広島大学附属三原学校園研究紀要　第１集　2011　pp. 140-147

数　学　科

論理的な図形認識を促す数学科授業の実践的研究

—中学校第７学年における論証への移行を促す実践的研究—

妹　尾　進　一

１，はじめに

わが国では，小学校算数科における図形の学習は図形の性質を直観的・操作的な活動をとおして発見することが主題となるのに対して，中学校数学科における図形の学習は論証をとおして性質間の関係としての命題の真偽性，すなわち正当化することが主題となる。これらの両者の学習指導上の文脈の違いが，中学校数学科における論証理解の困難性に現れている[1)]。

中学校数学科における論証理解の困難性に関する調査研究，学習指導の改善に関する実証的・実践的研究は従来からも精力的になされている[2)]が，今日においても生徒の学習状況の改善を必要としているのが現状である。

図形指導の体系を研究した前田（1979）は，「性質の理解は，関係の把握と不離一体である。」[3)]と述べ，性質理解に対する関係把握の重要性を指摘している。前田が言うところの「関係」には，図形の構成要素間の関係と性質間の関係との両者が含まれていることを付言しておきたい[4)]。

松尾（2008）は，新教育課程における中学校数学科の図形領域の指導のあり方について提言するなかで，小学校での図形指導と中学校での図形指導の橋渡しをすることの必要性を指摘している[5)]。

また，小学校算数科の図形認識から中学校数学科における図形認識への移行過程に関する理論的，実践的研究を行った岡崎・岩崎（2003）は，算数科の中で算数の押し上げを促す「移行前期」と数学科の中で積極的に数学への移行を促す「移行後期」の２期に分け，中学校数学科における移行後期教材として，作図がもつ性格，すなわち命題を構成する手段，経験的認識から論理的認識への媒介者としての性格に着目している[6)]。高本・岡崎（2008）も同様である[7)]。

本研究は，岡崎・岩崎（2003）が提起する「算数から数学への移行」を促す学習指導の枠組みに基づき，中学校数学科における論証理解の困難性を克服するために，移行後期における図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化・対象化を促す教材としての作図に着目し，作図が有効に機能するかどうかを中学校第７学年における授業実践を通して再考することを目的とする。

２，作図教材の位置づけ

本節では，作図教材のもつ可能性について述べる。中学校７年生の作図では，角の二等分線，垂線，垂直二等分線の学習が行われる。これらの作図には，たこ形の性質が仮定されており，作図はたこ形の諸性質の関係づけとして捉えることができる。たこ形の性質をまとめると次のようなものがあげられる。

①２組の隣合う辺が等しい
②対角線が互いに垂直に交わる
③１つの対角線が角を二等分する
④１つの対角線の中点を他方の対角線が通る

角の二等分線，垂線，垂直二等分線の作図は，①をもとにして②や③や④を探究する活動をさす。岡崎・岩崎（2003）は，「作図は単なる手続きではなく，図形間の関係を探究する道具になり，その意味で作図は論証への結節点となる。」[8)]と述べている。したがって，作図を正しく算数と数学の移行段階に位置づけ，移行を促す実践を行うこ

とが数学教育にとって重要な課題となる。

３，授業設計の基本方針と教材研究

本節では，中学校第７学年の図形指導における「図形の性質の顕在化」及び「性質間の関係の意識化・対象化」を促す学習指導のあり方について検討する。

(1) 対象生徒

授業対象生徒は広島大学附属三原中学校７年生１クラス 41 名である。実施時期は平成 22 年 11 月，単元は「作図」で，たこ形の対角線が垂直に交わることを証明する学習課題を設定した。

(2) 学習前の事前調査の実態

生徒達は，５年生で長方形，６年生で直角三角形の作図教材を用いて，作図してそれが正しいことを考える活動を通して，筋道立てて考察する数学的な推論の考え方の素地となる活動を行ってきている。生徒の図形認識の実態を把握するため「図形の命題に関する調査」（平成 22 年９月実施７年生 78 名）によると，例えば，ひし形の定義から形を想起し性質をとらえる問いの正解率は 24％で，性質間のつながりはほとんど認識できていない。また，図形の相互関係を３種類の形態（図の弁別・図形の性質として・直接問う）で質問した結果，正答率は平均して 31％で，形の相互関係もあまり認識されていないことがわかった。

(3) 単元授業設定の視点

中学校７年生の基本の作図の学習では，一般的に三角形の合同条件の学習がなされていないため，作図の手続きの習得に終わりがちであり，作図方法が正しいかどうかの検討は行われない。しかし，７年の学習の際に，生徒が角の二等分線の作図方法で確かに角が二等分されているかどうかを疑問に感じることがあっても不思議ではない。また，生徒が導き出す作図方法は多種多様であり，それら１つ１つの妥当性を検討することは大切なことである。長崎（2009）は，「作図して，それが正しいことの証明という流れを持って学習を進めることで，生徒に証明の意義や必要性を感じさせることができる。」[9]と述べており，そのためには論証における図形の基本性質となる合同な図形の性質や三角形の合同条件は欠かすことができないものととらえ本単元を次のように構成した。

第１次　合同な図形の性質（１時間）
第２次　三角形の合同条件（２時間）
第３次　いろいろな四角形の作図（３時間）
第４次　たこ形の性質（１時間）実験授業
第５次　基本の作図（２時間）
第６次　作図の利用（１時間）

(4) 評価材

本単元の学習目標（望まれている結果）を生徒がどの程度達成したのか，つまり，「図形の性質の顕在化」及び「性質間の関係の意識化・対象化」がどの程度なされたかの変容を具体的に示すための評価材（承認される証拠）として実験授業前，実験授業後のパフォーマンス課題及びルーブリックを次のように設定した。

○　パフォーマンス課題

２組の隣合う２辺をそれぞれ等しくなるように作図したたこ形の対角線が垂直に交わる理由を説明しなさい。

○　評価規準

図形の性質の一部を定めることによってできたたこ形の対角線が垂直に交わる理由を，三角形の合同条件や既習事項を活用し，ことばや記号などを用いて筋道立てて説明することができる。

○　ルーブリック

表１は，パフォーマンス課題に対するルーブリックである。評価基準Ⅳの段階で評価規準を達成したものとみなす。基準Ⅳはその記述語及びパフォーマンス課題が示すとおり，作図に用いたたこ形の性質をもとに，三角形の合同条件，合同な図形の性質，二等辺三角形の角の性質などの既習事項を活用して図形の性質を考えることができている段階であり，「図形の性質の顕在化」及び「性質間の関係の意識化・対象化」がなされた状態を示すものとした。一方，評価規準に達していない基準Ⅲは，根拠が明確でないもの，基準Ⅱは感覚的なものであり，「図形の性質の顕在化」及び「性

表１　事前・事後ルーブリック

	評価基準	パフォーマンス事例
Ⅴ	根拠をもとに，ことばや記号を使って筋道を立てて説明することができる。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは，ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ，ＡＣ＝ＡＣより３組の辺がそれぞれ等しいので△ＡＢＣ≡△ＡＤＣとなり，∠ＢＡＣ＝∠ＤＡＣ △ＡＢＭと△ＡＤＭは，ＡＢ＝ＡＤ，ＡＭ＝ＡＭ，∠ＢＡＣ＝∠ＤＡＣより２組の辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので△ＡＢＭ≡△ＡＤＭとなり，∠ＡＭＢ＝∠ＡＭＤ，だから，180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅳ	根拠をもとに，ことばや記号を使って説明しようとしている。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは，ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ，ＡＣ＝ＡＣより３組の辺がそれぞれ等しいので，△ＡＢＣ≡△ＡＤＣ，また，△ＡＢＤは二等辺三角形だから∠ＡＢＭ＝∠ＡＤＭ，三角形の３つの角の和は 180°で２つの角が同じ大きさだったら　残りの角も等しくなります。よって，180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅲ	ことばや記号を使って説明しようとしているが，根拠が不明確である。	△ＡＢＣと△ＡＤＣは合同です。△ＡＢＭと△ＡＤＭも合同です。△ＡＢＤは二等辺三角形です。 180°÷２＝90°でＡＣ⊥ＢＤになります。
Ⅱ	説明になっていない。	語句を羅列しているが，それらの関係性がみられない。
Ⅰ	説明しようとしない。	無答

質間の関係の意識化・対象化」に至っていない状態を示すものとした。

４，第３次の授業の実際

本節では，実験授業までの第３次の授業について述べる。

１時間目では，まずコンパス，定規，三角定規，分度器など，さまざまな道具を用いていろいろな四角形を描かせた。生徒達は平行には三角定規２枚，直角には分度器を使うという方法の正確さを意識して様々な方法で描いていた。その中で，筆者は長方形の描き方に着目した。生徒達は図１のような様々な方法で長方形を描いていた。
それぞれの方法で描かれた四角形が長方形といえるかどうか考えさせた。結果的にどんな図形が描かれればいいのかを尋ねる中で，「４つの角がすべて 90°であればよい」という意見が出され，長方形の定義の確認した後，方法アは確実にいえることを全体で確認した。

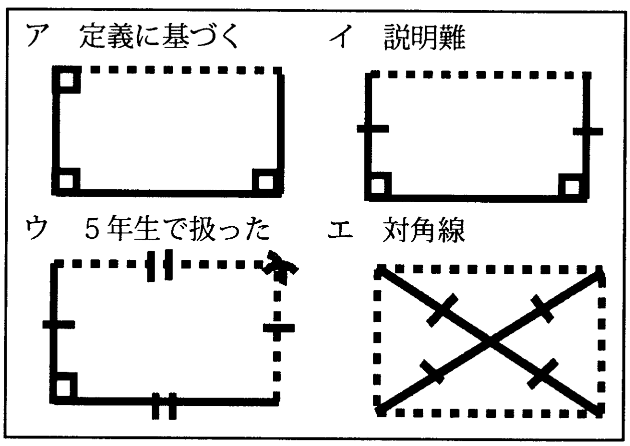

図１　長方形の描き方

次に，方法ウを取り上げた。この方法は，直角に交わる２直線をひき，それぞれの長さの辺の長さを半径とする円の交点をコンパスでとるもので

あり，村上（2010）にもあるように，生徒達が５年生のときに実施したものである[10)]。そのときのルーブリックに基づき評価を行うと，表２のような結果が得られた。

表２　パフォーマンス結果（%）

	Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ
５年	0	29	61	11	0
７年	0	25	55	19	0

母集団の人数が異なるためパーセント表記に改めている。中学校から入学した生徒も含まれ，母集団が異なるため単純比較はできないが，生徒の図形認識はあまり変わっていないことがわかる。これは，２年が経過していることやトピック的に扱われてきていることによるものと考えられる。実際，以前にやったことがあることに気がついている生徒はごくわずかであった。ゆえに，生徒の論理的な図形認識を高めるためには，作図して，それが正しいことの証明という流れを繰り返しながら学習を進めることが大切と考え，次時以降の授業を進めていくことにした。

２時間目では，ひし形を取り上げた。大多数の生徒が，図２のようにひし形の対角線が垂直に二等分される性質を利用して描いていた。

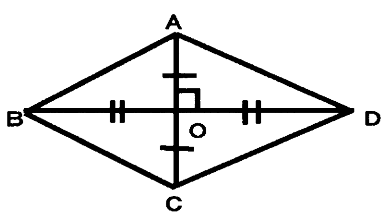

図２　ひし形の描き方

ひし形の定義「４つの辺がすべて等しい四角形」を再確認し，この方法で描いた四角形がひし形になる証明に取り組ませた。この証明では，４つの合同な三角形が図に表れているので，比較的簡単だったようであり，６割の生徒が自分なりの表現で理由をきちんと述べることができていた。

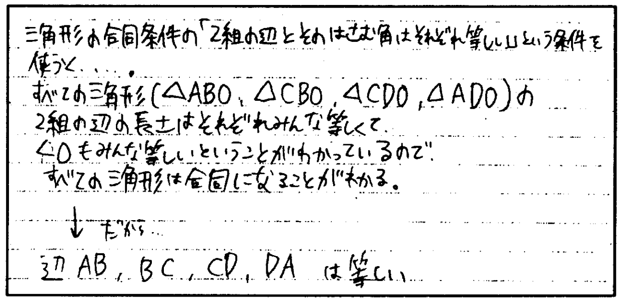

図３　生徒が書いた証明

授業後の感想では，次のような記述がみられた。（下線は筆者）

- 道具を使って説明する方がよいと思っていたが，今まで習ったことをいかすと伝えやすいなどのよさに気づくことができました。
- 合同を使うことでとても簡単にその図形が本当に目的のものになっているか分かるようになれた。
- 理由を説明するヒントは，まず分かっていることを確認して，三角形の合同条件をみつけたらいいと思った。
- どうなればいいのかというゴールをしっかり持っておくと考えやすい。

記述から，生徒の認識が，直観的・操作的なものから論理的なものへと徐々に移行していく様子が伺える。さらに，論証における仮定から結論を導くという流れを認識する生徒も現れるようになってきたことが分かる。

この後，定規とコンパスへと道具の制限を行った。中学校では，定規とコンパスのみを用いる幾何学的作図を扱う。生徒達には，コンパスと定規をロープ１本に例え，ロープをピンと張って直線を描き，ロープの一方の端を固定して円を描くことを強く意識づけた。再度，「コンパスと定規だけで四角形を描けるだろうか。」と生徒の挑戦意欲を引き出すように課題を出した。すると，生徒達は，分度器や三角定規の直角を利用して描いていた垂直や物差しで測っていた中点を描くことが不可能になり，長方形を描くことや図２の方法ではひし形を描くことができないことに気づいた。そんな中，図４のようにひし形の定義に基づく作図をしていた生徒の方法をとりあげ，この方法な

ら定規，コンパスのみで簡単にひし形を作図できることを納得することができた。

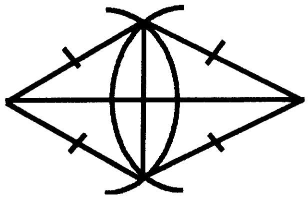

図４　ひし形の作図

ここで，新たにたこ形を導入した。筆者は，たこ形の形を口頭で表現して問題提示を行った。ほぼすべての生徒が定規，コンパスのみでたこ形を作図することができた。作図の方法を振り返っての記述では，（下線は筆者）

・ひし形とよく似ていてコンパスの長さを変えるだけでよかった。
・たこ形って何って思ったけど，ひし形の片方が違う形だった。
・簡単にかけるのでこれからよく使いそう。

など，ひし形とたこ形の関係性に着目する記述がみられた。そこで，筆者からひし形はたこ形の特別な場合であるという包摂関係にもふれ，たこ形の性質についてもっと調べてみようと投げかけていった。

５，実験授業（本時）の実際

前時に行ったたこ形の作図をもとに，その図形の性質を考えさせていった。

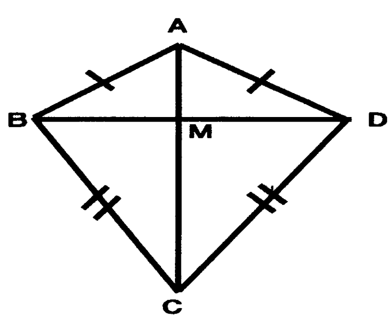

図５　たこ形①

Ｔ：では，たこ形はどんな四角形か記号で表してみましょう。
Ｓ：ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤです。
Ｔ：文章だと？
Ｓ：となり合う２組の辺がそれぞれ等しい四角形です。
Ｔ：そうですね。作図で実際に描いたことそのままですね。では，たこ形の性質を発表してもらいましょう。
S1：線対称になっています。
S2：△ＡＢＤと△ＣＤＢ二等辺三角形です。
S3：△ＡＢＣ≡△ＡＤＣが言えます。
S4：対角線が垂直に交わっています。
S5：対角線の交点をＭとすると，ＢＭ＝ＤＭです。
S6：∠Ｂ＝∠Ｄです。

この時点では，多くの生徒は直観的に等しい辺や角を挙げていた。この中で，多くの生徒が気づきとしてあげていたという理由で，S4の意見について，その根拠を追究していくことにした。

Ｔ：説明をするときに大事なことは何だった？
Ｓ：スタートとゴールです。
Ｔ：そうですね。そこははっきりさせておかないといけませんね。この説明のゴールは？
Ｓ：対角線が垂直に交わることです。
Ｓ：∠ＡＭＢ＝90°です。
Ｔ：じゃあ，スタートは？
Ｓ：ＡＢ＝ＡＤ，ＣＢ＝ＣＤ。
Ｔ：スタートとゴールがはっきりしたので，説明を考えてみましょう。
　＜しばらく時間をとる＞
Ｔ：これまでも説明をするときに必ず使われていたものがありましたね。
Ｓ：三角形の合同条件です。
Ｔ：ここにも２つの三角形が合同なのではないかというのが書かれていますね。まずは，この２つの三角形が合同であることを説明してみましょう。

＜しばらく時間をとる＞
T：S7さんに板書してもらいます。

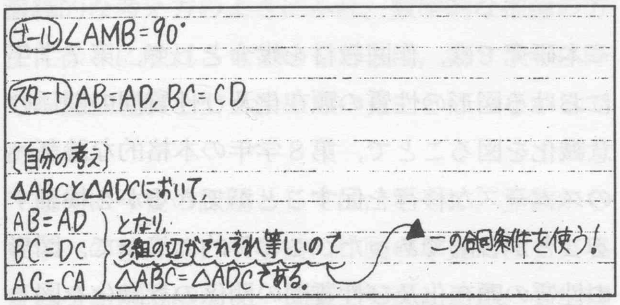

図６　S7の証明

ここまで証明できている生徒は半数近くいた。問題はここからである。二等辺三角形の２つの底角か，もう１組の合同な三角形に着目しなければならない。多くの生徒が悩んでいる中，S8が「自信はないけど・・・」といいながらも挑戦した。

S8：S7が合同をいって，△ＡＢＤは二等辺三角形なので端の角がｃ，ｃになって，△ＣＢＤも二等辺三角形なのでｄ，ｄになって，それを使うと１組の辺とその両端の角がそれぞれ等しくなるので・・。

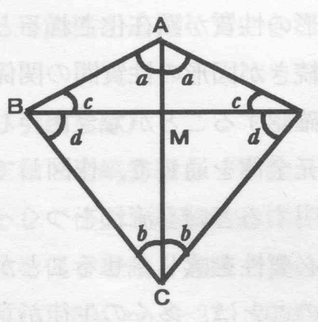

図７　たこ形②

T：１組の辺というのはどこですか？
S8：上だったら，ＡＢとＡＤが等しくて・・。
T：これはいいですね。
S8：それでｃとｃが等しい。下の三角形もＣＢ＝ＣＤで，そこのはさむ角が，左側の小文字のｄと右側の小文字のｄが等しくて，ｂとｂが等しいので，１組の辺とその両端の角が等しいから，△ＡＢＭと△ＡＤＭは合同です。
T：ちょっとまってください。本当ですか？△ＡＢＭと△ＡＤＭで１組の辺はいいよね。両端と言ったらここ（∠ＢＡＭ）とここ（∠ＡＢＭ）でしょ。ここ（∠ＤＡＭ）とここ（∠ＡＤＭ）。ここ（∠ＢＡＭと（∠ＤＡＭ））はなんて言った？
S8：ｃ
T：理由は？
S8：二等辺三角形
T：ここ（∠ＢＡＭと∠ＤＡＭ）は？
S8：ちょっと微妙なんですけど・・・。
T：微妙なんですか？じゃあ，ヘルプ。
S9：△ＡＢＣ≡△ＡＤＣで，対応する角は等しいので，∠ＢＡＣと∠ＤＡＣは対応しているので等しいことが言えます。
T：これで△ＡＢＭと△ＡＤＭで，１辺とその両端の角がそれぞれ等しいが言えましたね。もう少しです。時間がきたのでこの続きは次回にしましょう。

S8は，対象となる２つの合同な三角形がはっきり示されなかったことにより，多少の混乱は見られたが，最終的には△ＡＢＭ≡△ＡＤＭを証明することができた。次時の始めに，三角形の内角の和は 180° であることを用いて，たこ形の対角線が垂直に交わることを全員で確認した。

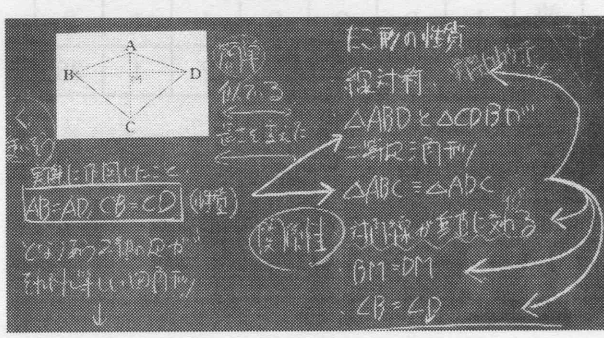

図８　図形の性質間の関係性

そして再度，最初に出された性質に目を向けさせた。すると，図８にあるように，たこ形の性質

間の関係性が明らかになり，図形の性質間の関係の意識化・対象化を図ることができた。

たこ形の対角線が垂直に交わる性質を利用すれば，定規，コンパスだけで簡単に直角を作ることができ，次時以降の基本の作図や長方形の作図に活用する姿が見られた。授業後の生徒の反応を以下に記す。（下線は筆者）

・定規，コンパスだけで直角が作れるようになった。半分に分けたとき（対称軸で折ったとき）<u>２つの三角形が合同になることを意識</u>して描けばいい。
・<u>たこ形を作図すれば垂線がかけて</u>びっくりした<u>これを使うと，長方形まで作図できて</u>すごいと思った。

６，ルーブリックに基づく評価

表３は，実験授業の自力解決時を事前，授業後を事後としてパフォーマンスの変容を示したものである。

表３　事前事後のパフォーマンスの変容

評価基準		事後					
		V	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	計
事前	V	0	0	0	0	0	0
	Ⅳ	1	3	2	0	0	6
	Ⅲ	0	15	3	1	0	19
	Ⅱ	0	1	5	5	0	11
	Ⅰ	0	0	0	1	1	2
	計	1	19	10	7	1	38

評価基準Ｖ及びⅣを達成した生徒は 20 名であった。これらの生徒達は，仮定や既知のことがらを根拠としながら，証明を最後まで完成させることができていた。基準Ⅲの 10 名は，証明をしようとしているが，根拠が不明確なところがあったり，証明内でのつながりがみられなかったものである。基準Ⅱの７名は証明しようとしているが，思ったことをそのまま記述しているだけであり，根拠やつながりはみられなかったものである。

７，終わりに

本研究では，作図教材を媒介として，第７学年における図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化を図ることで，第８学年の本格的な論証へのスムーズな移行を促すことができるかを検証することが目的であった。この目的に沿って，図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化を図る場を繰り返し設定していき，生徒の図形認識の変容に着目していった。

事前と事後における評価規準を達成した生徒の比率に有意差が認められたことから，本実践が図形の性質の顕在化及び性質間の関係の意識化に対して一定の効果があったことが示唆された。そこで，最後に研究を通して確認できた成果と課題について整理しておきたい。

成果として第一に，作図教材の有効性を再認識することができたことである。通常の作図の授業では，作図手続きを覚え，それをいろいろな場面に応用する学習が行われるが，単に手続きの習得と応用の学習に終わらせず，図形認識を高める手段として活用が求められる。つまり，作図の過程において，図形の性質が顕在化されるということや，作図の手続きが図形の性質間の関係に変容していくことを確認することができた。

第二に，単元全体を通して，作図してそれが正しいことを証明するという流れをつくったことで，証明の意義や必要性を感じさせることができたことである。このことは，多くの生徒が意欲的に証明に取り組もうとした姿からも伺える。

第三に，中学校７年生における論証指導の可能性についてである。たこ形におけるパフォーマンス課題は，評価規準の達成状況にもあるように，一度三角形の合同条件を用いれば証明できるものではなく，再度三角形の合同条件か，二等辺三角形の性質を用いなければならないという２段がまえの証明であり，中学校７年生にとっては難しいものであった。しかしながら，ある性質によって

図形が決まる，ある性質が他の性質を導く役割を持っているという認識を生徒達は感じることができた。このように，本格的な論証を学習する前に演繹的な考え方のよさにふれ，数学的な推論の方法に徐々に触れさせていくことは，第８学年以降での論証理解をより深めていくことにつながるであろう。

最後に今後の課題としては，第一に，算数から数学への移行は，中学校の作図の単元だけで実現されるものではない。冒頭でも記したが，小学校算数科との連携は欠かせない。小学校算数科と連携して，義務教育９カ年の図形領域のカリキュラム開発を行い，今後一層充実させていくことが大切である。

第二に，作図の根拠になるものを明確にする必要がある。今回は，合同な図形の性質，三角形の合同条件を主たる根拠に用いながら証明を進めていった。本来ならば，中学校８年生で論理的に確かめることになっている三角形の内角の和が180°であること，二等辺三角形の２つ底角は等しいこと，対頂角は等しいことなどは小学校での既知のものとして扱っている。中学校７年生の段階において，何をどの程度証明の根拠として用いることが可能かを整理しながら，論証への橋渡しをしていく可能性を追究していきたい。

〈注および引用文献〉

1) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌，Vol. 80，pp. 3-27，2003.

2) 例えば，以下のような研究に見られる。
國宗進：「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」，数学教育学論究，Vol47, 48, pp. 3-23，1987.
小関熙純：「図形の論証指導」，1987，明治図書.

3) 前田隆一：「算数教育論－図形指導を中心として－」，p. 127，1979，金子書房.

4) 前田隆一：「算数教育論－図形指導を中心として－」，pp. 144-145，1979，金子書房.

5) 松尾七重：「新教育課程における図形指導の実現に向けて－小学校算数か図形領域の指導との連携を考えて－」，日本数学教育学会誌，Vol. 90，pp. 3-13，2008.

6) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌，Vol. 80，pp. 3-27，2003.

7) 高本誠二郎・岡崎正和：「図形の論理的位置づけの初期の様相について－論証への移行を目指した中学１年『平面図形』のデザイン実験 (1) －」，全国数学教育学会誌，Vol. 14，pp. 41-50，2008.

8) 岡崎正和・岩崎秀樹：「算数から数学への移行教材として作図－経験的認識から論理的認識への転化を促す理論と実践－」，日本数学教育学会誌，Vol. 80，pp. 3-27，2003.

9) 長崎栄三，国宗進，太田伸也，相馬一彦：「豊かな数学の授業を創る」，pp. 103-122，2009，明治図書.

10) 村上良太・川﨑正盛・妹尾進一・木村惠子・松浦武人・植田敦三：「論理的な図形認識を促す算数・数学科カリキュラムの開発 (1) －小学校５学年における移行を促す算数での実践的研究－」，全国数学教育学会誌，Vol. 16，pp. 75-81，2010.