広島大学附属三原学校園研究紀要　第2集　2012　pp. 63-70

算　数　科

図形の「性質間の関係の意識化」を促す算数科授業の開発

―小学校第5学年「三角形・四角形の角」における実践を通して―

村　上　良　太

1，はじめに

わが国の中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究，学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来から精力的になされているが [1]，今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。

生徒にとっての論証理解の困難性は，単に中学校数学科における課題であるというだけではなく，小学校算数科における学習指導上の課題でもある。

小学校算数科の図形の学習指導では主題である性質は図形のなかに順序を意識されず同時存在している。それに対して，中学校数学科における図形の論証では，図形の性質間に順序関係が埋め込まれた命題が考察対象となる。すなわち，論証理解の要件として，少なくとも，図形の性質の顕在化と性質間の順序関係の意識化・対象化をあげることができる [2]。ただし，図形の性質の顕在化は小学校算数科の範囲であり，性質間の順序関係の認識は中学校数学科の範囲に属するということを意味するのではない。とりわけ，性質間の関係の認識は小学校算数科における図形の性質理解にとっても不可欠であることに留意したい。図形指導の体系を研究した前田（1979）は，「性質の理解は，関係の把握と不離一体である。」[3] と述べ，性質理解に対する関係把握の重要性を指摘している．前田がいうところの「関係」には，図形の構成要素間の関係と性質間の関係との両者が含まれていることを付言しておきたい [4]。

松尾（2008）は，新教育課程における中学校数学科の図形領域の指導のあり方について提言するなかで，小学校での図形指導と中学校での図形指導の橋渡しをすることの必要性を指摘している [5]。また，小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎（2003）は算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の２期に移行期を分け，移行後期に焦点を当てている [6]。高本・岡崎（2008）も同様である [7]。

以上のように，小学校における算数としての図形認識から数学の図形認識へと移行を促す，押し上げ教材の開発の必要性と小学校算数科における図形指導の再構成が今日求められている。

筆者ら（村上ほか，2010）はこれまで，岡崎・岩崎（2003）が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき，「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す教材として「作図」が機能するかどうかを小学校５年の実践をとおして検討し，「移行前期」教材としての「作図」の有効性を例証する研究を行った [8]。

一方，課題として以下の点があげられた。

・学習指導要領で規定された学習単元に関連させて，どんな図形をどの単元で作図させ，学習させていくかという，教材研究の充実
・移行を促す学習であるため，現学習指導要領の学習内容を発展させた学習となる。そのため，学習の難しい子どもの実態も考慮した指

導展開を考えるとともに，指導と評価の一体化の観点から授業づくりを再考する

このような課題をふまえて，本研究では，新たに「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す作図教材を開発し，実験授業を行うことを通して，その授業の有効性を検討することを目的とする。

なお，本研究で述べている「図形の性質間の関係の意識化」とは，「ある性質によって図形が決まる」という認識をもつこと，および「その性質が他の性質を導く役割をもっている」という図形認識をもち，「性質間の順序性」を意識することと捉えている。

２，研究の方法

(1) 対象児

広島大学附属三原小学校の第５学年 37 名を対象とした。

(2) 授業実施時期

平成 23 年 11 月

(3) 実験授業の設計

実験授業は，第５学年の「三角形・四角形の角」の単元学習の発展的内容として位置づけて行った。本単元は，基本的な図形の内角の和に関する性質を見い出し，それを用いて図形を考察していくことで，これまで学習してきた図形の性質理解をより確かにする学習単元である。

具体的には，三角形の内角の和の性質を操作的に発見し，それを活用して四角形，多角形の内角の和の性質を論理的に発見・説明していく算数的活動を展開する。さらに，三角形の内角の和の性質を活用して論理的に説明できる作図教材を学習する（実験授業）ことで，図形の性質と性質の間にある順序性にも触れさせ，中学校論証指導につながる論理的な図形認識への素地を育みたいと考えた。図形領域の単元としては，第５学年では本単元の前に「図形の合同」を学習し，次単元に「円と正多角形」をひかえている。

単元時間は全８時間で，単元計画は，以下のようにした。

第１次	三角形や四角形の内角の和（３時間）
第２次	角度の求め方（１時間）
第３次	多角形の内角の和（１時間）
第４次	直角三角形のひみつ（２時間） 実験授業（2/2）
第５次	既習事項の確かめ（１時間）

実験授業の作図教材は，二本の直線が交わった点から長さを等しくとって直線で結んだだけで，直角三角形になるといった教材であり，なぜ直角三角形になるのかという根拠を論理的に説明させる。説明は，既習事項である「三角形の内角の和は 180 度である」「二等辺三角形の底角は等しい」という角の性質を活用する。

実験授業で論理的な説明を促すための手立てとして，前時に２本の直線を垂直に交わらせた特殊な事例を扱っている。

(4) 評価方法

本研究では，評価の視点・方法として Wiggins & McTighe (2005) の提唱する「逆向きの設計（Backward Design）」の発想[9]に立ち，パフォーマンス課題およびルーブリックを作成し，評価を行った。

評価時期は，第１次で三角形の内角の和を学習した直後を事前とし，実験授業後を事後とした。

実験授業の学習目標を「直角三角形であると確定する根拠を考え，論理的に説明する活動を通して，既習の図形の定義や性質を活用して説明できるとともに，図形の性質の一部を定めることによって図形が確定できるという性質間の関係を意識する」とし，以下のようにパフォーマンス課題と評価規準およびルーブリックを決定した。

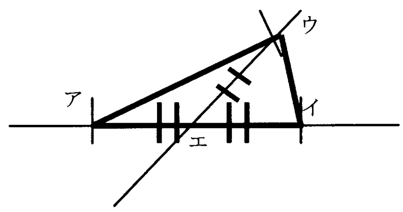
次の図は，直角三角形の一辺アイをかいたところです。
①三角形アイウが正確な直角三角形（角ウが直角）になるように，続きをかきましょう。

ア　　　　　　　　　　イ

②どのように作図したのか，できるだけくわしく説明しましょう。
③作図した図形が，どうして直角三角形であるといえるのか，説明しましょう。

図１　パフォーマンス課題

表１　ルーブリック

評価基準		パフォーマンス事例
Ⅴ	直角三角形の作図において，図形の性質の一部を定めることによって図形が確定する（直角三角形となる）ことを，二等辺三角形の性質，三角形の内角の和の性質などを活用して論理的に説明することができる。	 ・辺エア＝辺エウ，辺エウ＝辺エイであるため，三角形エアウと三角形エウイは二等辺三角形です。だから角エアウと角エウアを□で表し，角エウイと角エイウを△で表すと，三角形アウイの内角の和は 180°であるから，□＋□＋△＋△＝180°と表せます。そして１80÷２＝90 であることから，□＋△＝90°となり，三角形アウイは直角三角形だとわかります。
Ⅳ	直角三角形の作図において，図形の性質の一部を定めることによって図形が確定する（直角三角形となる）ことを，二等辺三角形の性質，三角形の内角の和の性質などを活用して論理的に説明しようとしている。（ただし，説明の根拠について部分的に不十分）	（図は上記と同じ） ・角エアウと角エウアを□で表し，角エウイと角エイウを△で表すと（なぜ等しい角として表すことができるのかについて説明されていない）□＋□＋△＋△＝180°です。（なぜ 180°になるのかについて説明されていない）そして 180÷２＝90 であることから□＋△＝90°となり，三角形アウイは直角三角形だとわかります。
Ⅲ	直角三角形の定義に基づいて作図したことを根拠にして，図形が直角三角形であることを説明することができる。	・３本の直線で囲み，三角定規の角をあてて直角にしたので直角三角形です。
Ⅱ	直角三角形の性質の一部を根拠にして，図形が直角三角形であることを証明しようとしている。 作図はできていても直角三角形の定義や性質に基づいて説明することができていない。	・辺エア，辺エウ，辺エイの長さを等しくしたので直角三角形です。 ・辺アイを直径とする円の中にある三角形だから直角三角形です。

Ⅰ	直角三角形の定義や性質に基づいて正確に作図することができておらず，図形が直角三角形であることを説明することができていない。	・（直角を感覚的にとり）直角であるから直角三角形です。 ・（無答）

［評価規準］

直角三角形の作図において，図形の性質の一部を定めることによって図形が確定する（直角三角形となる）ことを，二等辺三角形の性質，三角形の内角の和の性質などを活用して論理的に説明しようとしている。

表１は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。表中のパフォーマンス事例は，児童が実際にパフォーマンス課題に取り組んだ際のパフォーマンスを想定し，各評価基準の記述語を具体的に示すパフォーマンスを事例として添付したものである。また，ここでは評価基準Ⅳの段階で評価規準を達成したと見なす。

(5) 実験授業の実際

①論理的な説明を促す学習課題の設定

前時で学習した２本の直線を垂直に交わらせた特殊な事例を想起させつつ，本時で学習する作図を提示する。その後，子どもたちにも作図をさせた。（図２）

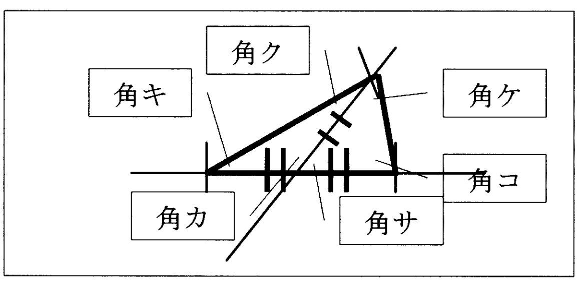


図２　実験授業で扱う作図

T ：実際にみんなも作図してみようか？
P1：やってみよう。
T ：では，みんなもノートに作図してたしかめてみよう。画面を見ながら真似していこう。
T ：２本の直線の交わり方は垂直ではありません。
T ：隣の人とは交わり方はちがうよね。確認しあってごらん。（２本の直線を適当に交わらせることを強調する）
T ：直線で結んだら，三角定規をあてて，確かめてごらん。
P2：あれあれあれ？？（多数）
P3：奇跡だ～！！おおー直角三角形だ。（多数）
P4：もうちょっとやろう。２，３個かこう。ありえん。なんで？
P5：もう１個かいてもいいですか？
T ：今，みんなが思わず口にした，「なんで」「なぜ？」を今日は考えたいのです。
やったことは，直線を交わらせて，等しい点をとり，結んだだけなのに，なぜか直角三角形になった。課題を設定しましょう。
P6：どうして垂直に交わらせていないのに，直角三角形になるのか考えて，説明しよう，がいいと思います。
P7：自分の言葉で言うんだけど，なぜ垂直に交わらせていないのに，直角になるのか説明できるようになろうがいいと思います。

子どもの反応（P2～P5）からも，２本の直線を交わらせて，交点から等距離の点を直線で結んだだけなのに，直角三角形ができるという事実に，「なぜ？」という問いが発生したことが伺える。この問いの発生の様子からも，実験授業の問題提示が，図形の性質と性質との間に何か関係があるのではないか，という性質間の関係に目をむけさせるのに大変有効であったと考える。

その後，P6, P7 のような課題設定が発表された。

②具体的な数値を入れて説明を促す展開

課題設定の後，自力解決の時間になったが，直角になる説明を自力で解決できる子どもは１人もいなかった。しかし，これは事前に予想していた反応であった。そのため，一旦自力解決の時間を止めて，前時の学習と本時の学習を比較させる発問をすることで，自力解決の手立てとした。

T　：こちらを見てください。今，自分で解決できた人がいません。前の作図（垂直に交わっているとき）のときにはすぐに説明できたのに，どうして今回は難しいのかな？難しい理由が何かありますか？
P8：前の時間の作図，垂直に交わっていたので，90度が分かっていたから，そこから計算して求められたけど，今回は角度がわからないので，求められないと思います。
P9：一か所（角度が）わかれば分かるよ。
T　：では，今回は角サの角度をみんな自身が自由にあてはめていいことにしたらどうだろう？いろいろな角度のときがあるんだから，何度にしようか・・・
P10：でも先生，90度はなしですよね。
T　：そうだね。90度はなしだね。
T　：何度にしようかな？「例えば，もし角サが30度だったら～」とあてはめて，何度のときでも90度になるかどうか調べてみたらどう？それならできそう？
P11：（うなずく）

角サに具体的な角度を入れて考えることで，子どもたちは前時の学習とつなげながら，図形を直観的・操作的にみることで，自分たちで説明を考えることができた。

③直観的・操作的な図形の見方から論理的な図形の見方へと変容を促す展開

自力解決後，子どもたちの具体的な角度を入れての説明を発表し，確かめた。その説明のなかでは，既習事項である「三角形の内角の和」「二等辺三角形の底角」「三角形の外角」の性質を活用した説明がみられた。

その後，教師側から記号化による説明を促す発問をすることで，論理的な図形の見方を引き出し，直角になる理由を一般化できるように展開していった。

T　：この角サに入る角度をみんなでたくさん考えてきたんだけど，もし，角サに入る角度をすべて調べ上げようと思うと，大変な時間がかかりますね。でも算数にはとてもよい方法がある。それは記号を使うという方法なんです。角サが何度であっても，この角とこの角は同じ。（○と○，△と△の記号を書きいれる）
そして，○＋△が何度であればよいのですか？
P12：90度。
T　：そうだね。○＋△が90度になる理由を言えればいいということですね。
では，○＋△＝90°になる理由をこの記号と，この三角形で言えませんか？（図示しながら）（図３）
P13：・・・・

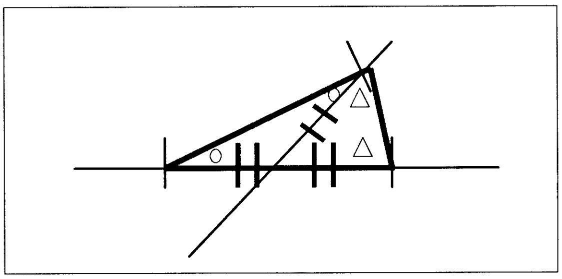


図３　記号化による説明を促した板書

図に○と△の記号をかきいれ，直角三角形の辺を強調して色でなぞりながら発問することが，記号化による説明を促す手立てであったが，子どもたちは一旦途惑ってしまった（P13）。

しかし，再度繰り返し発問を続けるとともに，考える時間を設けることで以下のような子どもの反応が見られた。

P14：○＋○＋△＋△は三角形の内角の和で，三角形の内角の和は 180 度だから，足すと 180 度になると思います。
T　：そうだね。三角形の内角の和は 180 度だということが大切なポイントだね。
T　：さらに，180 度を割る・・
P15：２。
T　：どうして÷２をするの？
P16：順番を変えて（板書で），○＋△をセットと考えると，こんなふうになりますね（　（○＋△）＋（○＋△））この三角形は二等辺三角形だから○と○は同じ角度ですね。△と△もこの三角形が二等辺三角形だから同じ角度ですね。だから○と○は同じ，△と△も同じだから，全体の○＋△と○＋△も同じですね。等しく分けるには÷２をすればいいので，180÷２をすれば○＋△＝90 度になると思います。

記号化により，直角になる根拠を論理的に説明する思考は子どもにとって大変難しい。そこで，本実験授業では，具体的な角度の数値を入れて考えた直観的・操作的な図形の見方をまず確認してから，論理的な図形の見方へと移行していく展開をとった。こうした展開により，最終的には子どもたちは記号化による説明をすることができたが，一旦途惑ってしまった子どもの反応からも，教師の手立ての不十分さがあったことが反省点である。

その後，授業は実験授業での作図をふりかえり，円との関係に気づかせるとともに，作図の前提条件と結果を改めて考察し，性質間の関係の意識化を促すようにして，学習をまとめた。

３，結果と考察

実験授業の２日後に，上述したパフォーマンス課題とルーブリックによる評価を行った。

表２は，単元学習第１次で三角形の内角の和を学習した直後に実施したものを事前，授業後を事後として，子どものパフォーマンスの変容を示したものである。その結果，基準Ⅴは 13 人，基準Ⅳ21 人，基準Ⅲは１人，基準Ⅱは２人，基準Ⅰは０人であった。

事前において評価基準Ⅲ以下であった 37 人のうち，事後には 34 人が評価基準Ⅳ以上へと変容している。これらの子どもは，実験授業を通して評価規準を達成したものと捉えられる。

表２　事前事後のパフォーマンスの変容①

評価基準		事後					
		Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	Ⅴ	0	0	0	0	0	0
	Ⅳ	0	0	0	0	0	0
	Ⅲ	7	9	1	1	0	18
	Ⅱ	3	5	0	0	0	8
	Ⅰ	3	7	0	1	0	11
	計	13	21	1	2	0	37

また，表３は評価規準を達成しているか否かという視点からルーブリックに基づく子どものパフォーマンスの変容を示したものである。

表３　事前事後のパフォーマンスの変容②

評価基準		事後		
		Ⅴ～Ⅳ	Ⅲ～Ⅰ	計
事前	Ⅴ～Ⅳ	0	0	0
	Ⅲ～Ⅰ	34	3	37
	計	34	3	37

評価規準を達成した 34 名のうち，基準Ⅳであった 21 名は，直角になる理由を記号をつかって論理的に説明できていたものの，その根拠の説明に一部不十分な点が見られた。例えば，○＋○＋△＋△＝180°になる根拠として「三角形の内角の和は 180°であるから○＋○＋△＋△＝180°になる」といった既習の図形の性質をもとにした説明が不足していた。

基準Ⅲの１人は，本研究における評価規準には至っていないが，具体的な角度の数値を当てはめ

ることで直角になる根拠を説明することはできていた。

基準Ⅱの２人は，直角三角形の作図はできているが，その根拠の説明が断片的で，記号を使って説明することもできていなかった。

なお，評価規準に達成しなかった３人には，調査後，個別指導を行い，再度学習したことを確認した。

４，おわりに

本研究では，新たに「移行前期」における性質間の関係性への意識化を促す作図教材を開発し，実験授業を行うことを通して，その授業の有効性を検討することが目的であった。

結果として，事前と事後における評価規準を達成した子どもの実態からも，本実践が「図形の性質間の意識化」に対して一定の効果があったことが示唆された。そこで，最後に研究を通して確認できた成果と課題を整理しておきたい。

まず成果として第一に，図形の性質間の意識化を促す図形指導を構成することが，三角形の内角の和の性質，二等辺三角形の底角の性質など，既習の図形の性質を活用した問題解決を促し，既習の図形の性質の理解をいっそう深める効果があることが示唆されたことである。これは，教師が９年間の図形指導の系統性を理解した上で，図形の性質間の意識化を児童に促すためにはどのような指導をすればよいかを考えて，意図的・計画的に授業実践していくことの重要性を示すものであると考える。

また第二に，直観的・操作的な図形の見方を論理的な図形の見方へと変容させていく思考段階を授業展開のなかに取り入れることにより，全員が参加し，考えることができる授業を構成できたことである。もちろん，短時間の授業で，すべての子どもの図形の見方を変容させることは容易なことではない。しかし，容易ではないからといって消極的になるのではなく，子どもの直観的・操作的な図形の見方を大切に扱いながらも，論理的な見方へと押し上げていく思考の場を積極的に教師が設定することの必要性を実験授業を通して，確認することができた。

また第三に，広島大学附属三原学校園算数・数学部が発案した小中９カ年の図形指導のカリキュラム構想に基づき，単元学習および実験授業を行い，カリキュラムの実行性を前進させたことである。

今後の課題としては，本研究の最終目的である義務教育９カ年の図形領域のカリキュラム開発に向けて，構想している図形カリキュラムが今後いっそう実行性が高められるように，授業開発を進めていくことが大切である。この点について，これまでの筆者らの研究を振り返ってみると，小学校中・高学年の実践研究は重点的に積み重ねることができている一方で，小学校低学年の図形指導についての研究に課題がある。そのため，今後は小学校低学年の図形指導にも焦点をあてて研究を進めていきたい。

また，今回の指導でも見られた評価規準に達しなかった児童への支援や指導を考慮した授業づくりが不可欠である。事前・事後のパフォーマンス課題，ルーブリック評価の質の向上はもちろん，単元途中や授業中の形成的評価を通して指導と評価の一体化をめざした指導を開発していきたい。

＜引用・参考文献＞

1)　例えば以下のような先行研究がある。
　國宗進，「論証の意義」の理解に関する発達の研究，数学教育学論究，Vol. 47・48, pp. 3-23, 1987.
　小関熙純，『図形の論証指導』，1987，明治図書.
2)　例えば以下のような先行研究がある。
　岡崎正和，「算数から数学への移行期における子どもの論理の発達の特徴　ー除法の一般化を事例としてー」，上越数学教育研究，14, pp. 39-48，1999.
　岡崎正和・岩崎秀樹，「算数から数学への移行教材としての作図　ー経験的認識から論理

的認識への転化を促す理論と実践－」，数学教育学論究，Vol.80，pp.3-27，2003.

3) 前田隆一，『算数教育論　－図形指導を中心として－』，金子書房，1979.

4) 前掲載 3)

5) 松尾七重，新教育課程における図形指導の実現に向けて　－小学校算数科図形領域の指導との連携を考えて－，日本数学教育学会誌，第90巻，第９号，pp.31-38，2008.

6) 前掲載 2)

7) 高本誠二郎・岡崎正和，図形の論理的位置づけの初期の様相について　－論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験(1)－，全国数学教育学会誌，第 14 巻，pp.41-50，2008.

8) 村上良太・川崎正盛・妹尾進一・木村惠子・松浦武人・植田敦三，「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発（1）－小学校５学年における移行を促す算数での実践的研究－」，全国数学教育学会誌，第 16 巻，第１号，pp.73-85，2010.

9) Wiggins, G. & McTighe, J. , *Understanding by Design* , Association for Supervision and Curriculum Development, pp.13-34, 2005.