天野秀樹・北臺如法(2023),「関数指導において子どもの思考を把握する枠組み」,広島大学附属東雲中学校研究紀要「中学教育第 52 集」,50－56.

関数指導において子どもの思考を把握する枠組み

天野　秀樹　・　北臺　如法*

1．はじめに

小倉（1921）は，円の半径が大きくなれば円の面積も大きくなることを例にあげて，学校教育で関数の概念を取り扱う重要性を述べている。わが国の中学校数学科授業では，戦前から現在に至るまで，関数の概念を獲得させることの重要性を意識して，さまざまな指導法の工夫がなされてきている。

それにもかかわらず，**図１**に示すように，令和４年度の全国学力・学習状況調査における中学校数学の大問４番の正答率は 38.7%である（文部科学省，2022)。子どもたちが関数の概念を獲得する状況は十分とは言い難く，関数の授業研究が大切である所以が分かる。わが国の中学校数学科授業に関する実践研究において，関数指導にかかわる研究は多くなされている。例えば，第 104 回全国算数・数学教育研究大会の中学校部会における「関数」分科会では，５本の研究発表が行われている（日本数学教育学会，2022)。そのうち，関数の指導内容や指導方法にかかわる研究発表は４本ある。一方で，関数指導における子どもの思考にかかわる研究発表は１本しかない。日々の関数の授業実践において，指導内容や指導方法を考察する研究は不可欠である。しかしながら，子どもたちが関数の概念を十分に獲得できていない状況を鑑みれば，関数の授業で子どもたちがどのように考えを進めているか明らかにする研究が待ち望まれる。

4　下のアからエまでの表は，y が x の一次関数である関係を表しています。この中から，変化の割合が２であるものを１つ選びなさい。

ア

x	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…
y	…	−11	−7	−3	1	5	9	13	…

イ

x	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…
y	…	−5	−3	−1	1	3	5	7	…

ウ

x	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…
y	…	−2	−1	0	1	2	3	4	…

エ

x	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…
y	…	−7	−4	−1	2	5	8	11	…

図１　数学 $\boxed{4}$（令和４年度全国学力・学習状況調査）

奈須（2021）は，子どもたちの思考の進め方はそれぞれ異なるにもかかわらず，わが国の授業では，思考の進め方を暗黙裡に決めて展開していることを懸念している。また，それぞれの子どもたちの得意な思考の進め方を幅広く許容し，それを足場として学びを拡充することが望ましいと述べている。具体例として，理科授業において実験や観察を通して帰納的に法則を導く思考の進め方が決められていることをあげている。そのうえで，最初に法則を知った後に，個々の事例を確認して納得する思考の進め方も認めることを主張している。この奈須の主張は，概念を獲得するための方法は一筋縄ではいかないことを述べるものである。子どもたちの思考の進め方は多様であるからこそ，個別最適な学びを探究する授業研究が必要となる。わが国の関数指導においても，子どもたちの多様である思考の進め方を把握する研究は，子どもたちの関数概念を確かなものにする一助となり得る。

例えば，中学１年の関数指導において，「比例のグラフｙ＝２ｘは直線である」とまとめた場面を取りあげる。この時，「図形としての直線で，まっすぐに伸びている。」と考える人がいる。また，「１単位当たりグラフは，同じペースで縦に２ずつ増えている。」と考える人もいる。さらには，「比例定数が２で一定だから，直線になる。」と考える人もいる。これらのように，子どもたちの捉えは様々である。本研究は，子どもたちの多様である思考の進め方を広く受け止め，そのうえで子どもたちに関数の概念を十分に獲得できるようにすることをめざす。

＊広島大学大学院人間社会科学研究科
Hideki AMANO，Yukinori KITADAI
Framework to catch the children’s thinking in the function teaching

２．研究の目的と方法

本研究の目的は，中学校の関数指導において子どもたちの思考を把握するための新たな枠組みを構築することである。そのために，まず，関数概念の獲得に関する先行研究を概観する。次に，子どもたちの思考を把握する「要素」を抽出して，新たな枠組みを提案する。そして，関数概念の獲得に関する実態調査を実施することで，提案した枠組みが実践場面で活用できるか検証する。

本研究の価値は３つある。１つ目は，関数指導において表出する子どもたちの多様な思考を「要素」から把握でき，子どもたちが思考する実態を理解できることである。２つ目は，構築された枠組みを通して子どもたちの思考を把握できれば，子どもたちの思考に沿った指導につなげられることである。３つ目は，子どもたちの思考に沿って指導することで，子どもたちの関数概念の獲得につなげられることである。

３．関数概念の獲得に関する先行研究

本節においては数学の授業，特に関数の授業で概念を獲得することについての先行研究を概観する。

3-1．数学授業で扱われる概念の獲得について

本小節においては，数学の授業で概念を獲得することについて，理解に着目した先行研究を取りあげる。この研究は，子どもたちのある時点に注目して理解の様相を捉える研究と子どもたちがある期間において理解する過程を捉える研究がある。

3-1-1．理解の様相を捉る研究

Skemp (1971) は，数学の授業で子どもたちが進めている思考について確認することの重要性を述べている。そのうえで，表１のような理解の様相を捉える枠組みを提案している（中原，1995)。

表１　Skemp の理解の様相を捉える枠組み

		理解の種類			
		道具的	関係的	論理的	記号的
心的活動様式	直観的	I_1	R_1	L_1	S_1
	反省的	I_2	R_2	L_2	S_2

道具的理解は理由を知らずして規則を適用することであり，関係的理解は理由を知って規則を適用することである。論理的理解は適切な知識を用いて筋道立てて証拠づけていることであり，記号的理解は数学の記号を適切な考えと結びつけて証拠づけていることである。Skemp はこれら４つの理解それぞれには，直観的レベルと反省的レベルがあるとしている。表１における Skemp の枠組みは，子どもたちの理解の様相を類型化するものである。しかしながら，子どもたちが理解する過程を捉えようとする枠組みではない。

3-1-2．理解の過程を捉える研究

Pirie&Kieren (1989) は，数学の授業で子どもたちが理解を進める過程は，複雑で非線形であると述べている。そのうえで，図２のような理解の過程を捉える枠組みを提案している (Pirie&Kieren, 1994)。

初期の認識，イメージづくり，イメージ所有，性質認知，形式化，観察，構造化，発明の８つの水準が包含関係になり，再帰的に理解の段階が変化するとしている。図２における Pirie&Kieren の枠組みは，子どもたちの理解の過程を定めようとするものである。しかしながら，子どもたちの理解する様相が変更する契機を捉えようとする枠組みではない。

図２　Pirie&Kieren の理解の過程を捉える枠組み

天野秀樹・北臺如法(2023)，「関数指導において子どもの思考を把握する枠組み」，広島大学附属東雲中学校研究紀要「中学教育第 52 集」，50－56.

3-2. 関数指導における概念の獲得について

本小節においては，関数の授業で概念を獲得することについての先行研究を取りあげる。この研究には，数学の内容から捉える研究と数学の方法，とりわけ数学的な考え方から捉える研究がある。また，関数の概念を関数としてではなく，図形として捉える研究もある。

3-2-1. 関数概念を数学の内容から捉える研究

片桐（1988a）は，中学校で指導する比例や１次関数の概念を獲得する数学の内容として，次の３つをあげている。

- 定数，独立変数，従属変数の弁別をする
- 変数ｘ，ｙの関係を適当な表，式，グラフに表す
- 表，式，グラフの特徴を表す

現行の教科用図書（藤井ほか，2020a）において，例えば，中学１年の比例の概念を獲得する数学の内容をあげると，次のようになる。

- 独立変数ｘの弁別をする
- 変数ｘ，ｙの関係を表に表す
- 変数ｘ，ｙの関係を式に表す
- 変数ｘ，ｙの関係をグラフに表す
- 表，式，グラフの特徴を表す
- 従属変数ｙの弁別をする
- 表の特徴を表す
- 定数の弁別をする
- グラフの特徴を表す

関数概念を内容から捉えることについて，それぞれの項目を支える研究は数多くなされている。しかしながら，それらを一体として捉えることは煩雑すぎて，かえって教育効果を期待できる枠組みではない（片桐，1988b）。

3-2-2. 関数概念を数学的な考え方から捉える研究

数学教育の現代化が意識された学習指導要領以降，関数の見方や考え方が重視され，これらの力を育成するための研究が盛んに行われている（大久保，2010）。例えば，小学校において関数概念を数学的な考え方から獲得させる項目として，次の９つをあげている（日本数学教育学会，1970）。

- 集合の意識をもつこと
- 対応する元をみつけること
- 対応の規則性をみつけること
- 代数的な式変形ができるようにすること
- 関数の見方や考え方を用いて問題を解決すること
- 伴って変わる２量の意識をもつこと
- 変数の意識をもつこと
- 対応関係を表・式・グラフに表すこと
- 公式を変量間の関係とみること

現代化が意識された後に改訂された学習指導要領から，学習内容が大幅に削減されたり，上級学年に移行されたりした。しかしながら，それ以降の学習指導要領においては，一貫して次の６つを総合したものが関数概念を数学的な考え方から獲得させる項目といえる（國本，1990）。

- 集合の意識をもつこと
- 数量を変化させて考えること
- 変化の特徴や対応のきまりをみつけること
- 変化の特徴や対応のきまりを利用すること
- ２量の依存関係に着目すること
- 対応のきまりをみつけること

関数概念を数学的な考え方から捉えることについて，数学教育の現代化以降重要視され，学習内容の変遷もあったことを指摘した。その中で，「集合の意識」，「変化の特徴」，「対応のきまり」，「利用すること」については，一貫して関数概念を獲得させる項目となっていることも述べた。

3-2-3. 関数概念を図形として捉える研究

中学２年の教科用図書（藤井ほか，2020b）では，「１次関数ｙ＝２ｘ＋３のグラフは，比例ｙ＝２ｘのグラフをｙ軸の方向に３だけ平行移動させた直線である。」（**図３**）と示している。

比例のグラフは原点を通る直線である。反比例のグラフは双曲線である。１次関数のグラフは比例のグラフを平行移動させた直線である。２乗に比例する関数のグラフは原点を通る放物線である。これらの捉えは，関数の概念を図形として獲得させる事例である。

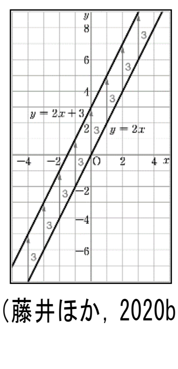

図３　１次関数の問題（藤井ほか，2020b）

天野秀樹・北臺如法(2023)，「関数指導において子どもの思考を把握する枠組み」，広島大学附属東雲中学校研究紀要「中学教育第52集」，50－56.

２元１次方程式のグラフは直線である。熊倉（2006）は，この学習内容は幾何（図形）であると述べている。そのうえで，関数領域の図形問題は，座標平面で代数処理できるよさがあることも指摘している。

関数概念を図形として捉えることについて，中学校の関数指導における各所で取り扱われることを指摘した。したがって，「図形としての捉え」は，関数概念を獲得する要素になり得る。

４．関数指導において子どもの思考を把握する枠組み

本節においては，関数指導において子どもたちの思考を把握する「要素」を抽出する。そのうえで，関数指導において子どもたちの思考を把握する新たな枠組みを提案する。

4-1．関数指導において子どもの思考を把握する要素

前小節において関数概念を内容から一体として捉えることは煩雑すぎることを指摘した。内容から要素を抽出すれば，要素の数が多くなりすぎて，子どもの思考を把握する枠組みとしては，実践場面での活用が難しくなる。そこで本稿では，関数概念を数学的な考え方から捉える研究及び図形として捉える研究から要素を抽出する。

関数概念を数学的な考え方から捉える研究としては，國本（1990）が述べる６項目を整理してまとめると，次の４要素にできる。

要素－Ⅰ．関数を見いだすこと（集合の意識）
要素－Ⅱ．変化（変化の特徴）
要素－Ⅲ．対応（対応のきまり）
要素－Ⅳ．利用すること（利用すること）

関数概念を図形として捉える研究としては，熊倉（2006）ほかが述べているように，関数概念を獲得する要素として，次のように挙げられる。

要素－Ｖ．図形（図形としての捉え）

以上のことにより，関数概念を捉える研究から５つの要素を抽出できた。さらに，これら５つの要素間の構造を分析するとき，「要素－Ⅰ．関数を見いだすこと」を思考の基礎として，「要素－Ⅱ．変化」，「要素－Ⅲ．対応」，「要素－Ｖ．図形」の思考に進むと考えられる。また，「要素－Ⅳ．利用すること」の思考に至る前段階で，「要素－Ⅱ．変化」，「要素－Ⅲ．対応」，「要素－Ｖ．図形」の思考が進むと考えられる。これらのことをまとめると，**図４**のように表すことができる。

「要素Ⅰ．関数を見いだすこと」
↓
「要素Ⅱ．変化」「要素Ⅲ．対応」「要素Ｖ．図形」
↓
「要素Ⅳ．利用すること」

図４　関数概念を捉える５つの要素間の構造

関数概念を捉える研究から抽出された５つの要素を，**図４**のような要素間の構造から見るとき，関数概念の獲得において「要素－Ⅱ．変化」，「要素－Ⅲ．対応」，「要素－Ｖ．図形」の思考が中心に位置づいている。また，中心に位置づいている段階の要素が３つあり，多様である。

本研究では，中学校の関数指導において子どもたちの多様である思考の進め方を把握することをめざしている。したがって本稿では，関数指導における子どもの思考を把握する要素を，「変化」，「対応」，「図形」と選定する。

4-2. 関数指導において子どもの思考を把握する枠組み

前節におけるSkempの枠組み（**表１**）は，理解の様相を類型化する一方で，過程を捉えようとする枠組みではないことを指摘した。また，Pirie&Kierenの枠組み（**図２**）は，理解の過程を定めようとする一方で，様相が変更する契機を捉えようとする枠組みではないことを指摘した。

本研究では，まず，Skempの枠組み（**表１**）を援用して，関数指導において子どもたちの思考の様相を類型化して位置づけられるようにする。また，Pirie&Kierenの枠組み（**図２**）を援用して，子どもたちの思考の過程を位置づけの変更によって定められるようにする。これらのことにより，「関数指導において子どもたちの多様である思考を把握する枠組み」（**図５**）を提案する。

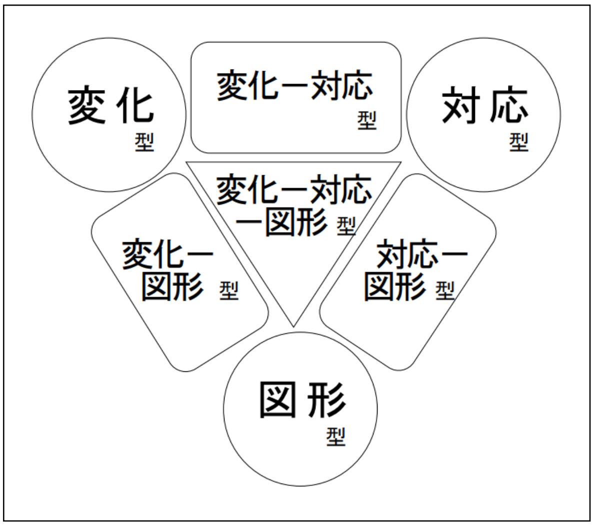

図５　関数指導において子どもの思考を把握する枠組み

図５は，関数指導において子どもの思考を把握する「変化」,「対応」,「図形」といった３つの要素による思考，そして，それらの要素を複数有する思考の７つに類型化した枠組みである。

５．関数概念の獲得についての実態調査

中学１年の比例概念を例にあげる。「比例の表はｘを２倍，３倍,・・・するとｙも２倍，３倍,・・・となる」,「比例の式はｙ＝ａｘである」,「比例のグラフは原点を通る直線である」。これら３つの比例概念を実践者は，比例指導が終わった後にすべての子どもたちに獲得させることをめざして授業を実践する。一方で，奈須（2021）が述べているように，子どもたちの思考は多様で，それぞれの子どもたちで得意な思考の進め方を有している。「変化」の要素で考えることが得意な子ども,「対応」の要素が得意な子ども,「図形」の要素で考える傾向にある子ども，それらの要素を複数混合させて思考を進める子どもなど，多様である。本稿においては，中学１年生に比例概念の獲得状況を調査し，関数指導において子どもの思考を把握する枠組み（**図５**）から分析することを通して，枠組みが実践場面で活用できるかを検証する。このことにより，関数指導において子どもたちが思考する実態を理解したり，子どもたちの思考に沿った指導法を開発したりすることにつなげていく。

5-1. 実態調査の手順

期　　日　　第１回：令和４年１月　６日（木）・・・比例の学習は未習の段階である
　　　　　　　第２回：令和４年２月10日（木）・・・比例の学習が終了した段階である

対　　象　　国立大学附属Ｓ中学１年　80名

調査方法　　第１回，第２回ともに，**図６**のような比例のイメージを自由記述させる調査用紙を配付した。時間は全員が記述し終わったと判断した時間で，８分にした。

分析方法　　調査用紙を回収した後，それぞれの子どもが記述した内容に対して,「変化」,「対応」,「図形」の要素にあてはまる箇所に下線を引いた。また，３つの要素いずれにもあてはまらない場合は，その他として集計することにした。さらに，判別がつかない場合においては，放課後，実践者である筆者がインタビューすることで判別した。例えば,「規則性がある」と記述した内容に対して，筆者が「例えば，どのような規則のことを言っていますか，教えてください。」という要領でインタビューして判別した。第１回は20件，第２回は３件のインタビューをした。

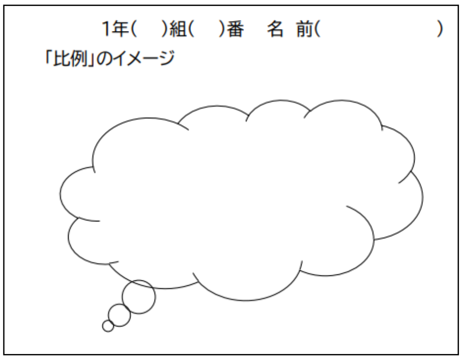

図６　調査用紙「比例」

5-2．実態調査の結果と分析

第１回の実態調査の結果は，**図７**のようになった。

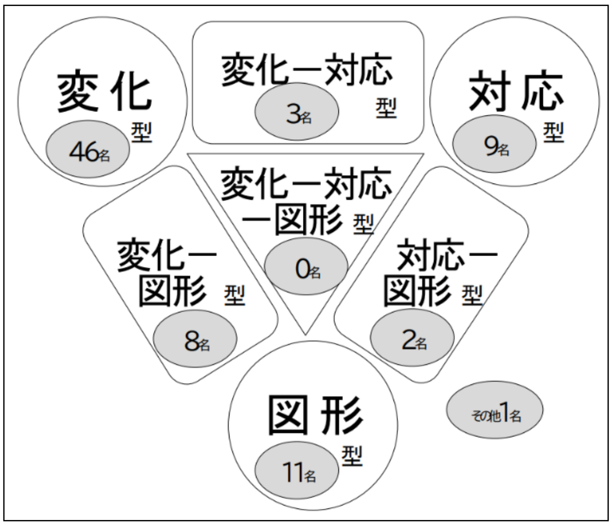

図７　第１回実態調査の結果（比例の学習前）

図７によると，中学１年の比例を学習する前に，変化型の子どもが 46 名で最多であることがわかった。また，対応型の子どもが９名，図形型の子どもが 11 名で，一定数いることがわかった。さらに，変化－対応型の子どもが３名，変化－図形型の子どもが８名，対応－図形型の子どもが２名で，比例の学習前に複数の要素から比例を捉えている子どもが合計 13 名いることもわかった。このことにより比例の学習を進める際に，例えば，「比例の表の特徴を指導するうえで，□□さんは対応型であるため，比例の表を縦に見ようとする。」といったことをあらかじめ予測できる。また，「□□さんは対応型であるため，比例の表を縦以外に見て，何か特徴はありますか。」といった発問をあらかじめ準備しておくこともできる。

図７によって，「学習によって型は変更するのか？」，「それぞれの型にあてはまる子どもに思考の傾向はあるのか？」，「それぞれの型にあった指導法はどのようなものがあるのか？」など，さらなる探究課題が見いだされる。

第２回の実態調査の結果は，**図８**のようになった。

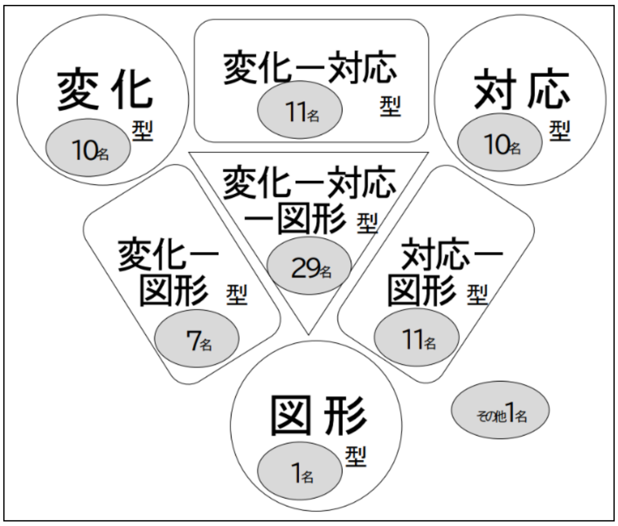

図８　第２回実態調査の結果（比例の学習後）

図７と**図８**によると，比例を学習したことにより，変化型の子どもが46名から10名，図形型の子どもが11名から１名に減少したことがわかった。また，対応型の子どもは９名から10名で，大きく変わっていないことがわかった。さらに，変化－対応型の子どもは３名から11名，対応－図形型の子どもが２名から11名で，変化－対応－図形型の子どもは０名から29名で，比例を学習したことによって，複数の要素で捉える子どもが増加したこともわかった。

図７から**図８**の変容によって，「どういう場面で子どもは型を変更しようとするのか？」，「関数以外の領域の学習でも思考の型が影響しているのか？」，「数学以外の場面での思考の型に影響しているのか？」など，さらなる探究課題が見いだされる。

６．おわりに

わが国の中学校数学科授業において，子どもたちが関数の概念を獲得する状況は十分とは言い難い。それぞれの子どもたちの得意な思考の進め方を足場として拡充される個別最適な学びを探究する授業研究の必要性を奈須（2021）が主張している。そこで本研究では，中学校の関数指導において，子どもたちの多様である思考の進め方を把握するための新たな枠組みを構築することを目的とした。そのために，第一に，数学の授業で概念を獲得することについて，理解の様相を捉えるSkemp（1971）の研究と理解する過程を捉える Pirie＆Kieren（1994）の研究を考察した。そのうえで，関数の授業で概念を獲得することについて，内容から捉える片桐（1988a）の研究と数学的な考え方から捉える國本（1990）の研究，図形として捉える熊倉（2006）の研究を考察した。第二に，先行研究を考察することにより，関数指導において子どもたちの思考を把握する要素として，「関数を見いだすこと」，「変化」，「対応」，「利用すること」，「図形」の５つを特定した。そして，これらの要素間の構造を分析したことから，本稿では，関数指導における子どもの思考を把握する要素を，「変化」，「対応」，「図形」と選定した。そのうえで，７つに類型化した「関数指導において子どもたちの多様である思考を把握する枠組み」（**図５**）を提案した。第三に，令和４年１月から２月にかけて中学１年の子どもたちを対象に，比例の学習前後で比例のイメージを自由記述させる実態調査を実施した。この調査から，構築された枠組みをもとに子どもたちの思考の類型を明らかにできることがわかった。また，子どもたちの思考を事前に予測することや発問等指導法を開発することにつなげられる可能性を見いだせた。残された課題は，各類型の思考傾向，各類型に適した指導法の開発，関数指導による類型の変更，関数の授業で表出する思考とその他の場面での思考の関係などがあげられる。

【　引用・参考文献　】

小倉金之助．数学教育の根本問題．玉川大学出版部．1921.

文部科学省．令和４年度全国学力・学習状況調査報告書－中学校数学－．2022.

日本数学教育学会．日本数学教育学会誌第104回大会発表要旨集．2022.

奈須正裕．個別最適な学びと協働的な学び．東洋館．2021.

Skemp,R. *The psychology of learning mathematics*. Routledge. 1971.

中原忠男．算数・数学教育における構成的アプローチの研究．聖文社．1995.

Pirie,S. ＆ Kieren,T. A Recursive Theory of Mathematical Understanding. *For the Learning of Mathematics*. Vol９．No３．７-11. 1989.

Pirie,S. ＆ Kieren,T. Growth in Mathematical Understanding：How can We Characterise it and How can We Represent it？. *Educational Studies in mathematics*. Vol26. 165-190. 1994.

片桐重男．数学的な考え方の具体化．明治図書．196-222. 1988a.

藤井斉亮ほか．新しい数学１．令和２年文部科学省検定済．東京書籍．113-152. 2020a.

片桐重男．問題解決過程と発問分析．明治図書．193-199. 1988b.

大久保和義．関数の考え・比例．日本数学教育学会．数学教育学研究ハンドブック．東洋館．142-149.2010.

日本数学教育学会．関数とその指導（小学校編）．明治図書．69-72. 1970.

國本景亀．関数的見方・考え方．岩合一男．算数・数学教育．福村出版．104-114. 1990.

藤井斉亮ほか．新しい数学２．令和２年文部科学省検定済．東京書籍．66. 2020b.

熊倉啓之．中学との接続を重視した高等学校の幾何教育に関する研究（第２次）－図形と方程式の指導に焦点を当てて－．静岡大学教育学部研究報告．第37号．49-64. 2006.