Title	数学の受験テクニック再考 : 構成主義者M. Simonのアプローチを応用した入試問題分析
Author(s)	上ヶ谷, 友佑
Citation	中等教育研究紀要 /広島大学附属福山中・高等学校 , 63 : 25 - 32
Issue Date	2023-05-31
DOI	
Self DOI	10.15027/53932
URL	https://doi.org/10.15027/53932
Right	
Relation	

数学の受験テクニック再考
－構成主義者 M. Simon のアプローチを応用した入試問題分析－

上ヶ谷　友佑

本稿は，受験テクニックを悪しきものとして一蹴してしまわず，大学入試問題の解決にあたってどのような能力が実際に必要であるかを検討・吟味し，数学教育への示唆を得ることを目的とした入試問題分析を行う。本稿では，試みに東京大学の令和 4 年度第 2 次学力試験「数学 (理科)」大問 2 を分析対象とし，M. Simon らの提唱する Learning Through Activity アプローチによる概念的学習の視座と，G. ポリアによる問題解決ストラテジーの視座からの特徴付けを行った。結果，分析対象となった問題が概ね，数学教育研究として重要視されてきた概念的学習と問題解決学習の双方の成果を総合的に問う問題になっているということが示唆された。また同時に，概念的学習と問題解決学習だけでは達成し得ない技能として，「1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かす」という技能の存在が指摘された。この技能は，数学者が証明をする理由とも密接に関わる技能であり，単なる受験テクニックと捉えるべきではない。今後の課題としては，推論主義と呼ばれる哲学の視座からこの問題にアプローチできる可能性を示した。

１．はじめに：TOEIC[1)]の世界はユートピアらしい

筆者の手元にある TOEIC の試験対策本によると，TOEIC では，ブラック企業やサービス残業に関する場面は出題されないそうだ。代わりに，コピー機の紙詰まりだったり，結婚式とスポーツ観戦のダブルブッキングだったりが起こりがちらしい (TEX 加藤, 2022)。筆者はこれを読んで，優しい世界観に羨ましさを感じ，思わず笑ってしまったのだが，同時にハッとさせられもした。世の中の受験テクニックというのは，こういうもののことを言うのだ，と。すなわち，受験テクニックとは，

① 本来測定したいはずの能力が十分身についていなかったとしても正解に接近することのできる知識や技能であり，

② 当該の能力とは無関係な知識や技能のこと

である。先の例の場合，TOEIC 受験時に，英語の能力が十分でなくても，ホワイト企業的な発想で正解を選ぶことができるかもしれないし，結婚式やスポーツ観戦に関する単語はたくさん覚えておこうということにもなる。このような対策を講じられては，本来測定したいはずの能力が測定できないかもしれない。

さて，この視点から数学の受験テクニックについて考えてみよう。すると，TOEIC の例とはその構造がいささか異なることに気付く。例えば，ロピタルの定理は，容易に極限値を得ることのできる大学入試の裏技として名高いが，このロピタルの定理は，上で示した①の条件を満たすものの，②の条件を満たさない。すなわち，ロピタルの定理も，数学的に正統な極限値を求める手段であり，無関係な知識・技能というわけではなく，数学的に非本質的な禁じ手であると呼ばれるいわれはない。ロピタルの定理は適用条件が複雑で正しく使うことが難しいため，受験生には安易に勧めにくいのだが，なんだったら，「使い方が難しいから使わない」と考える方が，②の条件を満たすテクニックのようでさえある。

これまでの数学教育研究においても，入試問題を授業で肯定的に活用しようとする研究はわずかながら存在する (石井ら, 1978; 菅野ら, 2007)。しかし，それらの力点はあくまでも入試問題の活用であって，入試制度やそれに付随する知識の分析が対象になっているわけではない。歴史を振り返ると，1869 年に世界初の教科教育者の協会「幾何学教授法改良協会」(AIGT) (Howson & Rogers, 2014 参照) が設立された当初から幾何教育改革と大学入試との関係性が取り沙汰されており (Siddons, 1936)，教育改革と大学入試の関係性の考察は，教科教育研究の由緒正しい問題である。そのため，受験テクニックをいたずらに敵視したり，存在しないものとしてみなしたりすることは，近年になって構築された歴史の浅い文化的偏見であり，教育を科学的に探究する上で足枷となり得る。受験テクニックの知識としての「生存可能性」(von Glasersfeld, 1995) や大学入試の制度としての社会学的意味をきちんと受け止め，先入観に囚われない研究が必要なのである。

本稿の目的は，大学入試問題の解決にあたってどのような能力が必要かを検討・吟味し，数学教育への示唆を得ることである。本稿の構成は以下の通りである。まず，Derry (2008) の主張を参考に，受験テクニックという概念が幻想であることを指摘し，入試問題の解決に要する

能力が受験テクニックであるとして一蹴してしまわずに，きちんとした理論的枠組を設けて丁寧に分析する必要がある点を論じる (第 2 節)。次に，東京大学の入試問題を 1 題選び，Simon (2017b, 2020) の提唱する Learning Through Activity アプローチ (以下，LTA アプローチ) の視座とポリア (1954) の問題解決ストラテジーの視座から特徴付けることを試みる (第 3 節)。最後に，入試問題分析の結果が，Simon (2017b, 2020) とポリア (1954) の枠組によって概ね特徴付けられる問題であることと，それらによってでは特徴付けられない部分も，Rav (1999) の「証明が方法の伝達の役割を果たしている」という視座から特徴付けられることを指摘し，数学教育への示唆を導く。最後に，結論と今後の課題を述べる (第 5 節)。

２．受験テクニックという幻想

前節では，数学の受験テクニックの例としてロピタルの定理を挙げたが，数学の受験テクニックの中にも，条件①と条件②の両方を満たすものがあるかもしれない。そしてもし存在するとすれば，注目すべきは条件②であろう。一般的に言って数学の場合，①のみを満たす知識や技能は，「別解」となる可能性があり，価値があるものとさえ見なされ得る。

では，なぜ条件②を満たすテクニックが悪者扱いされ得るのか？ あり得る 1 つの理由は, 条件②を満たす知識や技能を利用しようとする発想は，本来習得すべき能力の習得を回避しているように見えるからであろう。また，条件②を満たすテクニックが，本来身につけるべき能力と比較して習得が容易である (と信じられている) 場合があることも，輪を掛けて状況を悪化させている。本来身につけるべき能力の習得をなおざりにして，本質的ではない安易なテクニックの習得で事態を切り抜けようとする生徒がいたならば，教育者は学習姿勢が望ましくないとしてその生徒を指導しなければならない。したがって，教育の文脈においては，「だから受験テクニックは悪なのだ」というロジックに陥る。しかし，このようなロジックが，評価する側と評価される側の非対称な権力関係を暗黙裡に仮定してしまっていることには注意すべきである。「本来身につけるべき能力の習得をなおざりにしている生徒」という見方も成り立つが，「本来身につけるべき能力以外の方法で解けてしまう問題を作る出題者」という見方も成り立つはずである。悪いのは，受験テクニックでも，安易にそこへ流れる生徒でもなく，適切な試験の開発ができていない評価者かもしれない。

また，「本来身につけるべき能力」という教育者の見方にも問題がある。その能力なしで問題が解けてしまうのであれば，その能力は果たして必要なのであろうか？ もっと言えば, その能力に価値があるのであろうか？ これに関連して，教育哲学者で Vygotsky 研究者である Derry (2008) は，抽象的合理性の存在を否定する論考を展開している。これまでの教育研究は，生活的概念に対する科学的概念の優位性を仮定してきた。こうした仮定は，生活的概念に基づく思考が状況依存的であるのに対して，科学的概念に基づく思考が状況に依存せず普遍的に有効であるという考え依拠している。しかし，Bakker & Derry (2011) が指摘するように，文脈と内容は不可分に結びついているため，文脈との関連性を持たずに獲得される抽象的な概念は，どんな文脈においても発揮されるというよりは，どんな文脈においても発揮されないという危険性もある。つまり，場合によっては，教育者によって存在が自明視されている「本来身につけるべき能力」というものが，そもそも意味のある形で存在するかどうかが怪しいのである。

このように考えると，実は本稿冒頭で紹介した TOEIC についても，同じことが言える。「ブラック企業やサービス残業が存在しない世界設定の TOEIC で, 現実世界で真に必要な英語力を測定することができるのか？」という問いを立てることもできるが，そうではなくて，「TOEIC で測定できる英語の能力だけでは，ブラック企業やサービス残業が存在する現実世界で有効な状況判断ができないのではないか？」という問いを立てることもできるのである。

少し例を変えて説明しよう。例えば，午前 9 時に上司から日本語で「今から 2 時間後に来て」と言われて午前 11 時に上司を訪ねることができる力は，日本語の能力であろうか？ それとも，$9+2=11$ という計算が含まれており，これは純粋な日本語の能力ではなく，算数の能力を含んでいる, と考えるであろうか？ このように考えると，日本語の能力であるとか算数の能力であるとか，一般化した形で能力に名称を与えるということが無意味であることが見えてくる。重要なことは，午前 9 時に上司から「今から 2 時間後に来て」と言われて午前 11 時に上司を訪ねるべきだと判断できる，この状況に即したその判断能力なのであって，文脈に依存せず発揮される得る日本語の能力や算数の能力ではないのである。あるいは, 一般化された形の能力の存在を仮定するのであれば, この文脈において日本語の能力単体と算数の能力単体では威力が発揮され得ず，それらを総合的に利用する能力が必要であるとさえ言える。

このような視点で TOEIC の例に戻ろう。この視点から見れば，TOEIC は，純粋に英語だけの能力を測定しているのではなく，英語の能力を中心とした，様々な複合的な能力を測定していることになる。しかし，いくら複合的な能力の測定になっているからといって，TOEIC で積分の問題が英語で出題されたならば，常識的には過剰な

出題だと感じるであろう。TOEIC の世界設定にブラック企業やサービス残業が存在しないのは，これと同じであると考えることができる。すなわち，それが出題されたならば過剰な出題になってしまうのである。残念ながら，ブラック企業やサービス残業の問題に英語で対処する能力は，TOEIC の出題範囲外なのである。

そういうわけで，本稿の冒頭では受験テクニックを条件①と条件②で規定したが，真に両条件を満たす知識・技能は存在しない。測定したい能力と同じ場面で発揮し得る知識・技能であるならば，もはやその能力と知識・技能を無関係と呼ぶことはできない。その能力と知識・技能の両方を有する人にとって，その問題は，その問題をどちらで解決すべきかの選択に迫られる問題であり，そういう意味で関係性がある。条件②は自己矛盾しているのである。

したがって，測定したい能力と受験テクニックを差別化するための唯一の規準は，教育者が測定したいと思うかどうかにかかっている。ある能力によって解決されることが想定された問題が，別の知識・技能で解決可能であったとき，その別の知識・技能による解決が別解として価値を付与された場合は，その知識・技能も測定したい能力の一種として扱われるが，そうでなかったならば，その知識・技能は受験テクニックと呼ばれるのである。すなわち，「受験テクニック」とは，その知識・技能を受験テクニックという型に押し込めて価値の低いものに貶めたいと思う教育者や，意図しない方法で解いてほしくないと考える出題者の願望が作り出す幻想である。

実際，いわゆる「受験テクニック」も，見方を変えれば立派な「数学的な見方・考え方」となる場合がある。例えば，変数に様々な値を代入して具体的な数で状況を把握する力は，しばしば「実験力」と呼ばれ，いわゆる受験テクニックとして重要であるとされるが (露木, 2009)，同時に，問題を特殊化して理解しようと努めることは，ポリア (1954) の問題解決ストラテジーにも含まれる由緒正しきテクニックでもある。問題解決に寄与する知識・技能があるならば，受験テクニックであるとして一蹴してしまわずに，丁寧にその真価を検討すべきである。

３．LTA アプローチによる入試問題分析

前節での検討を踏まえると，ある知識・技能が客観的に見て受験テクニックであるかどうかを判定することに科学的な意義はない。重要なことは，数学的な問題を与えられたときに，その問題が実質的にどんな能力や知識・技能を要求しているかを分析できることであろう。そこで本稿では，構成主義者 M. Simon らによる一連の研究で提唱されている LTA アプローチとその概念的分析の手法に着目する (例えば，Simon et al., 2010; Simon, 2017a, 2017b, 2020; Simon et al., 2004; Simon & Tzur, 2004)。また，この手法を用いて試みに東京大学の令和 4 年度第 2 次学力試験「数学 (理科)」大問 2 を分析する。

(1) LTA アプローチと概念的分析

まずは LTA アプローチと概念的分析について概説しよう。LTA アプローチを通じた概念的学習の例としては，同分母分数の除法がしばしば取り上げられる (Simon et al., 2010; Simon et al., 2018)。すなわち，学習者は，初め $\frac{7}{8} \div \frac{3}{8}$ を計算するときは，図をかいて商 $2\frac{1}{3}$ を得ていたとしても，$\frac{7}{25} \div \frac{3}{25}$ や $\frac{7}{103} \div \frac{3}{103}$ といった同種の計算を繰り返し行う過程で，同分母分数の除法の商は，分母に依らず分子同士の商となるという性質に気付いていき，その論理的必然性が学習されるようになる。LTA アプローチでは，同種の過程を繰り返し経験する中で最後に働く抽象化作用を「反省的抽象」と呼び，構成主義の概念的学習における教育的なねらいとして捉える [2]。

LTA アプローチは，現状，小学校段階での研究が中心であるが，中学校・高等学校はもちろん，大学レベルでの数学の研究者の学習にまで適用可能な理論として開発が進められている (Simon et al., 2010)。特に Simon (2017a) では，「数学的概念とは，反省的抽象の結果であり，学習者の活動に基づく学習された期待のことである」(p. 122，強調原文) と数学的概念が規定されており，反省的抽象によって得られるような数学的関係性がそこにあるのであれば，例えば，自然数・三角形・関数などという，馴染みのある名前がついていなかったとしても，LTA アプローチにおいては数学的概念として扱われる。したがって，LTA アプローチの観点からは，教科書に用語として登場するような数学的概念に限定されない広い視座からある数学的問題がどのような概念的学習に寄与し得るかを分析することが可能であり，本稿ではこれを概念的分析と呼ぶことにする。上ヶ谷 (2022) では，この概念的分析が入試問題分析として有用であることを例証しており，本稿でもこれに取り組む [3]。

(2) 分析対象

本稿では，東京大学の令和 4 年度第 2 次学力試験「数学 (理科)」大問 2 を分析対象とする。問題は図 1 の通りである (以下，問題 A と呼ぶ)。

問題 A では，非常にシンプルな漸化式で与えられる数列でありながら，n と a_n に興味深い関係性が見られる。一般に，有理整数の数列 $\{u_n\}$ について，r が s を割り切るときはいつでも u_r が u_s を割り切るならば，その数列 $\{u_n\}$ は可除性数列 (divisibility sequence) と呼ばれる (Ward, 1939)[4]。問題 A の数列 $\{a_n\}$ は可除性数列

の一種であり，大雑把に述べれば，(1) を手掛かりに (2) で可除性を見出し，(3) でその性質を応用するという展開の問題ということになる。

問題 A を分析対象とした理由は，可除性数列という教科書には登場しない数学的対象の性質を探究させる問いになっており，結果的にどんな能力が要求されているのかが分析してみないことには判断しづらい問題となっている点にある。この意味で，入試問題らしい入試問題である。

(3) 分析方法

本稿では，どのような考え方を進めていくことで問題 A を解決することができるかという視点で検討を行い，解決過程の道筋の一例を構成することを試みる。もちろん，問題 A の解決過程には，いくつかの道筋が考えられるが, それらすべてを網羅的に扱うことはできないため，ここではその一例を分析する。その際，構成される道筋は大きく分けて 2 つの要素から構成されることになる。第一に，LTA アプローチが想定する反省的抽象が構成要素となる。問題中のパターンを見抜くという行為は，ほとんど例外なくこの「反省的抽象」で捉えることができると思われるので，どのような反省的抽象が問題解決中に生じる必要があるかを分析する。こうして同定される反省的抽象は，その問題が扱う数学的概念に固有の現象として理解される。第二に，一般的な問題解決ストラテジーが構成要素となる。本稿では特に，ポリア (1954) で紹介されている問題解決ストラテジーが有効であると思われる場合を構成要素として抽出する。反省的抽象は，あくまでも数学的概念が関わる認識作用であるが，反省的抽象だけで問題が解決できるわけではない。問題で扱われている数学的概念に依存しないストラテジーが重要となる場面もあり得る。したがって，この 2 要素で問題 A の解決過程を捉えていくこととする。ただし，分析の過程で，この 2 要素に還元しづらいものが見出された場合は，都度，特筆していくことする。

(4) 分析結果

① 問題 A (1) について

まず，問題 A (1) に取り掛かる前に，与えられた漸化式がどんな数列を生成するのか，具体的に把握しておくことが重要であろう。これは，ポリア (1954) の問題解決ストラテジーの「特殊化」に相当する。初項から順に計算してみると，初項から第 6 項までの様子は表 1 のようになる。すると，問題 A (1) は，少なくとも $n = 3$ の場合に正しいことが確認できる。

さて，問題 A (1) については，すべての自然数 n についての命題を証明する問題で，かつ，漸化式に関する問題であると捉えれば，数学的帰納法で解くことができる問題であると考えることができる。ただし，数学的帰納法を利用するとすれば，証明したい命題それ自身が「正の整数 n が 3 の倍数のとき」という条件付きの命題になっているため，「$n = k$ のとき……」という数学的帰納法の書き方との関係で, 混乱が生じやすいと思われる。したがって，数学的帰納法という論法を繰り返し経験する過程で反省的抽象を達成し，「数学的帰納法によって，$P(1)$ が成り立つことと，任意の自然数 k について $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ が成り立つことから，任意の自然数 n について $P(n)$ が成り立つことを主張できる」という論理的必然性を学習しておく必要がある。また，任意の正の 3 の倍数が，自然数 n を用いて $3n$ と表現し得る点についても反省的抽象を経験できていれば，証明すべき命題を「任意の自然数 n について，a_{3n} は 5 の倍数である」と捉え直すことができる。このように捉え直せば，「a_{3k} が 5 の倍数であると仮定して，$a_{3(k+1)}$ も 5 の倍数になることを示す」という形で数学的帰納法の論証を書きやすくなる。すなわち，$a_{3k} \equiv 0 \pmod 5$ を仮定して，

$$\begin{aligned} a_{3k+1} &\equiv a_{3k}^2 + 1 \equiv 1 \\ a_{3k+2} &\equiv a_{3k+1}^2 + 1 \equiv 2 \\ a_{3(k+1)} &\equiv a_{3k+2}^2 + 1 \equiv 5 \equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

が証明の肝の部分となる。

② 問題 A (2) について

問題 A (2) については，必要十分条件それ自体をどのように記述するかという点からが問題であり，一筋縄ではいかない。表 1 と (1) より，n が 3 の倍数のとき，a_n

> 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．
>
> $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$
>
> (1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ．
>
> (2) k, n を正の整数とする．a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k, n を用いて表せ．
>
> (3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ．

図 1: 問題 A (東京大学 2022　数学 (理科) 大問 2)

表 1: 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 6 項まで

n	a_n
1	1
2	2
3	5
4	26
5	677
6	458330

が a_3 の倍数であることを示せているから，素直に誘導に従うならば，n が k の倍数であることと，a_n が a_k の倍数であることが必要十分条件になっていると予想するのが自然であろう。問題解決者は，ここで可除性を見出すことになる。このアプローチは，ポリア (1954) の問題解決ストラテジーとしては「似た問題を知っているか」に相当するであろう。しかし，反省的抽象の観点からは，問題 A (1) の命題を一般化して予想を構築したのに合わせて，問題 A (1) の証明を一般化して予想の証明を構築するという点に難しさがある。一度きりしか経験することのない問題 A (1) の過程から反省的抽象を達成するにあたっては，LTA アプローチが仮定するような繰り返しの経験によって自然に反省的抽象が達成されるというよりは，意識的に反省的抽象を実行しようと試みなければならないように思われる。

こうした点を踏まえて，問題 A (2) について具体的に考えていこう。まずは「n が k の倍数である ⇒ a_n が a_k の倍数である」について考える。問題 A (1) と同様に，証明すべき命題を「任意の自然数 n について，a_{kn} は a_kの倍数である」と捉え直すことにしよう。このように捉え直せば，「a_{km} が a_k の倍数であると仮定して，$a_{k(m+1)}$ も a_k の倍数になることを示す」という形で数学的帰納法の論証を書きやすくなる。a_{km} が a_k の倍数であると仮定した場合の証明を途中まで構想してみよう。すなわち，$a_{km} \equiv 0 \pmod{a_k}$ を仮定して，

$$\begin{aligned} a_{km+1} &\equiv a_{km}^2 + 1 \equiv 1 \\ a_{km+2} &\equiv a_{km+1}^2 + 1 \equiv 2 \\ a_{km+3} &\equiv a_{km+2}^2 + 1 \equiv 5 \\ a_{km+4} &\equiv a_{km+3}^2 + 1 \equiv 26 \qquad \pmod{a_k} \end{aligned}$$

この調子で，$a_{k(m+1)}$ まで計算をしていくことになる。

ただ，k が文字で与えられているせいで，どこまで計算をすればよいのかが確定できない。そこで改めて重要になるのが，具体例で確認するポリア (1954) の「特殊化」である。「mod a_k なので対処できない」と途中でやめてしまわずに，具体的に計算をしてみることが寛容である。実際，$a_{km+} \equiv 1$，$a_{km+} \equiv 2$，$a_{km+} \equiv 5$，$a_{km+} \equiv 26$ という並びを見れば，表 1 と同じであることがわかる。つまり，

$$\begin{aligned} a_{km+} &\equiv a_{km}^2 + 1 \equiv a_1 \\ a_{km+} &\equiv a_{km+}^2 + 1 \equiv a_2 \\ a_{km+} &\equiv a_{km+}^2 + 1 \equiv a_3 \\ a_{km+} &\equiv a_{km+}^2 + 1 \equiv a_4 \qquad \pmod{a_k} \end{aligned}$$

ということである。そして，このことは，合同式の性質から，$a_{km+} \equiv a_1$ が確定した段階で，それ以降は漸化式を通じて $a_2, a_3, a_4, \cdots$ と生成されていき，一般に $a_{km+} \equiv a_c$ (ただし，$c = 1, 2, 3, \cdots, k$) が成り立つ論理的必然性が見えてくる。これもまた 1 つの反省的抽象であり，この反省的抽象を達成したならば，「$a_{km} \equiv 0 \pmod{a_k}$ を仮定したならば，$a_{k(m+1)} \equiv a_k \equiv 0 \pmod{a_k}$ が成り立つ」ということが認識される。

ここまでで随分と骨が折れた感覚さえ覚えるが，この問題はこれだけでは終われない。逆命題「a_n が a_k の倍数である ⇒ n が k の倍数である」も示さなければならない。しかし，先程の反省的抽象によって，見通しは十分であるように思われる。ポリア (1954) の「結果を利用できないか」である。与えられた漸化式より，$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k$ であることから，$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{k-1}$ は，a_k を法として互いに合同ではない。したがって，先に確認した $a_{km+c} \equiv a_c$ (ただし，$c = 1, 2, 3, \cdots, k$) を踏まえると，a_k を法として 0 と合同になるのは，m を自然数として a_{km} の形で表せるものに限られる。状況を整理すると，表 2 のようになる。

③ 問題 A (3) について

問題 A (1) では，n が 3 の倍数である場合が問われた。2022 も 3 の倍数であるから，これを手がかりに解決を進めていくことになるであろう。ポリア (1954) の「似た問題を知っているか」のストラテジーである。a_{2022} は，まず 5 の倍数である。このように見ると，8091 も 3 の倍数であるから，$(a_{8091})^2$ は 25 の倍数であるということになる。

こうして，少なくとも 5 は公約数になることがわかるが，これだけではそれ以上はわからない。そこで，表 2 が活きてくる。ポリア (1954) の「結果を利用できないか」である。「n が k の倍数である ⇔ a_n が a_k の倍数である」を示す過程で表 2 を作成できるような反省的抽象を達成できていたならば，表 2 は，「n を k で割った余りは c である ⇔ a_n を a_k で割った余りが a_c である」ということを意味する。8091 を 2022 で割った余りは 3 であるから，a_{8091} を a_{2022} で割った余りは $a_3 = 5$ である。つまり，

表 2: 数列 $\{a_n\}$ の第 $(km+1)$ 項から第 $k(m+1)$ 項までを a_k で割ったときの余り

項	余り
$km+1$	a_1
$km+2$	a_2
$km+3$	a_3
⋮	
$km+(k-1)$	a_{k-1}
$k(m+1)$	0

$$a_{8091} \equiv 5$$
$$(a_{8091})^2 \equiv 25 \quad (\mathrm{mod}\ \ a_{2022})$$

である。これより，求める最大公約数は 5 か 25 ということになる。こうして，a_{2022} が 25 で割り切れるならば最大公約数は 25，そうでないならば最大公約数は 5 ということになる。

a_{2022} が 25 で割り切れるかどうかを直接調べることは難しいが，ポリア (1954) の「一般化」のストラテジーを適用し，一般化して解こうとすれば，すぐに結論が得られる。すなわち，

$$a_1 \equiv 1$$
$$a_2 \equiv 2$$
$$a_3 \equiv 5$$
$$a_4 \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ \ 25)$$

であるから，a_n を 25 で割った余りは 1, 2, 5, 1, 2, 5, … と循環し，a_n が 25 で割り切れることはない。

以上より，a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数は 5 であるということになる。

④ まとめ

分析結果をまとめると，表 3 の通りとなる。表 3 より，問題解決ストラテジーと反省的抽象を複数回適用することで問題解決がなされ得ることがわかる。ただし，LTA アプローチが仮定している反省的抽象は繰り返しの経験を伴うが，問題 A (2) においては，繰り返しのないままに反省的抽象を達成せざるを得ない解決過程が見出された。「似た問題を知っているか」という問題解決ストラテジーが契機として達成され得る反省的抽象であるとはいえ，そのストラテジーのみで達成できると楽観視することも適当ではなく，特筆に値する過程である。

表 3: 問題 A の解決過程の分析結果

小問	構成要素	備考
(1)	ストラテジー	特殊化
	反省的抽象	数学的帰納法の論理的必然性
	反省的抽象	倍数表現の論理的必然性
(2)	ストラテジー	似た問題を知っているか
	反省的抽象*	問題 A (1) を一般化した場合の論理的必然性
	ストラテジー	特殊化
	反省的抽象	表 2 の論理的必然性
	ストラテジー	結果を利用できないか
(3)	ストラテジー	似た問題を知っているか
	ストラテジー	結果を利用できないか
	ストラテジー	一般化

* 繰り返しのない中での反省的抽象が必要

４．考察

分析の結果，問題 A は，高難度な問題ではあるかもしれないが，表 3 に示すような反省的抽象と問題解決ストラテジーによって解決することのできる (少なくとも，解決に見通しを持つことができる) 問題であることがわかった。すなわち，LTA アプローチによって示される概念的学習と，ポリア (1954) の問題解決アプローチの組み合わせによって解決可能な問題である。しかし，今回構成した問題解決の道筋の一例においては，問題 A (2) については，LTA アプローチが必ずしも想定していないような，繰り返しのない中での反省的抽象が必要であることもわかった。

問題解決の道筋は一通りではないため，他の道筋を検討すれば，こうしたイレギュラーな展開を回避することもできるかもしれない。しかし，問題 A (1) が (2) に対する誘導問題として設定されているであろうことを踏まえると，繰り返しのない中での反省的抽象を実行することが自然な道筋の 1 つであるように思われる。

LTA アプローチは，問題解決学習が強い問題解決者を想定しているという点に課題意識を有しており (Simon, 2017b)，そうであるがゆえに，必ずしも強くない問題解決者に配慮した，繰り返しを通じた反省的抽象を引き起こす課題が適切な課題設計であると考えられている。しかし，逆に言えば，何が強い問題解決者を強い問題解決者たらしめるかについて，LTA アプローチは十分な検討を加えていない。そういう意味では，今回の分析は，LTA アプローチが単に「強い問題解決者」という呼称で片付けてしまった，その強さの内実に迫る結果を示唆しているとも考えられる。すなわち，問題 A が高難度の入試問題であるため，強い問題解決者でなければ解けない設定になっており，その設定とは，「繰り返しのない中での反省的抽象」である。数学的問題解決の中には，LTA アプローチが想定するような繰り返しのある中での反省的抽象ばかりでは解けない問題というものがあり得，LTA アプローチでは，繰り返しのない中での反省的抽象が必要な問題解決能力を身につけることができない。東京大学で出題されるような，問題 A ほど高難度な問題でなくとも，1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かすという形の誘導は，他の入試問題でもあり得るパターンであると考えられ，この点は LTA アプローチの課題として捉えてよいであろう。

もちろん，概念的な理解が達成できさえすれば，主体的に問題解決ができなくても，数学教育の目標としては十分に達成である，と捉えるならば，この点はあまり気

にならないかもしれない。しかし，問題が解けないような理解に価値があるのかという考え方は常に付きまとうであろう。

実際，本稿の前半で検討したように，こうした「1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かす」という技能を，単なる受験テクニックに過ぎないと一蹴することがあってはならない。Rav (1999) が論じたように，数学者が証明をする理由の 1 つには，方法の伝達という側面がある。問題 A (1) から，繰り返しがなくとも意識的に反省的抽象を達成しようとする態度は，ある命題の証明が別の命題の証明方法を示唆しているということを自覚している必要があると思われる。Hanna & Barbeau (2008) は，この考え方を学校教育にも取り入れることを提案しているが，問題 A (2) が解けるようになるためには，まさにこの考え方を学んでおく必要があることを示唆している。「1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かす」という形の技能も，証明の役割についてのメタ的な理解を実践的に問うていると見れば，数学教育研究がきちんと扱うべき研究対象であると言える。

なお，近年，注目されつつある推論主義の視座は，概念使用の実際に基づいて概念理解を考える立場を表明している (Bakker & Derry, 2011; Derry, 2008; Uegatani & Otani, 2021)。本稿では，Derry (2008) に基づいて受験テクニックという概念が幻想であると指摘したが，これもこの視座から論じられるものである。推論主義の視座から見れば，概念は使用できて初めて理解していることになる。「1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かす」という形の技能は，一般的な問題解決ストラテジーであると見ることもできると同時に，反省的抽象の一種であると考えれば，概念の理解の問題でもある。問題解決ストラテジーを身に付けさえすれば良いと簡単には言えない点で，複雑な能力が問われている。したがって, 必ずしも強くない問題解決者に配慮した LTA アプローチでは育めない能力が何であるかについては，この推論主義の視座からさらに探究することができるであろうし，進めていかなければならないであろう。

５．おわりに

本稿は，大学入試問題の解決にあたってどのような能力が必要かを検討・吟味し，数学教育への示唆を得ることを目的とし，入試問題分析を実施した。本稿では，まずは Derry (2008) の主張を参考に，受験テクニックという概念が幻想であることを指摘し，入試問題の解決に要する能力が受験テクニックであるとして一蹴してしまわずに，きちんとした理論的枠組を設けて丁寧に分析する必要がある点を論じた。そして，東京大学の入試問題である問題 A を解決する 1 つの道筋について，Simon (2017b, 2020) の提唱する LTA アプローチの視座とポリア (1954) の問題解決ストラテジーの視座から特徴付けることを試みた。結果，問題 A は，Simon (2017b, 2020) とポリア (1954) の枠組によって概ね特徴付けられる問題であり，数学教育研究として重要視されてきた概念的学習と問題解決学習の双方の成果を総合的に問う問題になっているということが示唆された。ただ同時に，問題 A の解決には，LTA アプローチが仮定するような繰り返しのある中での反省的抽象のみならず，繰り返しのない中での反省的抽象が必要である点も示唆された。LTA アプローチは，問題解決学習を強い問題解決者のみに有効な学習であるとして批判的に捉えていたが，そういう意味では，LTA アプローチでは，問題 A を解く能力を育むことができないかもしれない。

本稿では，分析結果の考察を通じて，繰り返しのない中での反省的抽象が，「1 つ前の小問で行った過程を反省して次の小問に活かす」という技能によって達成できる可能性を指摘した。この技能は，ある意味では単なる受験テクニックに見えるかもしれないが，数学者が証明をする理由の 1 つである「証明による方法の伝達」という証明の役割を自覚的に活用する技能でもある。そういう意味で，本稿が Derry (2008) の主張を参考に理論的に論じたように, 受験テクニックとして一蹴してしまわず，今後の研究を通じて丁寧な分析と価値付けが重要である。そして，推論主義と呼ばれる視座が，この研究を進める上で有用であると考えられる。この視座からの詳細な検討については，稿を改めて論じたい。

注釈

1) 国際コミュニケーション英語能力テスト（Test of English for International Communication）の略称。
2) Simon et al. (2018) では，von Glasersfeld (1995) のような構成主義者が精緻に区別したような反省的抽象の分類は示さず，大きな括りで概念化している。
3) LTA アプローチが想定するような，操作の抽象による概念形成のみを概念形成の過程として重視することは理論的バイアスの一種である (Scheiner, 2016)。すなわち，人間による概念形成を検討するにあたっては，反省的抽象のみに過剰焦点化せず，概念の意味付け過程の多様性 (e.g., Scheiner & Pinto, 2019) に配慮すべきである。しかし，こうしたアプローチは実際の学習者の概念形成過程を分析する際に有効であり，数学的問題を分析して 1 つの概念的学習のモデルを構築するにあたっては, 依然として LTA アプローチの観点が有効である。
4) Divisibility sequence の適切な定訳が見当たらなかったので，本稿では「可除性数列」と仮訳する。

参考文献

Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from Inferentialism for Statistics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, *13*(1–2), 5–26. https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538293

Derry, J. (2008). Abstract rationality in education: From Vygotsky to Brandom. *Studies in Philosophy and Education*, *27*(1), 49–62. https://doi.org/10.1007/s11217-007-9047-1

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *40*(3), 345–353.

Howson, G., & Rogers, L. (2014). Mathematics Education in the United Kingdom. In A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 257–282). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-9155-2_13

石井浩・磯野宏美・内田寛・織田和正・小高茂夫・田上正・諸橋孝明 (1978).「授業の幅を広げる工夫: 入試問題の利用」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *60*(11), 248–251.

菅野栄光・下村哲・今岡光範 (2007).「高等学校における発展的な問題作りの授業: 大学入試問題を活用した取り組み」. 日本数学教育学会誌『数学教育』, *89*(7), 2–9.

ポリア, G. (1954).『いかにして問題をとくか』(柿内賢信 訳). 丸善出版.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, *7*(1), 5–41.

Scheiner, T. (2016). New light on old horizon: Constructing mathematical concepts, underlying abstraction processes, and sense making strategies. *Educational Studies in Mathematics*, *91*(2), 165–183. https://doi.org/10.1007/s10649-015-9665-4

Scheiner, T., & Pinto, M. M. F. (2019). Emerging perspectives in mathematical cognition: Contextualizing, complementizing, and complexifying. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(3), 357–372. https://doi.org/10.1007/s10649-019-9879-y

Siddons, A. W. (1936). Progress. Presidential Address to the Mathematical Association, January 1936. *The Mathematical Gazette*, *20*(237), 7–26. https://doi.org/10.2307/3607828

Simon, M. A. (2017a). Explicating mathematical concept and mathematical conception as theoretical constructs for mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(2), 117–137. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9728-1

Simon, M. A. (2017b). Learning through activity: A developing integrated theory of mathematics learning and teaching. *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2754–2761.

Simon, M. A. (2020). Elaborating reflective abstraction for instructional design in mathematics: Postulating a Second Type of Reflective Abstraction. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(2), 162–171. https://doi.org/10.1080/10986065.2020.1706217

Simon, M. A., Kara, M., Placa, N., & Avitzur, A. (2018). Towards an integrated theory of mathematics conceptual learning and instructional design: The Learning Through Activity theoretical framework. *The Journal of Mathematical Behavior*, *52*, 95–112. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.04.002

Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(2), 91–104. https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0602_2

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 305–329.

Simon, M., Saldanha, L., McClintock, E., Akar, G. K., Watanabe, T., & Zembat, I. O. (2010). A Developing Approach to Studying Students' Learning through Their Mathematical Activity. *Cognition and Instruction*, *28*(1), 70–112. https://doi.org/10.1080/07370000903430566

TEX 加藤 (2022).『TOEIC L&R TEST 出る問 特急 金の文法』. 朝日新聞出版.

露木繁 (2009).『難関大突破 数学の底力—Top Grade』. 学研プラス.

上ヶ谷友佑 (2022).「数学の大学入試問題と構成主義における概念的学習」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *46*(3), 271–274. https://doi.org/10.14935/jssej.46.271

Uegatani, Y., & Otani, H. (2021). A new ontology of reasons for inferentialism: Redefining the notion of conceptualization and proposing an observer effect on assessment. *Mathematics Education Research Journal*, *33*, 183–199. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00289-8

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. The Flamer Press.

Ward, M. (1939). A note on divisibility sequences. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *45*(4), 334–336. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-06980-2