徒達は，第７学年で作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。そこで，単元に入る前のプレテストとして次の問題に取り組ませた。

問題　下の図１は∠XOY と大きさの等しい∠X′O′ Y′ を作図したもので，①～④はその手順を示している。この作図の方法が正しいことを証明しなさい。

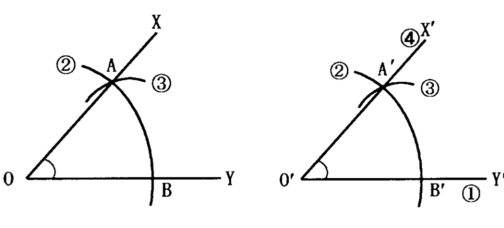

図１　等しい角の大きさを作図する手順

この段階では，記述の仕方にはこだわらず，作図の手続きを仮定とし，三角形の合同条件や合同な図形の性質を根拠にして，角が等しいことを述べればよいとした。図２はある生徒が記述したもので，表４のルーブリックに照らし合わせると，基準Ⅳ「証明の筋道は正しいと認められるもの」にあたるものである。しかし，このように基準Ⅳ

を達成した生徒はわずか4名であり，図形の性質間の関係の理解も再度押さえながら徐々に形式的証明へと高めていくことにした。

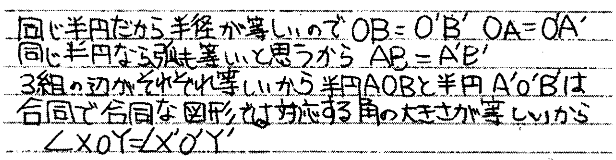
同じ半円だから半径が等しいので OB=O'B' OA=O'A'
同じ半円なら弧も等しいと思うから AB=A'B'
3組の辺がそれぞれ等しいから半円AOBと半円A'O'B'は
合同で合同な図形では対応する角の大きさが等しいから
∠XOY=∠X'O'Y'

図2　生徒が書いた証明(1)

4.2　演繹的な推論の必要性としくみ

第1次では，図形の基本性質を理解するとともに，演繹的に推論することの必要性を理解することがねらいである。

第2次では，基本的な証明のしくみや手順を理解することが大きなねらいである。そこで，まず角の二等分線の作図を用いて証明の仕組みを理解させることにした。ここで大切なことは，推論の過程を正確に，しかも分かりやすく表現することである。しかし，証明を組み立てることと証明を書くこと（記述）の間にはかなりの段差があり，この差を埋めることが証明の困難性を克服し，移行後期から論証へのスムーズな接続が図れると考え，「関係図」を用いて指導をしていくことにした。関係図は，証明の全体像を把握しやすいことや，性質と性質のつながりが捉えやすいので，仮定からいえることは何か，結論を導くためには何がいえればよいかといった推論を行いやすいことが挙げられる。

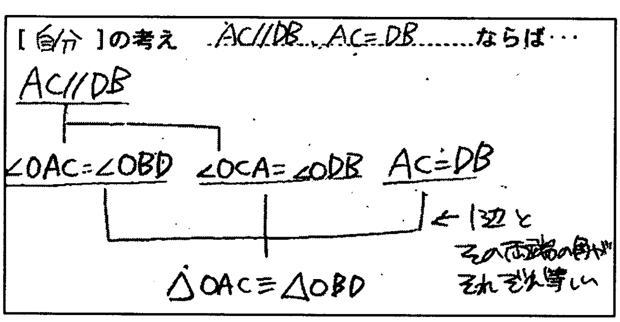

図3　生徒がかいた証明(2)

完成した関係図をもとに証明を書かせることで，証明を書くことに慣れさせていった。この後の証明問題でも，生徒は積極的に関係図を用いた証明と関係図をもとにした記述に取り組み，それによって性質間の関係性を認識することもできていた。

この後再度，等しい角を作図する方法が正しいことを証明する問題に取り組ませると，多くの生徒が記号を用いて推論の過程を記述する形式的証明によっており，基準Ⅳを達成した生徒は 19 名にのぼった。図3は，図2を書いた生徒と同じ生徒が書いた証明である。

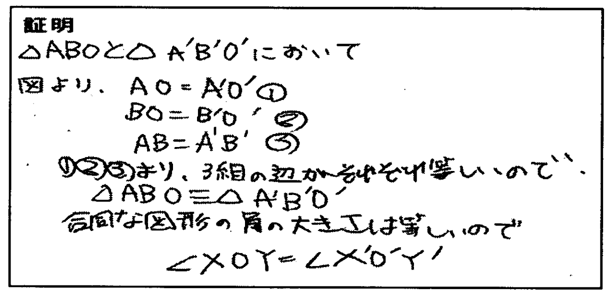
証明
△ABOと△A'B'O'において
図より，AO=A'O' ①
BO=B'O' ②
AB=A'B' ③
①②③より，3組の辺がそれぞれ等しいので，
△ABO≡△A'B'O'
合同な図形の角の大きさは等しいので
∠XOY=∠X'O'Y'

図4　生徒が書いた証明(3)

5，実験授業の実際

本節では，第3次の授業について述べる。

第1時では，まず最初に二等辺三角形を作図し，二等辺三角形の定義を確認した。そして，二等辺三角形の2つの底角は等しいことを頂角の二等分線をひくことによってできた2つの合同な三角形に着目して証明した。ここで改めて「『2辺が等しい』ならば『2つの底角が等しい』」という性質から性質が導かれるという命題性を強調しておいた。

第2時では，次の問題を提示した。

問題　AB＝ACである二等辺三角形ABCがある。AB, AC 上に AD=DB，AE＝EC となるように点 D, Eをとり B と E, C と D をそれぞれ結ぶと・・・

仮定を確認し，新たに成り立ちそうな性質をあげさせた。生徒から次の7組が出された。

∠ABC＝∠ACB, ∠ABE＝∠ACD, ∠ADC＝∠AEB, ∠BDC＝∠CEB, BE＝CD, △AEB≡△ADC, △BDC≡△CEB

この中から，辺の長さに関するBE＝CDを選び証明することにした。証明では，△AEB≡△ADCに着目したものと，△BDC≡△CEBに着目したものが見られ，どちらでも証明できることを確認した。さらに，たくさんあげられた性質間のつながりを見るために以下のような関係図を考えさせた。

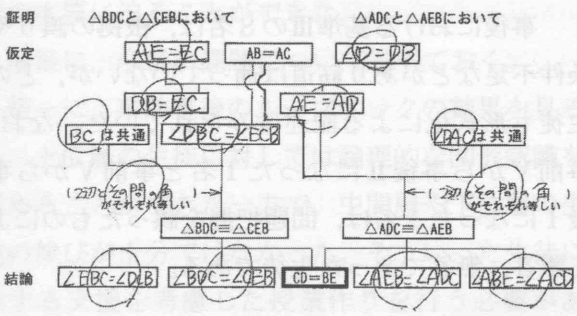

図5　証明の関係図

複雑に線が入り組んでいるため，仮定からいえることは何か，結論がいえるためには何がいえればよいかと行ったり来たりの思考を巡らし，何とか完成させることができていた。関係図を完成させた生徒の感想である。

○関係図にすることで，結論からさらにいえることを導き出すことができたので新たな発見ができていいなと思いました。
○記述の方はどちらの場合も書けました。関係図の方が難しかったです。
○関係図にしてみるととても入り組んでいて考えづらかったです。

関係図の有効性の記述も見られたが，複雑になってくるとわかりにくいといった記述が多く見られ，記述による証明のよさに意識を向けることができた。

第3時では，結論が成り立つ他の条件を考えることを通して，その証明を考えたり，新たな性質を見出すことができることをねらいとして，次の問題を提示した。

問題　AB＝ACである二等辺三角形ABCがある。AB, AC上に$\boxed{}$となるように点D，Eをとり BとE，CとDをそれぞれ結ぶとBE＝CDとなることを証明しなさい。

結論が成り立つには，他にどんな点D，Eのとり方があるかを作図によって考えていった。しばらく時間をとった後，生徒に発表させると4つの作図が出てきた。

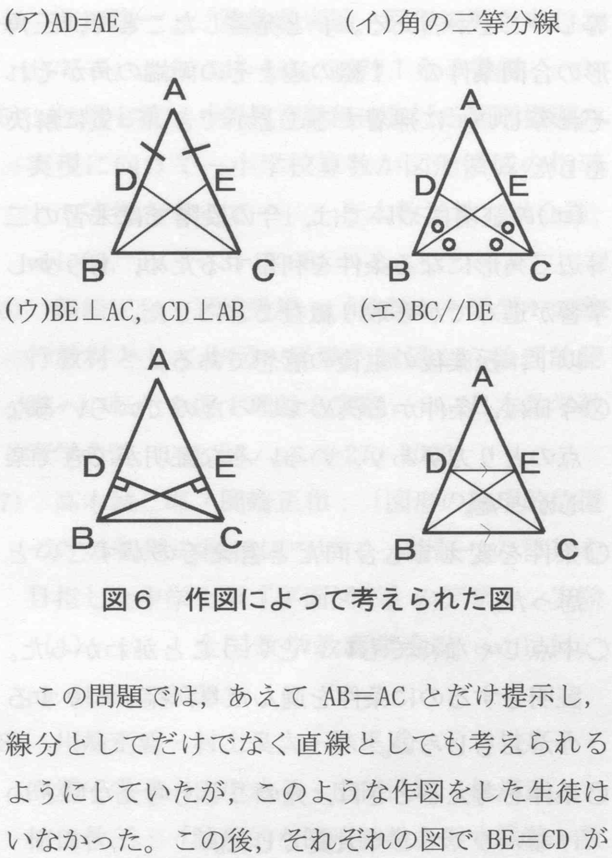

図6　作図によって考えられた図

この問題では，あえてAB＝ACとだけ提示し，線分としてだけでなく直線としても考えられるようにしていたが，このような作図をした生徒はいなかった。この後，それぞれの図でBE＝CDが成り立つことを証明していった。

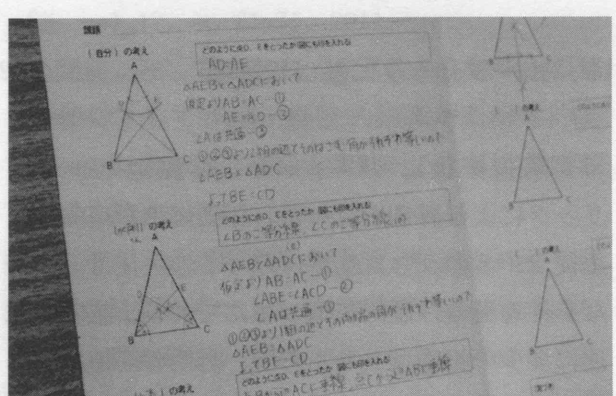

図7　生徒のワークシート

まず各自で，自分の考えた条件を証明した後，グループで交流した。根拠を明らかにしながら説明したり，なぜそれが言えるのか根拠を尋ねたりする姿が見られた。本時は(ア)の証明を全体で確認して終わった。

次時に(ウ)の証明を考えた。直角三角形の合同条件は未習であったため，すぐに三角形の合同条件が適用できなくて困惑している様子が見られた。しかし，ある生徒が，「三角形の内角の和は180°だから，２つの角が等しければ残りの角も等しいことが言える。」と発言したことで，三角形の合同条件の「１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい」に帰着することができ，一気に解決をした。

(エ)の証明については，今の段階では未習の二等辺三角形になる条件を利用するため，もう少し学習が進んでから取り組むことにした。

以下，授業後の生徒の感想である。

○今日は，条件から決めていったのでいろいろな点のとり方があり，いろいろな証明ができて楽しかった。

○条件を変えても合同だと言えるのがすごいと思った。

○中点じゃなくてもいいということがわかった。証明をするのに条件を選んだり，探したりするのがおもしろい。

○条件を考えるときは，先のことも考えないといけないのですごく大変でした。

○平行線による方法は，今までに習った平行線の性質を使って証明できそうだなあと思った。

６，ルーブリックに基づく評価

実験授業後にパフォーマンス課題とルーブリックによる評価を行った。評価規準を達成した生徒 21 名のうち，基準Ⅳの４名の生徒は，新たな条件を見つけ証明に取り組んでおり，証明の記述に多少の不備はあるものの，証明の筋道は正しいと認められた生徒である。

表５　事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後					
		Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	Ⅴ	5	1	4	1	1	12
	Ⅳ	7	0	0	1	1	9
	Ⅲ	2	2	1	3	0	8
	Ⅱ	3	1	3	2	0	9
	Ⅰ	0	0	0	0	1	1
	計	17	4	8	7	3	39

事後における基準Ⅲの８名は，根拠の誤りや条件不足などがあり筋道は通っていないが，どの生徒も形式化による記述はみられていた。なお，事前Ⅴから事後Ⅱになった１名と事前Ⅴから事後Ⅰになった１名は，問題把握を誤ったものによる誤答，無答であった生徒である。

７，考察およびまとめ

本実践研究の成果と課題を整理しておく。

第一の成果は，第７学年から一貫して，作図してそれが正しいことを証明するというスタンスをとってきているので，証明に対する抵抗感が高くないことである。自分が作図した方法でかかれた図が正しいかどうか振り返ることで，証明をする必要性を感じることができ，そのことが証明への意欲へとつながっていく。また，同じ条件のもとで誰がかいた図でも成り立つのかという図の一般性，証明の一般性の認識を持たせやすかったこともあげられる。

第二の成果は，図形の性質間の関係を命題として強く認識することができたことである。移行後期から論証期へのスムーズな接続を図るため，関係図を用いた実践を行った。その中で，仮定からいえることは何か，結論を導くために何が言えればよいかを組み合わせながら推論を進めていく証明の考え方の理解を図ることができ，スムーズに形式化につなげていくことができた。

第三の成果は，条件を決めて結論を予測したり，

結論がいえるための他の条件を考える活動を通して，発展的な考え方が生徒自身の学習の中から主体的にできるようになってきたことである。何が仮定されているかを調べ，そうでなければどうなるかを考えてみる。そのような仮定を特定したり，仮定を変更したりする活動を通して，変わらない性質を明らかにしていくことは大切な数学的活動である。今回の実験授業では，二等辺三角形の対称性に，様々な作図方法から導かれる条件を加えて証明が成り立っていることがわかり，図形の本質に迫ることができた。

最後に，今後の課題について述べておく。

第一に，事前事後のルーブリックの結果を見ると，上位層の生徒に対しては論理的な図形認識を高めることができた一方で，中間層や下位層の生徒の伸びが十分ではなかった。そういった生徒に対する支援を考慮した授業作りを行う必要がある。

第二に，図形の性質間の関係の命題化を促す教材の開発である。論証指導では，一般的に仮定，結論が最初から与えられ，証明する必要性をあまり感じない場面も多い。このような状態では，証明しようという意欲になかなか結びついていかない。そこで，可能な限り，図形の性質の顕在化，性質間の関係の意識化を図るような教材作りが求められる。

第三に，証明を読んで新たな性質を見いだす活動を取り入れていくことである。証明を読むことを通して，論理的な図形認識が一層高まっていき，そのことが他の領域にも波及していけば，相対的に生徒の論理的な認識の高まりが期待できるであろう。

これからも，小中一貫のカリキュラムのもとで，発達段階に即した教材開発を行っていき，中学校での論証理解の困難性を克服に向けた取り組みを充実させていきたい。

＜注および引用文献＞

1) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌 vol. 80, pp. 3-27, 2003.

2) 例えば，以下のような研究に見られる。
國宗進：「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」, 数学教育学論究, vol47, 48, pp. 3-23, 1987.
小関熙純：「図形の論証指導」, 1987, 明治図書.

3) 前田隆一：「算数教育論－図形指導を中心として－」, p. 127, 1979, 金子書房.

4) 前田隆一：「算数教育論－図形指導を中心として－」, pp. 144-145, 1979, 金子書房.

5) 松尾七重：「新教育課程における図形指導の実現に向けて－小学校算数か図形領域の指導との連携を考えて－」，日本数学教育学会誌, vol. 90, pp. 3-13, 2008.

6) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌, vol. 80, pp. 3-27, 2003.

7) 高本誠二郎・岡崎正和：「図形の論理的位置づけの初期の様相について－論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験（1）－」，全国数学教育学会誌, vol. 14, pp. 41-50, 2008.

8) 川﨑正盛・村上良太・妹尾進一・木村惠子・高淵千香子・山中法子・内田武瑠・松浦武人・植田敦三：「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（2）－図形の性質の意識化に焦点を当てて－」，全国数学教育学会誌, vol. 17, pp. 61-71, 2011.

9) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌, vol. 80, pp. 3-27, 2003.

10) 石原博之：「四角形の分類・整理を通して四角形の性質を考える」, 数学教育, No. 601, p. 51, 2007, 明治図書.