広島大学附属中・高等学校中等教育研究紀要
〈第 69 号　2022〉

中高接続を意識した中学校数学科学習指導についての考察
～塩山の稜線の授業実践を通して～

黒　木　雄　大

本稿では，中高接続を意識した中学校数学科学習指導の必要性について論じる。そのために，中学校数学科で扱った塩山の稜線を題材とした課題学習の実践について整理・分析し，考察した。考察した結果，塩山の題材を扱った課題学習は，高等学校数学科の学習内容である，角の二等分線や放物線の定義に迫ることができ，生徒が問題解決に向かう中で中高の学習を接続する新たな知識や概念を獲得することができた。今後，中学校の各学年において塩山の稜線を題材にした授業等を検討していきたい。

1．はじめに

川上（2010）が指摘するように，「小学校算数から中学校数学への変化が大きく『中１ギャップ』が顕著な教科である」[1] と言われ，以前よりギャップ軽減に向けた学習指導が注目されている。一方で，中学校数学と高等学校数学の接続についての議論は中学校の現場で十分に行われてはいない。これは，中学校で数学を教える教師が，高等学校で学習する数学の内容は中学校までの学習内容と比べて急激に難しくなる別物として捉え，中学校との接続性を強く感じにくいことが原因だと考える。実際，著者は前任校で小中接続を意識した数学の授業は行ってきたが，中高接続の意識は希薄であった。また，中学校の学習指導要領解説において，小学校の算数と中学校の数学の学習内容の構成は比較される[2] が，高等学校の数学の学習内容との比較はされない。高等学校への進学率が 97％を超える現在，中高接続を意識した授業づくりは必要不可欠であると考える。

本稿では，中高接続を意識した学習指導として，中学校第３学年数学科で行った塩山の稜線を題材とした課題学習の授業実践を，生徒の学習活動の様子や授業後の振り返りの記述をもとに整理分析する。

2．課題学習とその位置付け

中学校の学習指導要領において，課題学習は

生徒の数学的活動への取組を促し思考力，判断力，表現力等の育成を図るため，各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見いだした問題を解決する学習

であると記されており，各学年で指導計画に適切に位置づけることとされている[3]。通常の授業の問題解決の場面では，直前に学習した内容をそのまま適用すれば解決できるだろうという見通しの立てやすさがあるが，課題学習では，これまでの学習の積み重ねを基に構想を立て，実践し評価・改善する必要がある。課題学習は，「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行する」[4] 数学的活動の充実を図ることが求められる中学校数学科において，大変意義深いものである。

3．塩山の稜線について

塩山の題材は，黒田（2000）によって考案された[5]。高等学校の教科書にも掲載されているように[6]，これまでに高等学校数学科の授業の題材や，高校生の課題研究のテーマとして，たびたび取り扱われてきた。塩山の稜線とは，「土台となる平面図形の板の上に塩を最大限まで盛ったときに形成される山の面と面の境界線や頂点のこと」である。例えば三角形を土台とした板の上に塩を最大限まで盛ると３本の稜線ができ，１点で交わる（**図 1**）。この稜線を真上から見ると，三角形の３角の二等分線になっており，その交点は内心になる。このように，塩山の稜線を平面に投影した図形からは，高等学校数学科の図形領域で学習するような図形の性質を見いだす数学的活動が展開できる。また，土台の平面図形を変えることで，その上に形成される塩山の形状を推測し，探究できる教材でもある。塩山は具体と抽象の間を往還する活動教材として，また，STEAM 教育にお

Yudai KUROKI：Teaching of Mathematics in Junior High Schools with an Awareness of the Junior High School-High School Connection
～ Through classroom practice on the ridge of Salt Mountains.

ける教材としても多くの可能性を秘めている。

では，中学校ではどうだろうか。多感な中学生こそ数学で塩を使うという非日常的な数学の問題場面を扱ってはどうだろうか。塩の作り出す美しい図形は中学生の心を魅了し，さらにその中に隠された数学の世界に引き込まれるに違いない。また，それまでに学習した内容のうち，どれをどのように用いればよいか見通しがつきにくく，これまでの学習の振り返りを基に，生徒の思考力，判断力，表現力等が発揮されやすくなるのではないだろうか。これこそ，学習指導要領で示される課題学習のねらいである。

中高接続の第一段階は，高等学校数学科の学習内容を意識して中学校数学科の授業づくりおよび学習指導を行うことにあると考える。中学校数学科において塩山の稜線を扱った課題学習を行うことで，生徒が問題解決に向かっていく中で高等学校数学科の学習内容に迫ることができ，中高の接続性の高い学習が展開できる。例えば，三角形を土台とした塩山は，角の二等分線は２辺から等距離の点の集合であることや三角形の内心について，塩山に稜線ができる原理から学ぶことができる。このように，塩山の稜線を扱った課題学習は，生徒が塩山を作成し観察する中で，高等学校で学習する新たな数学の知識を獲得し，高揚感を実感できることが期待できる。

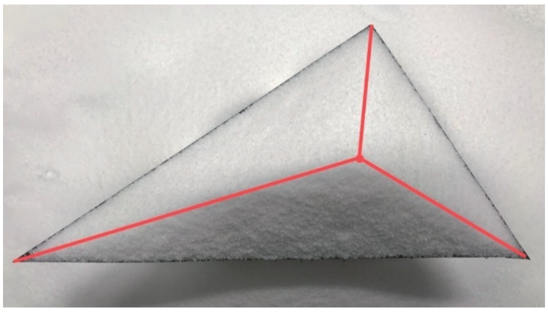


図１　三角形を土台とした塩山の稜線

４．塩山の稜線の教材化

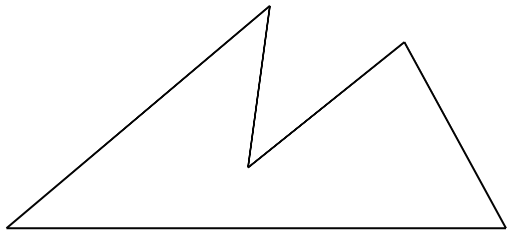
先で述べたように，すでに高等学校数学科において塩山の稜線は教材化されているので，ここでは，中学校数学科における教材化について述べる。工夫したのは学習問題であり，次のように設定をした。

(1) 塩山の稜線の自然な発見を促す学習問題

三角形に切った板（三角形の土台）の上に，塩をもうこれ以上盛れなくなるまでかけ続けると，最後はどうなるでしょうか。

中学生らしい自由な発想を大切にするために，上のような学習問題を提示した。5，6 人ずつの小集団で予想させ，実際に３種類の三角形（正三角形，直角三角形，不等辺三角形）の土台に塩山を作成し観察させた。予想では，境界のない平面に塩を盛ると円錐ができることを想起させ，その根拠とさせた。観察して気づいたことや疑問に思ったことなどは，オンラインホワイトボードアプリケーション Google Jamboard[10] を活用して文字や写真で自由に記録させた。塩山の多面的な見方を促すことで，その構造に着目し，線（三角錐の辺）や点（三角錐の頂点）として現れる稜線の存在に気づき，稜線のもつ図形的な性質について考察できるのではないかと考えた。

(2) 中高接続を意識した学習問題



凹五角形に切った板（凹五角形の土台）の上にできる塩山の稜線は，どのような図形になるか図示しなさい。

三角形の土台にできる塩山の稜線をもとに，２つの三角形を重ね合わせてできる凹五角形の土台にできる塩山の稜線について考える学習問題を設定した。この問題は，左右の三角形の内心 F，G の間はどのような稜線ができるかという問いに焦点化できる（**図２**）。塩はいちばん距離の近いところに落ちる塩山の原理より，線分 GH は∠ DIC の二等分線，点 F は FE ＝ FI の点，点 H は HE ＝ HJ の点である。さらに，曲線 FH は線分 BC と点 E との等距離のところで均衡がとれた点の集合と考えることができる。つまり，点 E を焦点，線分 BC を準線とする放物線を描くのである[7]。

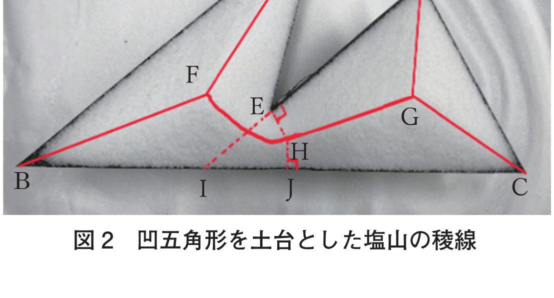


図２　凹五角形を土台とした塩山の稜線

放物線は，中学校第３学年の関数領域「関数 $y=ax^2$」で学習する。教科書では，「関数 $y=ax^2$ のグラフの曲線は放物線と呼ばれる」とされており，身近に見られる放物線として，投げたボールの軌跡や飛行機の先端部などが紹介されている[8)]。また放物線は，高等学校の数学Ⅲで次のように学習する。

平面上で，定点ＦとＦを通らない定直線 ℓ からの距離が等しい点Ｐの軌跡を放物線といい，点Ｆをその焦点，直線 ℓ を準線という（**図３**）。

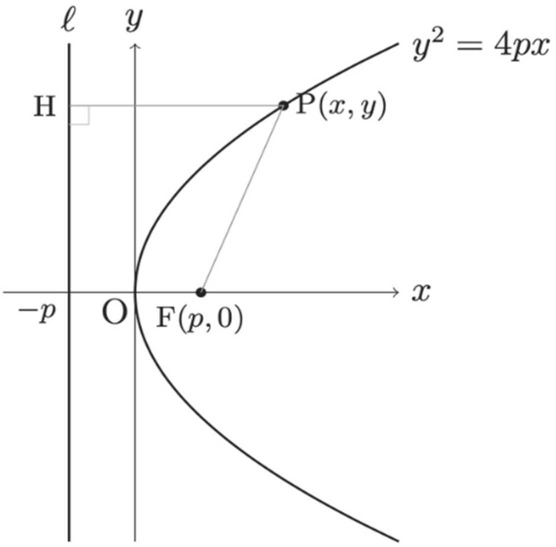


図３　放物線の定義

証明

$p \neq 0$ とする。点Ｆ（p，0）を焦点とし，直線 $x = -p$ を準線 ℓ とする放物線の式を求める。
放物線上の点をＰ（x，y）とし，Ｐから ℓ に下ろした垂線をPHとする。

PF = PH……①

すなわち　$PF^2 = PH^2$

よって　$(x-p)^2 + y^2 = \{x-(-p)\}^2$

整理して　$y^2 = 4px$　……②

逆に，②を満たす点Ｐ（x，y）は①を満たすから，この点は放物線上にある。したがって，②は放物線の方程式である[9)]。

証明終

塩山の稜線は，放物線の図形的な定義を獲得する最適な題材だと考える。この主張の理由は，塩山の原理に基づいて，塩山の曲線部分がどこから等距離なのか考察しやすさにある。さらに，その原理から中学生３年生の図形領域「三平方の定理」で学習する三平方の定理を活用することで，上の証明のように比較的に簡単に放物線の式が導ける。

以上より，中学校第３学年において，中学校での図形の学習が一通り済んだ段階で，塩山の稜線を扱った図形に関する課題学習を設定した。そこで，凹五角形の塩山の稜線を考察する中で，高等学校数学科の学習内容に迫っていけると考えた。本稿では，凹五角形の塩山の稜線の考察を扱った授業実践について，以下より考察していく。

５．授業実践

（1）指導計画

日　　時　2022年（令和４年）11月26日
第２限　10：35〜11：25

学年・組　中学校３年Ｃ組42人

題　　材　塩山の稜線（図形に関する課題学習）

目　　標

1. 塩山の稜線を平面に投影した図形の性質を理解している。（知識・技能）
2. 三角形を土台とした塩山の稜線から性質を見いだし，それをもとに様々な稜線の説明をすることができ，塩山の開発に活用することができる。（思考・判断・表現）
3. 塩山の稜線を粘り強く考察し，その過程を，塩山の開発に生かそうとしている。（主体的に学習に取り組む態度）

単元計画

第一次　塩山の稜線の考察　　３時間（本時2/3）
第二次　塩山の開発　　１時間

本時の題目　塩山の稜線の考察

本時の目標

三角形を土台とした塩山の稜線について，平面に投影した図形をもとに考察することで，稜線は角の二等分線であることを見いだし，さらに，凹五角形を土台とした塩山の稜線について考察することで，塩山の原理から放物線の図形的な定義を獲得することができる。

本時の目標

1. 三角形を土台とした塩山の稜線について，平面に投影した図形をもとに考察することを通して，稜線は角の二等分線であることを説明することができる。
（思考・判断・表現／学習活動の様子の観察）
2. 凹五角形を土台とした塩山の稜線の曲線部分が，放物線になることを確認し説明することができる。（思考・判断・表現／ワークシートの記述）

(2) 授業の実際

まず，導入段階では，前時に扱った三角形の土台にできる塩山について，各班でまとめたGoogle Jamboardの記録をもとに，振り返らせた。ここでは，三角形の土台にできる三角錐の塩山を真上から撮影した写真を取り上げ，塩山の面と面の境界線や頂点のことを稜線と呼ぶことを確認した。さらに，3本の稜線が交わる1点（三角錐の頂点）は，土台の三角形においてどのような点なのか問いかけ，次のような生徒の予想を紹介した。

・頂点は内心っぽい
・三角錐の頂点の位置が，真上から見たときに出来る三角形の重心っぽい？
・土台の三角形の重心か外心か内心のとこに三角錐の頂点がある？

本時では，まずその正体を明らかにしていこうと問題提起した。

次に，展開段階前半では，先の三角形の土台にできる塩山の稜線の正体について各班で話し合わせた。その後，生徒から「内心をかくときには，角の二等分線をひく。塩山の稜線は3つの角を二等分していると思う。二等分しないと山が崩れる。左右に同じ量の塩が載っていないと山が崩れるから，その角は二等分されていると思ったので，内心なのではないか。」との意見が出された。ここで，角の二等分線の点は2辺からの距離が等しいことをおさえ，塩山の稜線ができる根拠と一致していることを確認した。

そして，後半では，凹五角形の土台にできる塩山の稜線を予想させた。その中で左右の三角形の内心と内心の間はどうなるか問いを焦点化すると，

・2つの三角形の重なる部分の角の二等分線となる
・重なる部分の小さな三角形の内心と左右の三角形の2つの内心を結ぶ線分になる

との意見が大半であった（**図4**）。

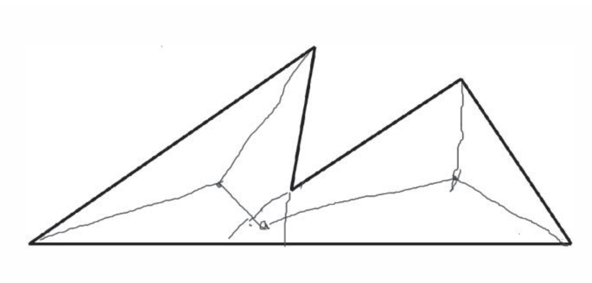


図4　生徒の予想

つまり，生徒は，予想の段階では，焦点化した部分の塩山の稜線は直線になることを疑わなかったことが分かる。その後，凹五角形の土台に塩を盛り，稜線を確認させた。また，塩山を真上からPCで撮影させ，稜線を観察させた。その際，多くの班は稜線が曲線になると気づくことができなかった。そこで，唯一曲線になりそうだと考察した班の意見を全体で共有し（**図5**），曲線になる事実を伝えた。

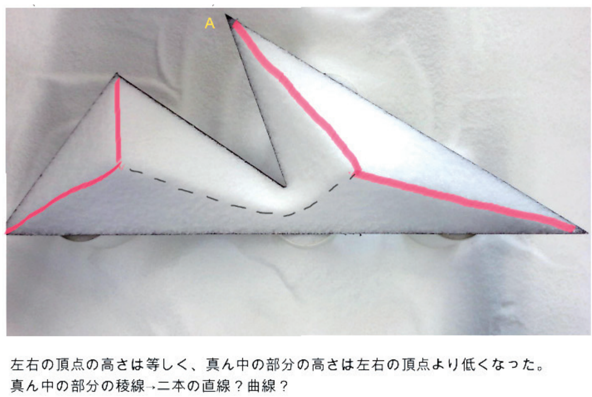


図5　観察の記録

最後に，終末段階では，曲線部分はどのような線なのか予想させた。予想として，

・円
・双曲線
・放物線

が挙げられた。時間の都合上，全体で議論することはできなかったが，放物線と予想した人数がやや多かったので，曲線部分が放物線かどうか調べることにした。そこで座標平面を導入し，塩山を真上から撮影した写真を図形アプリケーションGeoGebra[11]に貼り付けた。そして，塩山の稜線上のいくつかの点の座標を読み取り，yはx^2に比例するか，つまり，比例定数が一定となり，放物線とみなせるか試みた。しかし，これも時間の都合上，2点の座標についてしか比例定数を求めることができず，曲線部分が放物線になるかどうか明らかにすることができなかった。

(3) 生徒の反応

授業の感想を，「今日の授業の感想」として自由に記述させた。いちばん多かった記述は，「稜線が曲線になるとは思わなかった」という驚きの声や塩山の稜線への関心がより高まった，面白かったというものであった。曲線になりそうだと予想した班の生徒は「真ん中の稜線が曲線ぽいことに気づけて嬉しかった」という感想を残していた。また，「直線だという先入観をもっていた」や「まさか二次関数が関係してくるとは」という記述も多かった。この記述から分かるように，生徒にとって放物線は関数$y = ax^2$のグラフとして存在するもので，図形の1つ

としての見方がないと分析できる。一方で，「なぜ放物線になるか疑問に思った」という記述もやはり多かった。

(4) 授業を終えて（反省と課題）

授業後の授業者は，「実験に時間がかかりすぎてしまい，目標2を達成することができなかった」「目標1は，前時の生徒の振り返りを生かして十分達成できたと判断した」「凹五角形を土台とした塩山の稜線において，一部が曲線部分となることに気づかせることができなかった」「本時で扱った凹五角形より別の土台の方が，曲線部分が短く，稜線の一部が曲線になることに気づけたのではないか（**図6**）」「塩山の稜線の考察を，真上から撮った写真で行うことができていなかった班があった」ということを反省として挙げた。

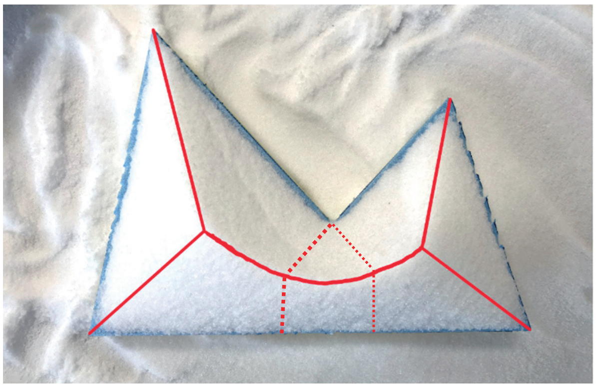


図6　凹五角形を土台とした塩山の稜線（別案）

また，授業後の授業観察者との協議では，「2辺からの等距離になる点の集合である角の二等分線と，塩山に稜線できる原理が一致することが，生徒は十分理解できていなかったのではないか」「サンプルが1つで放物線と見なすことはとても難しく，x^2に比例すると判断できないのではないか」「塩山の稜線が内心であることや放物線とみなすことは，どんな既習をもとに考えさせることができていたのか」というご意見をいただいた。

さらに，指導助言では，「塩山の真横から光を当てて陰陽をはっきりさせ視覚的に見せることで，曲線になる稜線を気づけること」「2辺までの距離が等しい点を追求している。稜線という3次元上の点が，角の二等分線という2次元上の点になっているというためにはもうワンステップいること」「何点プロットしても近似はできても関数形は決まらないのでやらない方がよいこと」をご助言いただいた。

最後に，「塩山の教材の価値はあるが，この授業を附属の提案授業でやる価値はどこにあったのか」というご意見は，本実践を振り返り価値づけていくきっかけとなったため感謝の気持ちをここで述べておきたい。

(5) その後の授業について

本時の後の授業の中で，塩山に稜線できる原理をおさえ直し，凹五角形の土台にできる塩山の稜線の一部は曲線になること，さらにはその曲線が放物線になることを三平方の定理を用いて確認した（**図7**）。

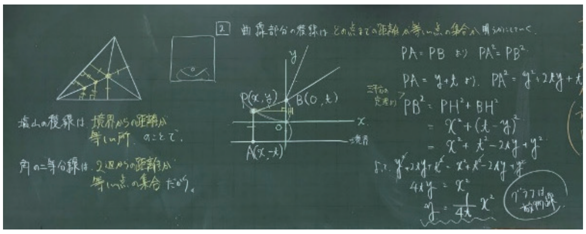


図7　板書の流れ

授業後の生徒の感想として「塩山の稜線が放物線になる理由が理解できた」「今まで二次関数のグラフとしてしか放物線を見ていなかったので，新たな図形的定義を知って面白かった」「次は楕円などもいけるのはないか」などが挙げられた。

また，本実践のまとめとして，塩山の開発を目指した授業を行った。次のように生徒に課題を課した。

> 誰しも山があったら登りたくなるように，塩山の頂点には旗を突き刺したくなる。そこで，班の人数全員分の旗を塩山の頂点に突き刺すことができるような塩山を作成しなさい。ただし，土台とする発泡ポリスチレンパネルは1枚（300mm×450mm（約））しか予算の都合上渡せないので，失敗は許されない。作りたい塩山の稜線を予想し，その予想に基づいて土台を作成すること。※制限時間はこの授業の時間内です。

次はある班の予想と作成した塩山である（**図8**）。

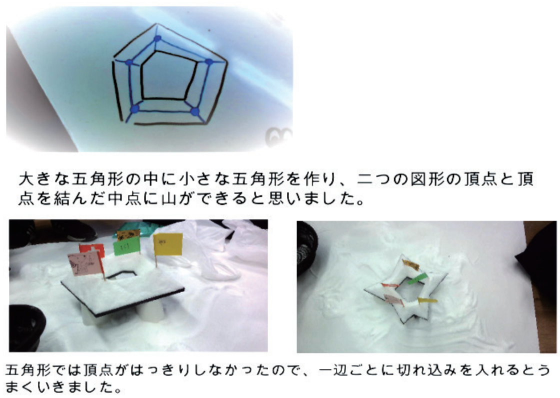


図8　生徒の予想（上）と作成した塩山（下）

また，次はその班の生徒５名の授業後の感想である。

・五角形でやった時に出来なかったので絶望したが，凹五角形にするという機転を利かせた発想のおかげでいいものになった。
・五角形から５個の頂点ができるのは想像できたけど，星型でもできるとは分からなかった。
・自分たちで考えたオリジナルの図形で塩山を作るのはとても興味深かった。他の図形だとどうなるのか考えてみたいと思った。
・稜線とその両辺との距離が短くなればなるほど稜線の凹みが大きいことが分かった。
・形を変えるとうまくできてよかったです。

生徒たちは，予想と実際にできる塩山の差異が生まれた中で，新たな知識を獲得したり，次なる探究への意識が芽生えたりしている。このような姿こそ本来の学習の姿ではないだろうか。つまり，中高接続を意識した学習指導とは，本来の学びからすると自然なものであり，その自然な学びを支援，あるいは自然な学びに誘うために，教える教師は教材研究や指導法の改善等に努める必要があることを，この授業実践を通して改めて感じた。

６．塩山の題材の可能性

塩山の題材を扱った課題学習を行ったことで，中学生が高等学校の数学の授業で学習する角の二等分線や放物線の定義に触れ，新たな知識や概念などを獲得することができた。また，先の協議の中で，「塩山の稜線は，１年生の時からこの題材に触れていける。可能性のある魅力的な題材である。」というご意見をいただいた。本実践では，中学校第３学年の図形領域のまとめとして課題学習を位置づけたが，各学年において塩山の稜線を題材にした授業は十分可能だと考える。例えば，中学校第１学年において，平面図形の単元で作図を学習した後に扱うことが考えられる。また，本時では，提示した学習問題に対して，塩山にできる稜線を予想して，班独自の土台の作成を行った。つまり，土台とする平面図形を変えることで塩山の稜線がどう変化するかを考察していったのである。数学の授業において，問題の一部分を変えて，それにともなって結論はどのように変化するか，いわゆる問題の条件変えを主たる手だてにした数学的活動はしばしば行われる。本実践においても，生徒の感想の中で次のようなものがあった。

・三角錐の高さはどのようにして決まっているか
・半円に塩を盛ると塩山はどうなるのか
・塩ではなく，砂糖や小麦粉など材質の異なるものでは稜線に違いが見られるか。
・土台を水平ではなく傾けると，塩山の稜線がどのようになるか

このような条件変えを生徒自らの問いによって展開が期待できる。このような理由から，塩山は，中学校数学科の題材として様々な可能性をもったものだと考える。

７．おわりに

中学校数学科において塩山の稜線の授業は価値あるものだと改めて主張したい。高等学校で扱う内容も，問いを工夫することで，中学校で扱うことができる。そのような工夫によって，中高の学びの接続が可能となるのである。今後は，塩山の題材の可能性をさらに広げていくために，中学校の各学年において中高接続を意識した学習指導を教材化していきたい。また，高等学校の数学の入学検査問題を，塩で解決できないかというアプローチにも試みたい。塩が作り出す稜線の神秘さのように，日々の授業の中で，生徒が主体的な学びの中で数学の面白さや美しさを感じられるような授業づくりを今後も目指していきたい。

引用文献・参考文献

1）川上公一，『中１ギャップを撃退する指導のアイデア 36』，明治図書，2010 年，3.
2）文部科学省，『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』，日本文教出版，2018 年，12-19.
3）文部科学省，『中学校学習指導要領（平成 29 年告示)』，東山書房，2018 年，77.
4）文部科学省，『中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説　数学編』，日本文教出版，2018 年，171.
5）黒田俊郎，「塩が教える幾何学」，日本数学協会編『数学文化』，第 37 号，2022 年，西三数学サークル，2000 年，47-56.
6）根上生也, 桜井進, 佐藤大器, 清水克彦, 妹尾浩也, 中本敦浩 編，『数学活用』，啓林館，2020 年，26-27.
7）堀部和経, 林一雄, 友田勝久, 中村文則, 早苗雅史,『数学の課題学習ノート　第２集』，デザインエッグ社，2020 年，4-7.
8）池田敏和 ほか 著，『中学校　数学 3』，学校図書，2020 年，111-112.
9）大島利雄 ほか 著，『改訂版　数学Ⅲ』，数研出版，2019 年，36.

使用ソフトウェア

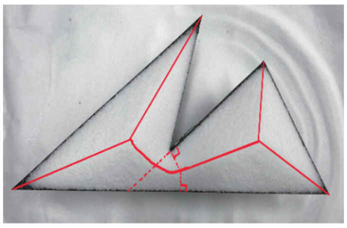
10）Google Jamboard
（https://jamboard.google.com）2023.1.5 閲覧
11）GeoGebra
（https://www.geogebra.org/）2023.1.5 閲覧

Teaching of Mathematics in Junior High Schools with an Awareness of the Junior High School-High School Connection
～ Through classroom practice on the ridge of Salt Mountains.

Yudai KUROKI

Abstract：
This paper discusses the necessity of teaching mathematics in Junior High Schools with an awareness of the Junior High School-High School Connection. We have organized, analyzed, and discussed the practice of problem-based learning using the ridge of Salt Mountains. As a result, we found that the practice of approached the definition of the bisector of an angle and the parabola, which are the contents of the study of mathematics in High School. The students acquired new knowledge and concepts that connect the study of Junior High School-High School as they worked to solve the problem. In the future, we would like to consider using the ridge of Salt Mountains as a subject for lessons at each grade of Junior High School.

本時の学習指導過程

学習内容	学習活動	指導上の留意点
（導入） ・前時の振り返りと本時のめあての提示 （5分）	○前時に作った三角形の土台にできる塩山を観察し，稜線ができることを知る。 ○他の平面図形を土台とした塩山の稜線について関心をもつ。	・塩山を真上から撮影した写真を提示し，平面図形として捉えさせる。
めあて　塩山の稜線には，どのような図形の性質があるか探ろう。		
（展開） ・塩山の稜線の予想 （10分）	○三角形の土台にできた塩山の稜線をもとに，凹五角形の土台にできる塩山の稜線を予想する。	・「塩は最も距離の近いところに落ちる」塩山の原理から，三角形の各辺からの距離が等しい点の集合が直線となる，つまり三角形の土台にできた塩山の稜線は角の二等分線であることを見いださせる。
・凹五角形の土台でできる塩山の稜線の考察 （10分）	○凹五角形の土台の上に塩を盛り，稜線を確認する。 	・塩山を真上からPCで撮影させ，予想した稜線と実際に形成される稜線との間に生まれるズレに着目し，稜線の曲線部分が，どのような曲線なのか探究すべき課題を焦点化する。
・塩山の稜線の曲線部分の検討 （20分）	○塩山を真上から撮影した写真をGeoGebraに貼り付け，曲線が放物線かどうか調べる。	・曲線部分が放物線であれば，その放物線の対称の軸をy軸に，頂点を原点と設定することで，関数$y = ax^2$のグラフとして見ることができることを確認する。 ・三平方の定理を用いることで，関数$y = ax^2$の式を導出させる。 ・放物線は，定点と，定点を通らない定直線からの距離が等しい点の集合であることを捉えさせ，図形的に定義する。
（まとめ） ・塩山の開発へ向けた活動 （5分）	○授業の感想をかく。 ○他の平面図形を土台とした塩山の稜線について考える。	・塩山の稜線を予想し，土台を各自で制作する，塩山の開発を行う次時の課題学習へと繋げる。
備考　図形アプリケーション：「GeoGebra」https://www.geogebra.org/ 準備物：PC（生徒用・教師用），ワークシート，塩，穴あきボウル，トレー， 凹五角形の土台（発泡ポリスチレンパネル），紙コップ，模造紙		