Title	数学的な表現力を育てる教材開発
Author(s)	重松, 正樹
Citation	中等教育研究紀要 ／広島大学附属福山中・高等学校 , 63 : 39 - 42
Issue Date	2023-05-31
DOI	
Self DOI	10.15027/53934
URL	https://doi.org/10.15027/53934
Right	
Relation	

数学的な表現力を育てる教材開発

重松　正樹

数学的表現力を育てる教材として，不等式に注目した。不等式は数量や概念の大小関係を表し，さらに不等式による評価を利用することによって考えを深めることが出来る。今回は，不等式の評価を実践する教材を開発することにより，数学的な表現力を育成する教材を提案する。

１．はじめに

（１）本研究の背景と目的

文部科学省(2018)は，学習指導要領における数学科の目標のひとつに，数学的な表現力の育成を掲げている。数学的な表現力とは，数や式，図，表，グラフなどの数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力のことである。今回は数学的な表現力の中でも，式，特に不等式に注目し，不等式による評価を扱った教材開発を行う。

不等式によって事象を表現する例として，野球の守備を考えてみる。野球場はフェアゾーンとファウルゾーンに分かれており，フェアゾーンを９人の選手で守る。その９人の守備範囲を合わせて，フェアゾーンを隙間なく覆うためにはどんな守備範囲をもつ９人をどのように配置すればいいかと考える。このような事象を数学的に考えると，

(フェアゾーンの面積)□(9 人の守備範囲の和)

のように，面積についての不等式を考えていることになる。このように不等式によって，事象を表現することができる。

現状の高校数学における不等式の扱いを考えると，単元としては，数学Iにて，1 次不等式，2 次不等式，数学IIにて，不等式の証明などがある。しかし不等式による評価に焦点を当てると，扱ってはいるものの，主として扱うことはあまりない。現状では不等式のよさを実感させることができないのではないか，そして，不等式による評価の教材を充実させることが，数学的表現力を育成することになるのではないかと考えた。

また，不等式による評価を扱った教材開発するにあたり，先行研究を探してみたところ，不等式について扱った論文は多く見つかった(例えば, 坂岡, 宮川(2016), 服部(2010), 新井(2018))。しかし，不等式の評価について考察した先行研究は見つけるに至れなかった。このことから，不等式の評価を考察するにあたり，明確な課題が見つかっていないのではないかと仮定する。

このような背景から，本研究の目的を，数学的表現力を育成するために不等式による評価を行う教材を開発することとする。そして本稿の目的を，不等式による評価を扱った教材案を批判的に検討し，教材化する上での課題を明確化することとする。

（２）本研究の意義

この教材開発の意義は２つある。１つは，高大接続に役立つと考えている。近年の大学入試において，不等式の評価に関する問題が扱われることが多くなっている。例えば，「$5.4 < \log_4 \quad 2022 < 5.5$を示せ。」(京都大学 2022)や，「$|3^{53} - 2^m|$が最小となる整数 m を求めよ。」(お茶の水大学　2020)が該当する。これは大学側から高校生に求めている力の一つと解釈ができる。実際，大学数学と高校数学での不等式の扱い方に差があり
大学に進んでからは不等式による評価がより重要になる。

高橋・加藤(1998)を見ると，$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{2n^2+3n+1} = \frac{1}{2}$ を示す際，

$$\left|\frac{n^2+1}{2n^2+3n+1} - \frac{1}{2}\right| = \frac{3n-1}{2(2n+1)(n+1)} < \frac{3n}{2\cdot 2n\cdot n} < \frac{8}{4n} = \frac{2}{n}$$

と評価し, アルキメデスの公理により収束を示している。このような不等式の扱い方は高校数学ではあまりしない。このような観点から高大接続を担える教材になるのではないかと考えている。

もう一つは，不等式を用いて考えること自体によさがあることである。不等式のよさについて，等式と比較して考える。等式は二つの事象が真に等しくないと扱うことができないのに対して，不等式は大小関係を述べるだけである。つまり，不等式を用いれば，等しくはないものの，誤差を含んだまま考えることができる。したがって，等式では表現できない，考えることが難しい場合でも不等式を利用することで表現できて考えることができる。このような不等式のよさがあると考えている。

以上のように，不等式による評価を高校生に対して扱うことには意義がある。

２．教材案

今回検討する教材案は以下の 3 つである。

（１）三角比表をつくる。 $\sin 1°$を決定する。(藤本、(2007))

（２）無理数の有理数近似。$\log_{10}\ 2 = 0.3010$ の導き方と，より厳密な近似値を求める。(加藤(2012)、落合(2020))

（３）「$5.4 < \log_4\ 2022 < 5.5$を示せ。」(京都大学 2022)を解く発想を養う。

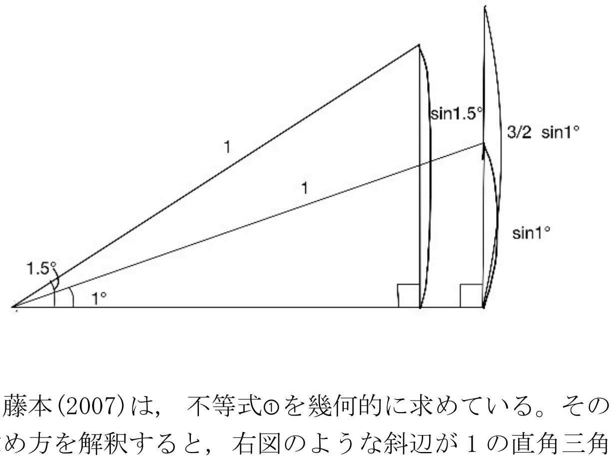
（１）三角比表をつくる。$\sin 1°$を決定する。

$\sin 1°$を求めることができれば，加法定理により，三角比表をつくることができる。藤本(2007)は，数学史を触れさせる目的で，プトレマイオスの行った $\sin 1°$ の求め方を扱った実践をまとめている。

その求め方は，$5 \cdot 72° = 360°$ を利用して $\cos 72° = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ を導出する。$\cos 12° = \cos(72° - 60°)$を求め，半角の公式を繰り返し行うことで, $\sin 1.5°$，$\sin 0.75°$の近似値を求める。そして，

$$\frac{2}{3}\sin 1.5° \leqq \sin 1° \leqq \frac{4}{3}\sin 0.75° \ldots ①$$

という不等式を幾何的に求める。$\frac{2}{3}\sin 1.5° = 0.01745129887\cdots$， $\frac{4}{3}\sin 0.75° = 0.01745279409\cdots$ であるため，非常に厳密な評価を与える不等式である。このように，$\sin 1°$ を求めている。



藤本(2007)は，不等式①を幾何的に求めている。その求め方を解釈すると，右図のような斜辺が 1 の直角三角形を利用して，$\sin 1.5° \leqq \frac{3}{2}\sin 1°$を得る。同様にして，$\sin 1° \leqq \frac{4}{3}\sin 0.75°$として求める。しかし，どのようにして $\frac{3}{2}$を決定するのか記述されておらず，その方法もわからなかった。

不等式①の証明は，$f(x) = \frac{3}{2}\sin x - \sin\ \frac{3}{2}x$，$g(x) = \sin\ \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}\sin x$ とすると，$0 \leqq x \leqq 2$ において，$f(x) \geqq 0$，$g(x) \geqq 0$ となるので証明できる。

藤本(2007)の実践は，数学史を体験させる目的で $\sin 1°$ を非常に厳密に求めさせた点は価値がある。一方で，不等式評価の教材にするという視点でこの実践を考えると，不等式①の左辺と右辺をどのように決定するかが重要である。

不等式①の導出方法を考察した。例えば「$\sin 1°$ はどれくらいの値だろうか」のように発問すれば，$\sin 1°$の値を求めるために不等式でおよその値を調べようとするのではないだろうか。しかし不等式①ほど厳密な値を導出させるのは非常に困難であり，どのような値を選んで評価すればいいか思いつくかどうかは生徒の能力や知識，数学を学習した経験に依存するものではないかと考えられる。

$\sin 1°$ を評価する数として何を選ばせるか，よりよい数を多くの生徒に選ばせるにはどのような手立てが必要かなど，この教材を不等式評価の教材として扱う上での課題がある。

（２）無理数の有理数近似。log_10　2=0.3010 の導き方と，より厳密な近似値を求める。

加藤(2012)は，$\log_{10}\ 2$ を 2 進法の小数表示を利用して，

$$\log_{10}\ 2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{2^{18}} + \cdots$$
$$= 0.3010291 + \cdots$$

として，$0.3010291 < \log_{10}\ 2 < 0.3010329$ と定めている。

落合(2020)は数学の学びを深めるという目的で，この近似を利用した授業実践を行っている。実践では，$\log_{10}\ 2$ が有理数と仮定して，$2^m = 10^n$ をおおよそ満たす自然数の組(m, n) を考えさせることで，$\frac{3}{10} < \log_{10}\ 2 < \frac{1}{3}$ を求め，近似する。よりよく近似する方法として，2 進数による小数表示を議論している。さらに考察を深めるために 3 進数の小数表示による近似を考えさせており，数学の学びを深められるものとなっている。

この教材は非常に興味深く，不等式評価の教材として扱うことができないか検討をしたのだが，常用対数を何を目標にして上や下に評価していかなければいけないのかという設定ができなかった。

加えて，不等式で評価する必要性を認めさせるような題材にはできなかった。

（３）「$5.4 < \log_4 2022 < 5.5$を示せ。」（京都大学2022）を解く発想を養う。

$\log_4 2022 < 5.5$ については，$4^{5.5} = 2^{11} = 2048$ より，容易に示せる。

一方 $5.4 < \log_4 2022$ の証明は先ほどよりも簡単ではない。$4^{5.4} = 2^{10.8} = 2^{10} \cdot 2^{0.8}$として，$2^{0.8}$の値を近似していく解法が考えられる。しかし，本研究で身につけさせたい考え方は，

$$\frac{4^{5.4}}{2022} < \frac{4^{5.4}}{2000} < 1$$

のように，2022 より扱いやすい2000 に不等式で評価して 1 より小さいと示していく考え方である。2000 で評価すれば，2 と 5 の素因数で表すことができるので，$\log_{10} 2$ の近似値のみで表すことができる。都合のいいものに置き換えて評価していくという考え方は，本研究で扱いたいものそのものである。

しかし，この問題を教材化するにあたっての課題は，$\frac{1}{2022} < \frac{1}{2000}$と評価することを思いつかせるにはどうすればよいかということである。2022 よりも2000 の方が都合いい，扱いやすいと生徒が必ず考えるかというとそうではない。むしろ思いつく生徒がいないかもしれないとも考えられる。扱いやすいと考えるかどうかは，2. (1)と同様に，生徒の能力や知識，数学を学習した経験に依存するものではないか。この教材でもこの結論に至った。

３．不等式評価を教材化する課題

ここまで不等式による評価の教材として扱える可能性がある教材を検討してきた。次は見えてきた課題を述べていく。

（１）不等式によって評価する数，式を導出させる手立て

不等式による評価を進めていくためには，「考える上で都合のいい」数や式を考えなければいけない。よりよい不等式評価を教えてしまえば，生徒は証明などで理解することはできるだろう。しかし，2. (1)や 2. (3)でも述べたように，その数や式を導出させるにはどのような手立てが必要なのか。ここに課題がある。

この課題の要因として考えられるのは，2. (1)や 2. (3)でも述べた，不等式で評価するために選ぶ数や式の「考える上で都合のよさ」というのは，数学の様々な知識や考え方を学習し，経験を重ねたことで手に入る感覚なのではないかということである。似たような考え方をしたことがある，見たことがあるから使ってみようという思考になるのであり，そういった知識や経験がない状態から思いつくのは非常に困難である。

（２）場面設定

不等式の評価をする際は，ここまで上に評価，下に評価していけばいいという目標があることが多い。例えば，数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを示す場合，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 N が存在して，$n \geqq N$ のとき，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ を満たすことを示す。この場合，$|a_n - \alpha|$ を ε という目標に向かって上へ評価していけば，証明できる。あるいは，関数の有界性を示す際には，関数がある区間において，ある実数より小さいことを示す。この場合は，ある関数をある実数に向けて上に評価していけばよい。このように不等式評価を利用するときは，どこまで評価していけばいいかわかっている場合が多い。

しかし，2. (2)でも述べたように，どこに向かって評価していけばいいかという場面設定を考えるのが困難であった。また、不等式で考えるのが効果的だと生徒に合意させるような場面設定を考えるのも困難であった。

４．教材化するにあたっての課題の解決案

不等式による評価の教材の課題は明確になった。その課題に対して，解決案を 2 点考察したので提案する。

（１）同じ考え方をする問題で，誰でも考え付く問題を事前に扱って印象付ける

何もない状態から不等式評価を思いつかせるのは難しい。しかし，思いつくきっかけになるよう，簡単な問題を扱った後なら思いつく生徒もいるのではないだろうか。例えば京都大学の問題の場合であれば，「分数、分数式の大小関係」，「扱いづらい素因数をもつ数をわかりやすい素因数で評価」といった点を抑えた例題があれば不等式評価を思いつく生徒がいると考えられる。

（２）不等式による評価を扱った教材が出てくる度に意識させて，考え方を刷り込む

不等式による評価を利用している教材はないか，という視点で教材研究をしてみると，既存の教材でもいくつか該当する。これらの教材を扱う際に，不等式によって評価する考え方を意識させることができるのではないだろうか。その例を 2 点述べる。

分数式の不等式において，等号による式変形ではな

く，分母の定数項をなくすなどにより不等式で式変形する考え方。例えば，実数 x に対して，

$$\frac{x}{x^2+x+2} \leqq \frac{x}{x^2+x}$$

と評価する。積分や数列の評価をするときに用いると考えられる。

整数問題において，大小関係を利用して候補を絞り込む考え方。例えば，「自然数 x,y,z に対して、$xyz=x+y+z\ (x \leqq y \leqq z)$を満たす組 (x,y,z)を求めよ。」という問題で，

$$xyz = x+y+z \leqq z+z+z = 3z$$

と評価することにより値を絞り込む。このような問題は設定次第では場合の数の単元でも扱うことができるので，現行の学習指導要領でも扱うことは可能である。

このように例題で考え方のきっかけを与える、機会を見て何度も意識させることで不等式によって考えていいという発想を思いつかせることができるのではないかと考える。

５．まとめ

本稿では，数学的な表現力を育成するという観点で，不等式の評価に注目して教材開発を試み，教材化する上での課題があるか検討した。その結果，教材になりそうな素材はいくつかみつかったものの，教材化する上での課題があった。それは「不等式によって評価する数、式を導出させる手立て」と「場面設定」であった。しかしいくつか解決策を考えることができた。今後の課題は解決策をより具体的に考察して手立てを明確にすること。そして，授業をつくり，実践することである。

参考文献

［1］藤本博之(2007).「授業で数学史を扱い数学を体験させる指導の工夫-電卓を用いた「数学Ⅱ：三角関数」の指導を通して-」　新潟県教育委員会理数教育ステップアップ研修 実践記録
www.nipec.nein.ed.jp/sc/risuu/h19/h19suugaku/fujimoto.pdf

［2］落合毅(2020).「常用対数の近似値の考察」大阪教育大学附属高等学校池田校舎 研究紀要 第 54 集

［3］加藤一(2012).「どうして log_10　2=0.3010 なのか？」数研通信 74 号 pp.19

［4］高橋泰嗣、加藤幹雄(1998).「微分積分概論」サイエンス社

［5］文部科学省(2018).「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/

［6］坂岡昌子、宮川健(2016).「不等式の性格についての一考察　基本認識論モデルの探求」全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第 22 巻　第 2 号　pp.73~84

［7］服部貴大(2010).「2 次不等式の学習の困難点に関する研究：2 次不等式に関する知識の観点から」日本数学教育学会誌　数学教育　第 92 巻　第 7 号　pp.12~20

［8］新井仁(2018).「円周率の近似値の求め方に関する教材開発　小・中・高の系統的な扱いを視野に入れて」都留文科大学研究紀要　第 88 集