

三平方の定理を学習する意義に関する一考察

— 中学生へのインタビュー調査を通して —

天野 秀樹 ・ 真野 祐輔*

1. はじめに

平林(1986)は, 小学校第5学年以上の算数・数学の知識や技能は, 数年後に跡形もなく忘れてしまうが, 末永く身につく考え方や関心・態度のようなものがあると述べている。また, そうした算数・数学学習を支える要因を明らかにすることは, 数学教育研究の重要な課題の一つであると述べている。

国際数学・理科教育動向調査(2019)によれば, 算数・数学の知識や技能面に問題は見られない。しかし, 学習が日常生活に役立つといった情意面は国際平均より下回っている。この現況から, 算数・数学を学習する意義を実感させることが大切であるとわかる。

中学校第3学年の終盤に単元

「三平方の定理」を学習する。三平方の定理は, 直角三角形の3つの辺に対して図1のような関係が成り立つことを表している。このシンプルな定理は中学校数学科で学習する定理の中で最もよく知られているものであるとも言えるかもしれない。この定理は次数が2であり, 平方根や相似の内容とも関連が強く,

義務教育の算数・数学の学習段階として高次の学習内容になる。また, 測定の視点から考える場合, 小学校低学年から児童・生徒は物差しを使って長さを測るという直接測定に慣れ親しんできた。それが, 本単元の学習によって, 他の2つの辺の長さから計算によって長さを求めるという間接測定を習熟することが期待される。

一方, 三平方の定理を学習することにもなって, 義務教育の終盤に生徒たちはどのような思いを抱いているのだろうか。三平方の定理の学習に対して生徒はどのような意義を実感し, どのような態度を形成しているのだろうか。このことが, 本研究の課題意識である。

2. 研究の目的と方法

本研究の目的は, 三平方の定理の学習に対する中学校3年生の生徒たち自身が捉える意義を明らかにすることである。このことは, 前述した平林(1986)の論述や国際調査(2019)の指摘を具現化することにつながると考える。また, カリキュラムの構成者が捉える意義や数学科教師が生徒たちに期待する意義と, 生徒たち自身が捉える意義とは類似点もあれば相違点もあることが予想される。本研究を進める価値は, 学習者の立場から教材の意義にアプローチする点にあるといえる。

そのために, 本研究の方法は, 第一にわが国の数学教育研究における三平方の定理の学習に関する実践研究を中心にレビューする。第二に実践研究を行うが, この実践研究ではまず, 生徒たちが三平方の定理の学習に対する捉えを意識しやすいように年間カリキュラムを構成して実施する。次にインタビュー調査を設計して, 三平方の定理に対して生徒たちが行う意味づけについて考察する。本稿では, インタビュー調査の結果を中心に報告する。

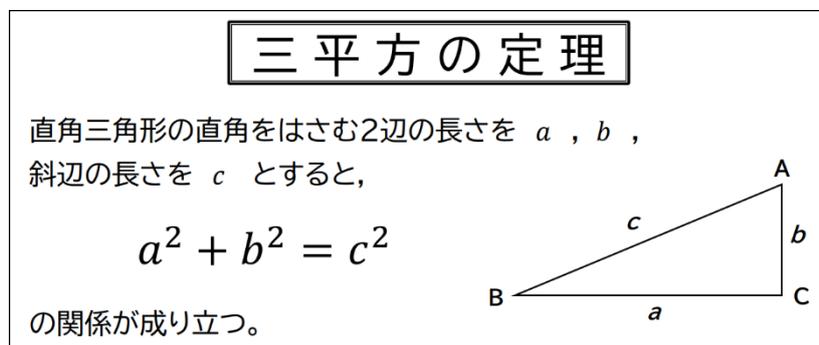


図1 三平方の定理

*広島大学大学院人間社会科学研究科

Hideki AMANO, Yusuke SHINNO

Study on the significance to learn a Pythagorean theorem : With an interview survey targeting junior high school students

3. 三平方の定理の学習に関する文献研究

本節では、わが国の数学教育研究において三平方の定理の学習に関する研究の扱いを概観する。そのために、日本数学教育学会及び全国数学教育学会の学会誌を対象とした論文検索より、「三平方の定理」から表出する論文を対象にした〔註〕。対象とする論文は 19 本あった。それは、石森ほか (1966)、形川 (1981)、中野 (1989)、中村 (2001)、郷田ほか (2004)、竹田 (2004)、熊倉 (2006)、植田 (2006)、坂本 (2007)、清水 (2007a)、清水 (2007b)、中村 (2007)、米田 (2009)、渡辺ほか (2012)、久富ほか (2013)、清水 (2013)、中川ほか (2014)、三島ほか (2015)、草桶 (2015) である。これらの論文を、各論文が作成された趣旨をもとに分類した。その場合、研究内容は、「教材開発・授業づくり」に関する研究、「指導法」に関する研究、分析の枠組みをもとにした「授業分析」研究、「情意面」の向上をめざした研究の 4 つに分けられる (表 1)。

表 1 研究内容別に分類した三平方の定理の学習に関する研究

研究内容	本数	論文
教材開発・授業づくり	7 本	郷田ほか (2004)、竹田 (2004)、熊倉 (2006)、清水 (2007a)、清水 (2007b)、中川ほか (2014)、三島ほか (2015)
指導法	4 本	石森ほか (1966)、形川 (1981)、中野 (1989)、米田 (2009)
授業分析	7 本	中村 (2001)、植田 (2006)、坂本 (2007)、中村 (2007)、渡辺ほか (2012)、久富ほか (2013)、清水 (2013)
情意面	1 本	草桶 (2015)

表 1 に示したように、わが国の数学教育研究において三平方の定理の学習に関する研究は、盛んに行われてきている。また、情意面の向上をめざした研究は、草桶 (2015) の 1 本だけであり、稀少であることも分かる。草桶 (2015) の研究は、単元「平方根」の学習時に三平方の定理の学習を組み入れることで、計算分野と図形分野の学習を融合させ、生徒たちの情意面を向上させられることを主張する提案である。しかしながら、この草桶 (2015) の研究は、実践授業の後に生徒 2 名が感想として、三平方の定理の効率性や便利さを指摘したことにとどまるものである。したがって本研究では、具体的な学習活動についてのインタビュー調査によって、生徒が三平方の定理の学習に対して行っている意味づけを詳細に抽出しようとする点に研究の新奇性を見いだしている。

〔註〕 「三平方の定理」で検索して表出する全論文のうち、第一にカリキュラム研究で表出した論文は、本研究において分析する対象から除外した。それは、すべての学習内容が言語化されており、そのうちの「三平方の定理」の表現にヒットしている論文である。したがって、本研究のような三平方の定理の学習そのものに関する研究とは異なるためである。第二に上ヶ谷ほか (2017) の論文は、本研究における分析の対象から除外した。それは、中学・高校の学習内容のうち、間接証明法を用いた学習内容を列挙している中で三平方の定理の逆も取りあげられており、その「三平方の定理」の表現で表出している論文だからである。したがって、本研究のような三平方の定理の学習そのものに関する研究とは異なる。同様の趣旨で、山田ほか (2002) の論文も本研究における分析の対象から除外することにした。

4. 三平方の定理の学習に関する実践研究

本節では、三平方の定理の学習に関する実践研究を行う。そのためにまず、生徒たちが三平方の定理の学習に対する捉えを意識しやすくする視点から、年間カリキュラムを設計して実施する。そして次に、インタビュー調査を設計して、その調査を分析することを通して三平方の定理の学習に対して生徒たちが行う意味づけについて考察する。

4-1. 年間カリキュラムの設計

年間カリキュラムを設計する際に工夫したことが2つある。一つは、中学校第3学年の初めに三平方の定理の学習(2時間)を実施したことである。そのねらいは、生徒たちに三平方の定理の存在を知らせることにある。実際には、三平方の定理及び三平方の定理の逆を3つの辺が整数値である場合に限定して考察させた。もう一つは、単元「平方根」の学習を終えた後の7月に、残りの三平方の定理の学習(5時間)を実施したことである。そのねらいは、後に学習する単元「2乗に比例する関数」、「相似な図形」、「円」の学習においても三平方の定理を活用した考察を可能にさせることである。

その他に、「算額作品」を制作させる取り組みを実施した。算額は江戸時代の日本で盛んに制作され、和算の問題が解けたことを神仏に感謝し、神社や仏閣に奉納した額である。ねらいは、生徒たち各人が気に入っている算数・数学の内容を表現させることにある。例えば、**図2**が算額の生徒作品例である。実際には、中学校第2学年の12月(1回目)及び中学校第3学年の11月(2回目)に制作時間を設けた。1回目は三平方の定理が未習であり、2回目は三平方の定理が既習である。

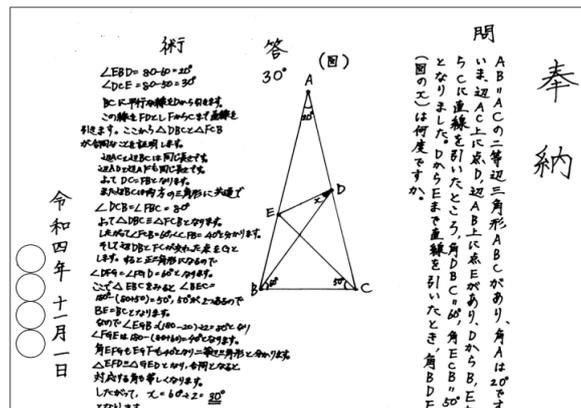


図2 算額の生徒作品例

4-2. インタビュー調査の概要

- 目的 : 三平方の定理に対して生徒たちが捉える意味づけを明らかにすること
- インタビュアー : 筆者(以下、「筆者」は第一著者)
- 対象 : 国立大学附属S中学校第3学年生徒71名のうち、生徒5名を選定
- 期日 : 令和4年12月6日(火)3時間目(10:45~11:35)
- 場所 : 国立大学附属S中学校数学科準備室
- 時間 : 各10分

[インタビューする生徒の選定]

インタビューする生徒の選定にあたっては、取り組みを2回実施した生徒の算額作品を分析した。まず、71名の生徒の中から、1回目の作品(中学校第2学年の12月:三平方の定理は未習)から内容を大幅に変更して、2回目の作品(中学校第3学年の11月:三平方の定理は既習)で三平方の定理に関わる内容で制作した24名の生徒を選んだ。このことは、「三平方の定理に対して生徒たちが捉える意味づけを明らかにする」本インタビュー調査の目的から妥当と判断する。次に、中学校第2学年及び第3学年で実施した3回の定期テストの得点が、それぞれ平均点の±3点以内である3名の生徒を選んだ。このことは、特別に数学が得意、不得意でない生徒にインタビューすることで、本研究の考察・議論の質を向上させると判断する。さらに、2回目の作品で三平方の定理を使わずに解決することを指定した問題を制作した1名の生徒も選んだ。これは、三平方の定理に対する意味を意識して作品制作した可能性が高いと判断したためである。

以上のことをもとにして本稿では, 生徒O, 生徒H, 生徒Ta, 生徒Kの4名に焦点をあててインタビューすることとした。なお, 焦点をあてた生徒が制作した問題は, 図3の通りである。

	1回目 (令和3年12月)	2回目 (令和4年11月)
生徒O	<p>左で示した, ③の面積を求めよ。</p> <p>③ = 角が 120° → 正三角形の2段は, それぞれ 45cm を3分割したものと考える。</p>	<p>二枚の羽が重なっている風車がある。計八枚の羽があるが, 黒斜線で表されている小さい羽四枚, 白で表されている大きな羽四枚, それぞれ合計の面積を求めよ。</p>
生徒H	<p>正十角形の全体の面積を求めたい。にします。斜線部分の面積を求めなさい。</p>	<p>次の斜線部分の面積を求めなさい。</p>
生徒Ta	<p>次の図のように, $AD \parallel BC$ の台形 $ABCD$ がある。対角線 AC の中点 M とし, 直線 DM と辺 BC の交点 E とする。このとき, $AD \parallel CE$ となる事を求めよ。</p>	<p>Q. 色で塗られている部分の面積を求めよ。</p> <p>条件</p> <ul style="list-style-type: none"> ... 22cm $BF = GG = 5\text{cm}$... 4cm $AI = ID = \frac{21}{2}\text{cm}$... 13cm $EI = HI$ $EB = HC = 12\text{cm}$ $AE = DH$
生徒K	<p>一と二の色が付いた面積の差はいくらが求めたい。</p> <p>(円周率は 3.14 とする)</p>	<p>問 次の図の面積を三平方の定理を使わずに求めなさい。</p>

図3 焦点をあてた生徒が制作した問題

〔調査の方針〕

インタビューは、個室で筆者が選定した生徒に対して実施する。三平方の定理に対する生徒の捉え方や態度面ができるだけ表出されるように、生徒が自ら制作した算額の作品に限定して質問する。そして、調査はビデオカメラで記録するとともに、筆者がフィールドノートに記述しながら進行する。インタビューの際にはゆったりした気分で回答できる雰囲気、そして、生徒自ら制作した算額の作品を手にして説明できる状況を設定する。また、半構造化インタビューの形式をとり、質問項目をあらかじめ決め、生徒の答えによってさらに詳細に質問する方法を採用する。さらに、トライアングレーションの観点から、三平方の定理に対する生徒の捉えを、算額の作品への指さし、音声記録、フィールドノートの記録による3つの方向から分析することを通して、インタビュー調査としての妥当性を高める環境で実施する(関口, 2013)。

以上のことをもとにして、次の表2のように質問項目を設定した。

表2 インタビュー調査における質問項目

〔1回目の作品(令和3年12月制作)を手元に置いて質問を進める〕

質問1	この算額作品を作ったことを覚えていますか
質問2	この作品はどのような問題なのか、教えてくださいませんか
質問3	この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか
質問4	この作品のアピールできるところは、どの部分ですか
質問5	なぜ、この問題を選んだのですか

〔2回目の作品(令和4年11月制作)を手元に置いて質問を進める〕

質問6	この算額作品を作ったことを覚えていますか
質問7	この作品はどのような問題なのか、教えてくださいませんか
質問8	この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか
質問9	この作品のアピールできるところは、どの部分ですか
質問10	三平方の定理を使って解くことを意識して問題を作りましたか
質問11	なぜ、三平方の定理を使って解く問題を選んだのですか
質問12	三平方の定理は、あなたにとってどのような印象ですか
質問13	この作品をふり返って、どのように思いますか

なお、生徒Kは三平方の定理を使わずに解決することを指定した問題を制作している。そのため、生徒Kへの質問11は、「なぜ、三平方の定理を使わずに解く問題を作ったのですか」に変更する。

4-3. インタビュー調査の実際

第一に、筆者 (T) が生徒 O に実施したインタビューの音声記録は、次の表 3 の通りである。

表 3 生徒 O へのインタビューの音声記録

1	T : (1 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
2	O : はい。
3	T : この作品はどのような問題なのか、教えてくださいませんか。
4	O : クリスマス・ツリーです。ツリーを横から見た面積の問題です。
5	T : この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか。
6	O : 私は難しいことはわからないので、まずツリーをシンプルに 3 段にしたことです。
7	T : なるほど。この作品のアピールできる場所は、どの部分ですか。
8	O : えっと、角度や長さを簡単にして誰でも解きやすい問題にしているところです。
9	T : なぜ、この問題を選んだのですか。
10	O : うちの、毎年家のリビングにクリスマス・ツリーを出して飾っていて、その頃考えた問題だったので、ツリーにしたのだと思います。そして、あまり難しく考えたくないと思って、こんな問題にしました。
11	T : わかりました。ありがとうございます。それでは、(2 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
12	O : はい。
13	T : この作品はどのような問題なのか、教えてくださいませんか。
14	O : 風車の問題です。ハウステンボスに行きたいなと思って風車の問題を作りました。
15	T : この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか。
16	O : 風車の羽を直角三角形にして三平方の定理を使って解ける問題にしたことです。
17	T : なるほど、どうして三平方の定理を使う問題にしたのですか。
18	O : えっ。三平方の定理を習ったからです。
19	T : 因数分解とか、平方根とか、三平方の定理とか、いろいろ習いましたよね。なぜ、三平方の定理を使う問題にしたのですか。
20	O : それは、三平方の定理だと、直角三角形があれば簡単に長さを求めることができるからです。
21	T : わかりました。この作品のアピールできる場所は、どの部分ですか。
22	O : はい、風車を簡素化して簡単な形にして、簡単な問題にしているところです。
23	T : なるほど。なぜ面積を求める問題にしたのですか。
24	O : はい、それは風車を見たときに、長さではなくて、普通は大きさに注目することが多いし、三平方 (の定理) で長さを求められたら、(その長さを利用すれば) 面積も求められるからです。
25	T : 三平方の定理を使って解くことを意識して問題を作ったということですか。
26	O : はい。
27	T : なぜ、三平方の定理を使って解く問題にしたのですか。
28	O : それは、三平方の定理を習った時に、2 つの辺の長さがわかればもう 1 つの辺の長さも出るから、私でも使いやすい、三平方の定理は使える、って思って。で、三平方の定理を使う問題にしたのだと思います。
29	T : 三平方の定理は、O さんにとってどのような印象がありますか。
30	O : 日常の物で、長さを出せるって感じですかね。長さを求められるから、面積も求まって、だから、三平方の定理は、面積が求められるということですか。
31	T : なるほど。この作品をふり返って、今どのように思いますか。
32	O : まだ簡単にできるかもしれないと思います。とがった三角形を直角三角形に見立てて三平方の定理を使う問題を作ったので、数学が得意でない人でも簡単に解けると思います。でも、まだ複雑な問題に見えるので、まだ簡単にできると思います。
33	T : この問題にこめられた O さんの思いがよくわかりました。ありがとうございました。

第二に、筆者 (T) が生徒 H に実施したインタビューの音声記録は、次の表 4 の通りである。

表 4 生徒 H へのインタビューの音声記録

1	T : (1 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
2	H : はい。
3	T : この作品はどのような問題なのか、教えていただけますか。
4	H : この作品は 10 角形にした問題です。10 角形の一部の面積を求める問題です。
5	T : この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか。
6	H : 図形を変化させて求められる、等積に変形して求められる問題にしたことです。
7	T : この作品のアピールできるところは、どの部分ですか。
8	H : はい。等積、移動させて考えても面積が変わらないところです。
9	T : なぜ、この問題を選んだのですか。
10	H : はい。えっと、僕はひらめきが必要な問題が好き、と言うか、あまり計算せずにいろいろな内容を使ったりして、ひらめくことでパッと答えにたどり着く問題が気に入っていて、この問題を作りました。
11	T : わかりました。ありがとうございます。それでは、(2 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
12	H : はい。
13	T : この作品はどのような問題なのか、教えていただけますか。
14	H : この作品は三平方の定理を習って、三平方の定理を使いたいな—と思って最初に、直角三角形を作って、その斜辺を半径にからめたら円ができて、そうやって考えて、円を作って、こんな問題にしました。
15	T : この作品を作るときに工夫したことは、どんなことですか。
16	H : はい。工夫したことは、三平方の定理が使えるのに、三平方の定理が埋め込まれていて、三平方の定理が使えることを表面に見えにくくしていることです。
17	T : なるほど。この作品のアピールできるところは、どの部分ですか。
18	H : はい。ミニオンズと言うデザイン性のあるキャラクターに目が行って、三平方の定理が使えることを表面に見えにくくしたところですか。
19	T : 三平方の定理を使って解くことを意識した問題を作ったということですね。
20	H : はい。僕は図形が好きで、三平方の定理を 4 月に習って、これはパッと使えるものだな—って思ったからです。
21	T : なるほど。それでは、なぜ、三平方の定理を使って解く問題にしたのですか。
22	H : はい。それは、三平方の定理は直角三角形があれば、直角があれば、すぐに使えるからです。
23	T : 三平方の定理は、あなたにとってどのような印象ですか。
24	H : はい。ちょっとした図形ですぐに使える定理です。難しい図形があったとしても、直角にさえ注目できればすむ、わかりやすい定理です。
25	T : この作品をふり返って、どのように思いますか。
26	H : えっ。よく考えたと思います。よいと思います。
27	T : ありがとうございます。質問はこれで終わります。

第三に, 筆者 (T) が生徒 Ta に実施したインタビューの音声記録は, 次の表 5 の通りである。

表 5 生徒 Ta へのインタビューの音声記録

1	T : (1 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
2	Ta : はい。ちょっとだけ。
3	T : この作品はどのような問題なのか, 教えていただけますか。
4	Ta : はい。えっと, たしか, 問題集の問題をちょっといじってこんな問題にしました。
5	T : この作品を作るときに工夫したことは, どのようなことですか。
6	Ta : えっと, AC の中点をとって問題を作ったことです。
7	T : なるほど。この作品のアピールできるところは, どの部分ですか。
8	Ta : えっと, 2 つの三角形の合同を利用して, 長さが等しいと言っていることです。
9	T : なぜ, この問題を選んだのですか。
10	Ta : それは, 問題集を見ながら, これは説明する流れが美しいって思ったからです。
11	T : わかりました。ありがとうございます。それでは, (2 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
12	Ta : はい。
13	T : この作品はどのような問題なのか, 教えていただけますか。
14	Ta : はい。えっと, ちょうど三平方の定理はもう習っていて, 何となく三平方の定理は自分の中で好きで, 最初は星形の問題が楽しいかなー, とか考えていたんですけど, 三平方の定理を使うのが難しくてー。この形 (正十角形) なら, 三平方の定理が使えるって思って, 作った問題です。
15	T : なるほど。この問題は, どうやって作っていったのか, 教えていただけますか。
16	Ta : はい。えっと, 橙色の正方形の中に, まず, 青色の正五角形を書いて, 次に, 赤色のところ, こんな三角形を突きだしておけば, 直角三角形で三平方の定理が使えるって思ったんですね。
17	T : そうやって作ったんですね。それでは, なぜ面積の問題にしたのですか。
18	Ta : はい。えっと, 三平方の定理に出てくる直角三角形の中でも, 3, 4, 5 の (辺の長さをもつ) 直角三角形があるじゃないですかー。3, 4, 5 とか, あと, 5, 12, 13 とか, 自分の中で好きで, 美しいとか思っていて, それが使える問題です。
19	T : なるほど。ただ, 面積を求めるところで, 三平方の定理は使ってないですね。
20	Ta : あっ, はい。えっと, 私は面積の問題にして, 面積を求めるまでに, 5, 12, 13 の直角三角形を使ったり, それから, 三平方の定理を使って計算する問題にしたかったっていうことです。
21	T : なるほど。よくわかりました。それでは, この作品を作るときに工夫したことは, どのようなことですか。
22	Ta : あっ, はい。5, 12, 13 の有名な (直角三角形の) 形, 整数になっている形にこだわって, 作れたことです。
23	T : この作品のアピールできるところは, どの部分ですか。
24	Ta : それは同じで, 5, 12, 13 (を辺の長さにもつ直角三角形) を使ったことです。
25	T : それでは, なぜ, 三平方の定理を使って解く問題にしたのですか。
26	Ta : はい。それは, じっくりきたんですね, 自分の中で, 三平方の定理が。三平方の定理を習った時に, すごい, 面白いって思ったんですね。それは, 図形の三角形, 直角三角形に注目して, 長さとか (計算して) 出せば, 面積とか出せるようになるのであれば, 今までに小学校の時から習ってきた図形の面積とか求められるようになるから, そう思ったら, 私, 感動したんですね。だから, 三平方の定理の問題にしたかったんです。
27	T : なるほど, そうなんですね。三平方の定理は, どのような印象をもっていますか。
28	Ta : はい。普通, 定規とかで長さを測ったら, 小数とかになるのが普通なのに, 三平方の定理で長さを計算したら, 3 つとも整数になったりして面白いです。
29	T : はい。この作品をふり返って, どのように思いますか。
30	Ta : 現実のキャラクターとかでなくて, 自分で図形を作って問題を作っているから, みんなにスムーズに考えてもらえるように, もっともっと美しい形で, 整数の長さの問題を工夫して作ってみたいです。
31	T : この問題のことがよくわかりました。ありがとうございました。

第四に, 筆者 (T) が生徒 K に実施したインタビューの音声記録は, 次の表 6 の通りである。

表 6 生徒 K へのインタビューの音声記録

1	T : (1 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことは覚えていますか。
2	K : はい。
3	T : この作品はどのような問題なのか, 教えてくださいませんか。
4	K : 円だけでシンプルに解ける問題です。
5	T : この作品を作るときに工夫したことは, どのようなことですか。
6	K : はい。3 つの円ともに中心角を 90° のおうぎ形にしているところです。
7	T : この作品のアピールできる場所は, どの部分ですか。
8	K : 上の図形も下の図形も同じくらいの面積で, 解く時に一瞬迷ってしまう部分です。
9	T : なぜ, この問題を選んだのですか。
10	K : シンプルな問題で, 一瞬迷うからです。
11	T : なるほど。シンプルな問題とは, どのような問題ですか。
12	K : えっと, 少ない情報で問題が出されているのに, 解けるみたいなことです。
13	T : なるほど。ありがとうございます。それでは, (2 回目の作品を見せながら) この算額作品を作ったことを覚えていますか。
14	K : はい。
15	T : この作品はどのような問題なのか, 教えてくださいませんか。
16	K : シンプルな問題です。
17	T : シンプルな問題とは, どのような問題ですか。
18	K : 少ない情報で解ける, みたいな問題です。えっと, 円にしようかとも思ったのですが, 今回は多角形でシンプルにしようと思って, いろいろ考えて, 四角形の問題にしようと思いました。
19	T : 四角形は, 多角形の中で形もシンプルと言うことですか。
20	K : はい, そうです。形もシンプルにして, 少ない情報で解ける問題にして, シンプルにしようと考えて問題を作りました。
21	T : なるほど, そうなんです。それでは, なぜ三平方の定理を使わずに求めなさい, というような問いかけをする問題にしたのですか。
22	K : えっと, 三平方の定理を使うとすぐに求められてしまうからです。それと三平方の定理で解く時に計算ミスをするかもしれないです。それとこの問題は, 三平方の定理を使わなかった時に, 移動させると正方形ができると気づいた時に, オーってなる問題だからです。
23	T : はい。今のところ, もう少し教えてください。三平方の定理を使うとすぐに求められるとは, どのようなことですか。
24	K : えっと, この問題で, 赤い線を斜辺にする直角三角形はすぐに見破られて, あとは三平方 (の定理) で解かれてしまうということです。
25	T : はい。わかりました。三平方の定理で解く時に計算ミスをするかもしれないとは, どのようなことですか。
26	K : えっと, 三平方 (の定理) の計算は, ルートが出てくるので, 逆に, ルートが出ながら整数でなくても求まるんですけど, ルートが出る分だけ, 私とか計算ミスをしてしまう可能性があるってことです。
27	T : はい。わかりました。移動させると正方形ができると気づいた時に, オーってなるとは, どのようなことですか。
28	K : えっ。オーってなるじゃないですか。私, 脳トレとか好きなんですけど, この問題で, 普通 5 つの正方形に分けて問題を解こうとする人が多いのに, 変形させたら, 1 つの正方形になる, って知った瞬間, オーってなるじゃないですか。
29	T : はい。オーって, 感動するということですか。
30	K : はい, そうです。最初は 5 つの正方形から考えようと思っているのに, 発想を変えたら 1 つの正方形になるとか思えば, すごい, って思うということです。
31	T : よくわかりました。ちょっと聞いていいですか。K さんにとって三平方の定理は, どのような印象がありますか。
32	K : あっ, はい。私, 計算ミスが多い人なので, ルートも出てくるし, 計算ミスに気がつけながら解かないといけない定理という印象です。それから, 直角三角形に気づいたら, 定理に当てはめれば必ず長さが求まる定理です。
33	T : なるほど。この作品をふり返って, どのように思いますか。
34	K : はい。好きです。シンプルな形にできて好きです。良い形を使えたと思います。
35	T : いろいろ教えていただき, ありがとうございます。これで質問を終わります。

5. 考察

(1) 「直角三角形に注目することで問題解決できる」という捉え

生徒Oにおける表3の「16. 風車の羽を直角三角形にして三平方の定理を使って解ける問題にしたことです。」の発言, 「20. それは, 三平方の定理だと, 直角三角形があれば簡単に長さを求めることができるからです。」の発言, 「32. とがった三角形を直角三角形に見立てて三平方の定理を使う問題を作ったので, 数学が得意でない人でも簡単に解けると思います。」の発言を取りあげる。これらの発言は, 直角三角形に注目することによって, 長さを求められたり, 問題を解けたりすることを志向した発言と解釈できる。また, 生徒Hによる表4の「14. 三平方の定理を使いたいなーと思って最初に, 直角三角形を作ってー, その斜辺を半径にからめたら円ができてー, そうやって考えて, 円を作ってー, こんな問題にしました。」の発言, 「22. 三平方の定理は直角三角形があれば, 直角があれば, すぐに使えるからです。」の発言, 「24. 難しい図形があったとしても, 直角にさえ注目できればすむ, わかりやすい定理です。」の発言を取りあげる。これらの発言は, 直角三角形に注目することによって, 三平方の定理を利用して問題解決できることを志向した発言と解釈できる。さらに, 生徒Kによる表6の「32. 直角三角形に気づいたら, 定理に当てはめれば必ず長さが求まる定理です。」の発言を取りあげる。この発言も, 直角三角形に注目して長さを求められることを志向した発言と解釈できる。

これらのことから, 直角三角形に注目することで三平方の定理を利用して問題解決できると捉えていることが分かる。〔直角三角形〕と〔三平方の定理〕を関連づけて捉える様子が窺える。

(2) 「利用しやすい定理」という捉え

生徒Oにおける表3の「28. 三平方の定理を習った時に, 2つの辺の長さがわかればもう1つの辺の長さも出るから, 私でも使いやすい, 三平方の定理は使える, って思って。」の発言, 生徒Hによる表4の「20. 僕は図形が好きで, 三平方の定理を4月に習って, これはパッと使えるものだなーって思ったからです。」の発言, 「24. ちょっとした図形ですぐに使える定理です。」の発言を取りあげる。これらの発言は, 三平方の定理に対する使いやすさを志向した発言と解釈できる。また, 生徒Kによる表6の「22. 三平方の定理を使うとすぐに求められてしまうからです。それと三平方の定理で解く時に計算ミスをするかもしれないです。」の発言, 「26. 三平方(の定理)の計算は, ルートが出てくるので, 逆に, ルートが出ながら整数でなくても求まるんですけど, ルートが出る分だけ, 私とか計算ミスをしてしまう可能性があるってことです。」の発言, 「32. 私, 計算ミスが多い人なので, ルートも出てくるし, 計算ミスに気をつけながら解かないといけない定理という印象です。」の発言を取りあげる。これらの発言は, 三平方の定理の利用のしやすさを前提とし, 利用する際の計算ミスに留意することを志向した発言と解釈できる。さらに, 生徒Taによる表5の「18. 3, 4, 5とか, あと, 5, 12, 13とか, 自分の中で好きで, 美しいとか思っていて, それが使える問題です。」の発言, 「20. 私は面積の問題にして, 面積を求めるまでに, 5, 12, 13の直角三角形を使ったり, それから, 三平方の定理を使って計算する問題にしたかったってことです。」の発言を取りあげる。これらの発言は, 5, 12, 13のように3つの辺の長さがともに整数である直角三角形に限定した使いやすさを志向した発言と解釈できる。

これらのことから, 三平方の定理は利用しやすいと捉えていることが分かる。また, その中で, 利用する際の計算ミスに不安を感じていたり, ピタゴラス数にある直角三角形に限定した使いやすさを感じていたりする生徒がいる様子も窺える。

(3) 三平方の定理に対する好印象

生徒Taにおける表5の「14. 何となく三平方の定理は自分の中で好き」の発言, 「18. 3, 4, 5とか, あと, 5, 12, 13とか, 自分の中で好きで, 美しいとか思っていて」の発言, 「26. しっくりきたんですね, 自分の中で, 三平方の定理が。三平方の定理を習った時に, すごい, 面白いって思ったんですね。それは, 図形の三角形, 直角三角形に注目して, 長さとか(計算して)出せば, 面積とか出せるようになるのであれば, 今までに小学校の時から習ってきた図形の面積とか求められるようになるから, そう思ったら, 私, 感動したんです」の発言, 「28. 三平方の定理で長さを計算したら, 3つとも整数になったりして面白い」の発言を取りあげる。これらの発言において発せられた好き, 美しい, しっくりくる, 面白い, 感動といった言葉から, 三平方の定理に対して好印象を抱いている発言と解釈できる。三平方の定理に対して好印象を抱く生徒の様子が窺える。

6. おわりに

三平方の定理について学習指導要領では、直角三角形の 3 辺の長さの関係を表す定理、測量の分野でも用いられ活用される範囲が広い定理、直角三角形だからこそ成り立つ美しい関係と解説されている(文部科学省, 2017)。また、本稿の冒頭では、直角三角形の 3 辺の長さの関係を表したシンプルな定理、義務教育の最終段階として高次の学習内容、間接測定で長さを求められる定理と紹介した。これらのことは、設計者や授業者が捉える三平方の定理を学習する価値である。一方で、学習者が捉える価値との整合性が問題になる。この点を明らかにすることが本研究の課題であった。実際の教科用図書における中学校第 3 学年の 200 頁では、「三平方の定理の学習をふり返って、現実の場面や数学の問題で、いろいろな長さや距離をどのようにして求めたでしょうか。」と問いかけ、三平方の定理を用いて問題解決することの価値を生徒自身に考えさせる場面を設定している(藤井ほか 2021)。これは、義務教育の終盤に生徒自身で数学学習に対して意味づけできるようにすることをねらった設定である。

本研究では、三平方の定理の学習を通して中学校第 3 学年の生徒たちが捉える意義を明らかにすることを目的とした。そのためにまず文献研究を行い、次に、生徒たちが三平方の定理の学習に対する捉えを意識しやすいように年間カリキュラムを構成したうえで、インタビュー調査を実施した。その結果、(1)「直角三角形に注目することで問題解決できる」という捉え、(2)「利用しやすい定理」という捉え、(3)三平方の定理に対する好印象、の 3 つの様相を明らかにすることができた。学習者は、問題解決する立場として直角三角形に注目できれば良いと考えていることが分かった。また、その他の定理に比べて、三平方の定理は利用しやすかったり、好印象を抱いたりしている生徒がいることも分かった。

今後は、学習者が捉える三平方の定理に対する価値を生かしたカリキュラム及び指導法を開発することによって、義務教育最終段階における数学の面白さ、大切さを実感させたい。

【 引用・参考文献 】

- 平林一栄, 数学教育の有効性のために, 奈良教育大学紀要, 35 巻 2 号, 1-17, 1986.
- 国際数学・理科教育動向調査, 2019 → <https://www.nier.go.jp/timss/2019/point.pdf>
- 石森太郎ほか, 一般化の考え方を伸ばす指導—三平方の定理—, 数学教育研究論文発表会要項 1, 29-30, 1966.
- 形川恵, 操作活動による定理発見の学習指導について—円周角の定理と三平方の定理—, 日本数学教育学会誌, 第 63 巻第 3 号, 54-60, 1981.
- 中野信哉, 操作活動を通して生徒に定理を発見させる指導法の工夫—三平方の定理において—, 日本数学教育学会誌, 第 71 巻第 3 号, 11-20, 1989.
- 中村光一, 算数・数学の授業における数学的対象の構成—社会的相互行為論の立場から—, 日本数学教育学会第 34 回数学教育論文発表会論文集, 163-168, 2001.
- 郷田勝久, 服部勝憲, コンピュータ活用における「算法新書」の幾何学的内容の教材化, 日本数学教育学会第 37 回数学教育論文発表会論文集, 701-702, 2004.
- 竹田博安, ピタゴラス数の探究—解の差に着目して—, 日本数学教育学会誌, 第 86 巻第 3 号, 21-27, 2004.
- 熊倉啓之, 学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究—中学と高校の接続を重視して—, 日本数学教育学会第 39 回数学教育論文発表会論文集, 355-360, 2006.
- 植田幸司, 相互作用主義に基づく数学学習指導に関する研究—「三平方の定理の逆」の実践的検討—, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 12 巻, 83-95, 2006.
- 坂本正彦, 数学の学習における対話をもたらす理解について, 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 187-192, 2007.
- 清水浩士, 超越的再帰モデルの規範的適用—教育実習指導における活用—, 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 163-168, 2007a.
- 清水浩士, 生徒の数学的理解過程における問題づくり, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 13 巻, 155-161, 2007b.
- 中村光一, 数学授業の相互行為における数学的対象と価値, 日本数学教育学会誌, 第 89 巻第 1 号, 13-22, 2007.

- 米田重和,「指導デザイン」をもとにした三平方の定理の教材に関する実践的研究, 日本数学教育学会誌, 第 91 巻第 1 号, 24-31, 2009.
- 渡辺勝行, 有藤茂郎, 岩崎浩, 三平方の定理の発見と証明の接続を図る授業デザインの開発研究—数学的活動の日常化に向けたアプローチ—, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 18 巻第 2 号, 123-138, 2012.
- 久富洋一郎, 小山正孝, 高等学校数学における理解を深めるための指導方法に関する研究 (I) —数学的理解の 2 軸過程モデルに基づく「図形と計量」の学習指導を通して—, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 19 巻第 2 号, 35-44, 2013.
- 清水浩士, 超越的再帰モデルの規範的適用 (3) —問題解決学習への適用—, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 19 巻第 1 号, 9-15, 2013.
- 中川裕之, 油井幸樹,「三平方の定理とその証明」において課題探究として証明することの授業化, 日本数学教育学会誌, 第 96 巻第 9 号, 30-33, 2014.
- 三島直人, 松寄昭雄,「90° システム広告」の作図方法に着目した数学教材—中等教育段階における課題学習教材の一例として—, 日本数学教育学会誌, 第 97 巻第 9 号, 13-21, 2015.
- 草桶勇人, 発意に即した授業展開による情意的変容に関する研究—単元「平方根」における三平方の定理の発見を通して—, 日本数学教育学会秋期研究大会発表集録 48, 189-192, 2015.
- 上ヶ谷友佑, 袴田綾斗, 早田透, 数学的な方法知の構成に必要な活動に関する規範的枠組, 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 23 巻第 2 号, 159-168, 2017.
- 山田篤史, 清水紀宏, 数学的問題解決における自己参照的活動に関する研究 (VI), 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 第 8 巻, 95-107, 2002.
- 関口靖広, 教育研究のための質的研究法講座, 北大路書房, 2013.
- 文部科学省, 中学校学習指導要領解説, 149-150, 2017.
- 藤井齊亮ほか, 新しい数学 3, 令和 2 年文部科学省検定済, 東京書籍, 2021.