別記様式第５号

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博　士　（　理　学　）	氏名	井　口　　大　幹
学位授与の要件	学位規則第４条第①・２項該当		

論　文　題　目

Distance and the Goeritz groups of Heegaard splittings
(Heegaard 分解の距離と Goeritz 群)

論文審査担当者

主　　査　　教　授　　古宇田　悠哉
審査委員　　教　授　　寺垣内　政一
審査委員　　准教授　　小鳥居　祐香

〔論文審査の要旨〕

本論文は,3 次元多様体の基本的な分解である Heegaard 分解の対称性を記述する群である Goeritz 群について，具体的な記述や有限性の十分条件を論じたものである。

向き付け可能な任意の閉 3 次元多様体は, ある閉曲面で切り開くことによりハンドル体とばれる基本ピース 2 つに分解される。この分解を Heegaard 分解とよぶ。本論文の主題である Goeritz 群とは，与えられた Heegaard 分解を保つ多様体の自己同相写像のイソトピー類のなす群のことである。Goeritz 群の諸性質を記述する際には，距離とよばれる Heegaard 分解の複雑度が重要な指標になる。実際，距離が 1 以下の Heegaard 分解の Goeritz 群は常に無限群であることが定義から容易に確かめられ，逆に，距離が 4 以上の Heegaard 分解の Goeritz 群は常に有限群であることが知られている（Johnson 2010）。距離が 2 の Heegaard 分解については，Goeritz 群が有限になる例，無限になる例の双方が存在することが知られている。

第 1 章では，3 次元多様体のツイストブック分解とよばれる分解から自然に誘導される Heegaard 分解に着目し，その Goeritz 群を研究している。主要な成果は次の 2 つである。

１つ目は距離が 2 の Heegaard 分解の Goeritz 群に関するものである。上述の通り，距離が 2 の Heegaard 分解については，Goeritz 群が有限になる例，無限になる例の双方が存在するが，無限群になる例としては Heegaard 分解がオープンブック分解から誘導される場合のみが知られていたが，本論文では，ツイストブック分解を用いることで，距離が 2 の Heegaard 分解で Goeritz 群が無限群になる例を量産しており，しかも，これらはオープンブック分解から誘導されないことを示している。さらに，これらの Goeritz 群は向き付け不可能曲面の写像類群と同型であることを示すことで群構造まで正確に決定している。

2 つ目の結果は距離が 4 の Heegaard 分解の Goeritz 群に関するものである。この場合 Goeritz 群が有限群になることは上述の通り既に知られていたが，精密な群構造についてはほとんど何も知られていなかった。本論文では，「一般的な」ツイストブック分解から構成される Heegaard 分解の距離は 4 であり，その Goeritz 群は分解の「モノドロミー」とよぶべき元から自然に決定される群であることを示している。

第 2 章では，Heegaard 分解の Goeritz 群の一般化にあたる概念である，3 次元多様体内の絡み目の橋分解の Goeritz 群の性質が議論されている。絡み目の橋分解についても距離という複雑度は自然に拡張される。これに基づき，本章では距離が 6 以上の橋分解の Goeritz 群は有限群になることが示されている。これは，上述の Johnson の結果の一般化と見做せる成果である。証明は Rubinstein-Scharlemann (1996) により導入された特異点論的手法であるスウィープアウトとグラフィックを多様体，Heegaard 曲面，絡み目の 3 対に対して適用することにより与えられている。複雑な状況設定であるが故に生じる技術的な難点を解決していく緻密な議論を展開しており，最終的に橋分解の Goeritz 群に関する一つの基本定理といえる帰結を導くことに成功している。

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認められる。