学位論文要旨

Distance and the Goeritz groups of Heegaard splittings
（Heegaard 分解の距離と Goeritz 群）

井口　大幹

3 次元球体に g 個のハンドルを接着することにより得られるコンパクトで向き付け可能な 3 次元多様体 H を種数 g のハンドル体とよぶ．任意の閉 3 次元多様体 M はハンドル体 H のコピー H_1, H_2 をその境界に沿って貼り合わせることで得られることが知られている．3 次元多様体のこのような分解は Heegaard 分解とよばれ，$M = H_1 \cup_\Sigma H_2$ または (M, Σ) のようにあらわされる．ここで $\Sigma := \partial H_1 = \partial H_2$ は H_1 と H_2 の共通の境界である種数 g の閉曲面をあらわす．本論文の主題である Goeritz 群は Heegaard 分解の対称性を記述する群である．Heegaard 分解 $M = H_1 \cup_\Sigma H_2$ に対し，その Goeritz 群 $\mathcal{G}(M, \Sigma)$ は分解 $M = H_1 \cup_\Sigma H_2$ を保つ M の自己同相写像のイソトピー類がなす群として定義される．また，曲面 Σ へ写像を制限することにより得られる自然な単射準同型 $\mathcal{G}(M, \Sigma) \to \mathrm{MCG}(\Sigma)$ が存在する．この意味で Goeritz 群 $\mathcal{G}(M, \Sigma)$ を曲面 Σ の写像類群 $\mathrm{MCG}(\Sigma)$ の部分群とみなすこともできる．Goeritz 群はそれ自身が興味深い研究対象であるだけでなく，低次元トポロジーの研究において多くの応用をもつため非常に重要である．しかしながら，この群の基本的な性質についてその多くは未解明であり，謎に包まれている．例えば，Goeritz 群が有限群，有限生成群或いは有限表示群になるための十分条件を調べることはこの分野の研究における主要な未解決問題の１つである．

本論文では，これらのうち特に Goeritz 群の有限性に関する問について考える．そのために Heegaard 分解の (Hempel) 距離とよばれる複雑度に注目する．曲線複体 $\mathcal{C}(\Sigma)$ は曲面 Σ 上の本質的単純閉曲線のイソトピー類を頂点 (0-単体) にもつような単体複体である．$\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ をそれぞれ H_1 と H_2 のメリディアン円盤の境界で代表されるような $\mathcal{C}(\Sigma)$ の頂点からなる集合とする．このとき Heegaard 分解の距離 $d(M, \Sigma)$ は $\mathcal{C}(\Sigma)$ における $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ の距離として定義される．一般的に言って，複雑な図形ほど対称性は低くなると考えられるが，実際 $d(M, \Sigma) \geq 4$ ならば Goeritz 群は有限群になることが知られている [Joh10]．反対に $d(M, \Sigma) \leq 1$ のとき Goeritz 群は常に無限群になることが知られている．一方 $d(M, \Sigma) = 2$ または 3 のときには散発的な例が僅かに知られているだけであり，この場合における Goeritz 群の性質については殆ど知られていない．本論文の 1 章では，まず $d(M, \Sigma) \geq 2$ のとき Goeritz 群が有限巡回群或いは 2 面体群と同型であるような例が存在することをみる．さらに twisted book 分解とよばれる 3 次元多様体の分解に注目することにより，Heegaard 分解を具体的に構成し，その Goeritz 群を決定した．具体的な内容は以下の通りである:

(1) Twisted book 分解から得られる Heegaard 分解の Goeritz 群 $\mathcal{G}(M, \Sigma)$ がコンパクト向き付け不可能曲面 F の写像類群 $\mathrm{MCG}(F)$ と同型になるための十分条件を与えた．(さらにこのとき $d(M, \Sigma) = 2$ である.)

(2) Twisted book 分解から得られる “一般の” Heegaard 分解は $d(M, \Sigma) = 4$ を満たす．(したがって $\mathcal{G}(M, \Sigma)$ は有限群である.) さらにこのとき $\mathcal{G}(M, \Sigma)$ は twisted book 分解の構造から自然に定まる部分群と一致する．

$d(M,\Sigma)=2$ とき Goeritz 群が無限群になる例として, 3 次元多様体の open book 分解とよばれる分解から構成されるものがこれまでに知られていたが, (1) はこの例とは別の例を与えている. また $d(M,\Sigma)\geq 2$ のとき (有限であるか無限であるかに関わらず) Goeritz 群の詳しい構造については殆ど知られていなかった. 上記 (1) と (2) のように $d(M,\Sigma)\geq 2$ のとき Goeritz 群が具体的に計算できる場合は非常に稀なケースであると言える. (1) は “binding” とよばれる曲面 Σ 上の単純閉曲線が Goeritz 群の作用で不変であるための条件を求めることに帰着される. 主な道具として, twisting number とよばれるハンドル体 H の境界 ∂H 上の単純閉曲線に関する複雑度を用いる. (2) について, twisted book 分解が “一般的” であることの定式化には Teichmüller 空間の Thurston 境界の理論からのアイデア (measured lamination や pseudo-Anosov 写像などの概念を含む) が用いられる.

3 次元多様体内の絡み目の 2 つの (g,n)-タングル (つまり, 種数 g のハンドル体内の n 本の自明な弧) への分解を橋分解 (または (g,n)-分解) とよぶ. 絡み目の橋分解に対しても距離や Goeritz 群の概念を定義することができる. 2 章では, 絡み目の橋分解の Goeritz 群について次のことを示す:

定理. $g\geq 0$, $n>0$, $(g,n)\neq(0,1),(0,2),(1,1)$ とする. $(M,L;\Sigma)$ を 3 次元多様体 M 内の絡み目 L の (g,n)-分解とし, その距離 $d(M,L;\Sigma)$ が 6 以上であるとする. このとき, この橋分解の Goeritz 群 $\mathcal{G}(M,L;\Sigma)$ は有限群である.

上記結果の証明には Rubinstein-Scharlemann [RS96] によって導入され Johnson [Joh10] らによって発展させられた “ double sweep-outs ” の手法を用いる. これは写像のパラメーター族に関する Cerf の理論の応用とみなせる. 証明の背景にあるアイデアは以下の通りである. 絡み目の橋分解に対し, M 上の関数 $f:M\to[-1,1]$ であって各 $f^{-1}(t)$ $(t\in(-1,1))$ が絡み目 (M,L) の橋分解曲面となるものを考える. このような性質を満たす関数は sweep-out とよばれる. 今 Goeritz 群 $\mathcal{G}(M,L;\Sigma)$ の元 φ が 1 つ与えられ, この φ が橋分解のイソトピー（つまり M における橋分解の連続変形）で代表されていると仮定する. このときこのイソトピーに付随して sweep-out の族 $\{f_r\mid r\in[0,1]\}$ が得られる. $r_0\in(0,1)$ とする. 正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ 内の水平な弧 $\ell=[-1,1]\times\{t_0\}$ について考える. $(s_0,t_0),(s_1,t_0),\ldots,(s_{k-1},t_0),(s_k,t_0)$ を ℓ 上にある $f\times f_{r_0}$ の正則値とすると, これらの点の $f\times f_{r_0}$ による逆像 c_i $(1\leq i\leq k)$ は橋分解曲面 $f^{-1}(s_i)$ 上の単純閉曲線である. 仮に c_i が全て $f^{-1}(s_i)$ 内で本質的であったとすると, これらの単純閉曲線は曲線複体 $\mathcal{C}(\Sigma\setminus L)$ 内の道を定める. さらに, これらの単純閉曲線の中に $\mathcal{D}_1$ と $\mathcal{D}_2$ のそれぞれに含まれるものが存在することを示すことで, 距離 $d(M,L;\Sigma)$ に関する上からの評価が得られる. 実は, 一般には 必ずしも c_i が $f^{-1}(s_i)$ 内で本質的であるとは限らない. しかし, Goeritz 群 $\mathcal{G}(M,L;\Sigma)$ が無限位数の元 φ を含むならば, (r が $[0,1]$ を動くとき) f と f_r から定まるグラフィックとよばれる正方形 $[-1,1]\times[-1,1]$ の階層構造の変化の様子を注意深く観察することにより, c_i が上記性質を満たすように $r_0\in(0,1)$ と $\ell\subset[-1,1]\times[-1,1]$ を選ぶことができる. 以上が定理の証明の概略である.

参考文献

[Joh10] J. Johnson, Mapping class groups of medium distance Heegaard splittings, Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), no. 12, 4529–4535.

[RS96] H. Rubinstein and M. Scharlemann, Comparing Heegaard splittings of non-Haken 3-manifolds, Topology **35** (1996), 1005–1026.