学位論文要旨

On the configuration of the singular fibers of jet schemes of rational double points
（有理二重点のジェットスキームの特異ファイバーの配置について）

是枝 由統

次数 m の無限小曲線から代数多様体 X への射を m 次ジェットと呼び、m 次ジェットの全体にスキーム構造が定まる。これを X の m 次ジェットスキームといい X_m とかく。ジェットスキームやアークスキームは 1968 年のプレプリント（1995 年に出版された）で John F. Nash により導入された。

0 次のジェットスキームは元の空間と自然に同型であるので、X と X_0 を同一視する。また $m \geq m'$ について, m 次近似を m' 次近似にする射 $\pi_{m,m'} : X_m \to X_{m'}$ がある。これを切り詰め射という。これらは射影系を成し、その射影極限をアークスキームと呼んで X_∞ と書く。ジェットスキームやアークスキームでの切り詰め射による特異点上のファイバーを特異ファイバーといい X_m^0, X_∞^0 と書く。この特異ファイバーは特異点の性質をよく反映していることが期待される。例えば、アークスキーム上の特異ファイバーについて Nash 問題とよばれる次のような重要な問題がある；「「Nash 成分」と呼ばれる特異ファイバーの既約成分と「本質的因子」とよばれる特異点解消に現れる因子は一対一に対応するか。」最近曲面の場合にこの問題が肯定的に解決された。一般の場合には石井志保子氏らにより一対一に対応しない例なども与えられたが、トーリック多様体の場合には一対一対応することなどが示されている。

一方でジェットスキーム上の特異ファイバーの既約成分と特異点解消の例外因子との対応に関する研究は Mourtada 氏や Plénat 氏らにより最近になって行われ始めた。ジェットスキーム上の特異ファイバーの既約成分と例外曲線の間には曲面の場合でも単純な対応関係は存在しない。実際、特異ファイバーの既約成分の個数と最小特異点解消の例外曲線の個数は異なる。しかし、曲面で有理２重点の場合には十分大きな次数のジェットスキーム上の特異ファイバーの既約成分は最小特異点解消の例外曲線と一対一に対応することが Mourtada 氏（[1, 2]）により示されている。

そこで本論文ではより詳しく、特異ファイバーの既約成分はどのような位置関係にあるか、という問題を考えた。これまで異なる次数の特異ファイバーの既約成分をあつめ、切り詰め射を用いてそれらの関係を調べる研究は行われてきたが、ジェットの次数を固定して特異ファイバーの既約成分同士の関係を調べることはほとんどされてこなかった。この問題に関して、A_n 型および D_4 型の場合に特異ファイバーの既約成分の共通集合を調べることで、特異ファイバーの既約成分の位置関係に関する情報を得ることができた。さらに、特異ファイバーの既約成分の位置関係の情報からグラフを構成し、このグラフが最小特異点解消の特異点解消グラフと同型であることを示した。具体的には、特異ファイバーの既約成分の共通集合の間の包含関係を調べることで、グラフにおいて隣接すべき既約成分を決定しグラフを構成した。

より詳細には、次の二つの定理を示した。

<u>A_n 型の曲面の場合</u>

定理 1　$X \subseteq \mathbb{C}^3$ を原点に A_n 型の特異点をもつ曲面とする。$m \gg 0$ について特異ファイバー X_m^0 を $X_m^0 = Z_m^1 \cup \cdots \cup Z_m^n$ （Z_m^i の番号は例外曲線に対応した番号付け）と既約分解する。このとき $1 \leq i < j \leq n$ について $Z_m^i \cap Z_m^j$ は $n-(j-i)+2$ 個の既約成分に分解されており、

$$Z_m^i \cap Z_m^j \text{ が } \{Z_m^{l_1} \cap Z_m^{l_2} \mid 1 \leq l_1 < l_2 \leq n\} \text{ で極大} \Leftrightarrow j-i=1.$$

<u>D_4 型の曲面の場合</u>

定理 2　$X \subseteq \mathbb{C}^3$ を原点に D_4 型の特異点をもつ曲面とする。$m \gg 0$ について特異ファイバー X_m^0 を $X_m^0 = Z_m^1 \cup \cdots \cup Z_m^4$ （Z_m^1 は特異点解消グラフで次数 3 の頂点に対応する例外曲線に対応）と既約分解する。このとき $\{Z_m^{l_1} \cap Z_m^{l_2} \mid 1 \leq l_1 < l_2 \leq 4\}$ の極大元は

$$Z_m^1 \cap Z_m^2, Z_m^1 \cap Z_m^3, Z_m^1 \cap Z_m^4.$$

これらの定理の証明は次の方法で行った。A_n 型の場合には、特異ファイバーの既約成分 Z_m^i について定義イデアルの具体的な生成元がわかっている。そのため共通集合に対応する定義イデアルの生成元もわかる。そこで、このイデアルの根基の素イデアル分解を与えた。これにより共通集合の既約分解を与えた。

D_4 型の場合には特異ファイバーの既約成分の定義イデアルの生成元は具体的にわかっていない。そのため、A_n 型の場合と同様の方法によって共通集合の間の包含関係を決定することはできない。しかし、一方で既約成分の交わりに含まれる特定のジェットを見つけ、他方では既約成分の交わりのイデアルに含まれる元を見つけることで共通集合の間の包含関係を決定した。

これらの定理を念頭に、次の方法でグラフを構成した。

構成 3　グラフ (V,E) を以下のように定める。

- V の元は特異ファイバーの既約成分 $Z_m^1, ..., Z_m^n$。
- E の元は $\{Z_m^{l_1} \cap Z_m^{l_2} \mid 1 \leq l_1 < l_2 \leq n\}$ の包含関係に関する極大元。すなわち、
  $Z_m^i \cap Z_m^j$ が極大のとき Z_m^i と Z_m^j の間に辺を与える。

定理 1、定理 2 により次が成り立つ。

系 4　A_n 型、D_4 型の場合には構成 3 の方法で得られたグラフは最小特異点解消の解消グラフに同型である。

参考文献

[1] H. Mourtada, *Jet schemes of toric surfaces*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 349 (2011), no. 9–10, 563–566.

[2] H. Mourtada, *Jet schemes of rational double point singularities*, Valuation theory in interaction, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2014), 373–388.