論 文 審 査 の 要 旨

博士の専攻分野の名称	博　士（　理学　）	氏名	近藤　裕司
学位授与の要件	学位規則第４条第①・２項該当		

論文題目

A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups（　ある冪零リー群上の左不変擬リーマン計量の分類　）

論文審査担当者

主　　査	准教授	奥田 隆幸
審査委員	教　授	藤森 祥一
審査委員	教　授	古宇田 悠哉
審査委員	教　授	松本 眞

〔論文審査の要旨〕

群が作用する多様体上の不変幾何構造(計量, 複素構造, シンプレクティック構造など)の分類や構成は, 微分幾何の研究テーマの一つである．特にリー群 G に対して, G 上の左不変幾何構造の研究は近年盛んに行われている．当該論文ではリー群上の左不変計量(正定値とは限らない)を主題としている．主結果は $H_3 \times R^{n-3}$ (H_3 は 3 次元ハイゼンベルグ群, R^{n-3} は $n-3$ 次元実ベクトル空間）における左不変計量を分類したというものである．以下に動機も含めて詳細を述べる．

G をリー群とし，(p,q) を $p+q = \dim G$ を満たす非負整数の組として固定する．$M_{p,q}(G)$ を G 上の左不変 (p,q) 計量全体のなす集合とする．$M_{p,q}(G)$ はアフィン対称空間の構造を持つことが知られている．可換リー群 R^*（非零実数のなすリー群）と G 上の自己同型群 $Aut(G)$ との直積群を $R^*Aut(G)$ と書く．$R^*Aut(G)$ は G 上の接束 TG への作用を通じて対称空間 $M_{p,q}(G)$ に自然に作用する．この作用による商空間(軌道空間）を G 上の左不変 (p,q) 計量のモジュライ空間と呼ぶことにする．G 上の左不変 (p,q) 計量の分類問題とは, 上記モジュライ空間の記述を行うことと言い換えることができる．

リー群 G 上の左不変正定値計量（$q=0$ の場合）の分類問題については多くの先行研究がある．例えば左不変正定値計量がただ一つ存在する（つまり上記モジュライ空間が $q=0$ の状況で一点となる）ケースについては, G が R^n, G_{RH^n}（双曲空間に付随する可解リー群), $H_3 \times R^{n-3}$ のいずれかと同型の場合に限ることが知られている．しかし正定値とは限らない場合のリー群上の左不変計量については, 対称空間 $M_{p,q}(G)$ の構造が複雑になる(等質空間としてのイソトロピーが非コンパクトになる)という理由から先行研究がそこまで多くない状況である．

リー群 G 上の正定値とは限らない左不変計量の分類問題の研究テーマとして,

$$G = R^n,\ G_{RH^n},\ H_3 \times R^{n-3}$$

(つまり左不変正定値計量が一意）の場合に, 正定値とは限らない左不変計量の分類を行うということを考えたい．まずこれらのケースでは正定値とは限らない場合においても, 左不変計量は有限種類であるということが知られている(旗多様体についての一般論を用いる)．また具体的な分類の先行研究として, $G = R^n$, G_{RH^n}, H_3 のケースについては, す

でに正定値とは限らない左不変計量の分類が知られている(Kubo-Onda-Taketomi-Tamaru [Hiroshima Math. J. (2016)] など).

当該論文はこの問題意識を受けて，$H_3 \times R^{n-3}$ （$n > 3$）のケースにおいて，正定値とは限らない左不変計量の分類を行い，上記三系列のリー群についての左不変計量の分類を完成させたというものである（同じ設定でローレンツ計量に限った場合の結果は著者自身と田丸氏による先行研究 [to appear in Tohoku Math. J. (参考論文)] がある）. 特に $H_3 \times R^{n-3}$ （$n > 3$）上の左不変計量のモジュライ空間の濃度については以下のような結果が得られている.

$M_{p,q}(H_3 \times R^{n-3})$ の $R^* Aut(H_3 \times R^{n-3})$ 作用の軌道空間(モジュライ空間)の濃度は下記の通りである:

21 if $p, q \geq 3$,
15 if $p \geq 3,\ q = 2$ or $p = 2,\ q \geq 3$,
10 if $(p, q) = (2,2)$,
6 if $p = 1, q \geq 3$ or $p \geq 3, q = 1$.

また当該論文では分類した $H_3 \times R^{n-3}$ 上の左不変計量の曲率を考察することにより，$R^* Aut(H_3 \times R^{n-3})$ 作用を法として同値でない(つまり代数的には別物である)が，擬リーマン多様体として等長となる(つまり幾何的には同一である)例も発見している.

以下，上記分類結果を得るために当該論文で用いられている手法について述べる．一般にリー群 G 上の左不変計量は G のリー代数 $Lie(G)$ 上の内積と一対一に対応する．当該論文では $Lie(H_3 \times R^{n-3})$ の中心と導来部分リー代数の内積の符号，およびそれらの関係を用いて，$H_3 \times R^{n-3}$ の左不変計量の $R^* Aut(H_3 \times R^{n-3})$ 作用に関する完全不変量が導出されている．証明は，一般には退化しているかもしれない不定値内積についての線型代数の一般論を展開することによって与えられている．この手法は $R^* Aut(G)$ が十分大きくなるリー群 G（つまり対称性の高いリー群）については同様に適用できる可能性があり，今後の発展が期待される.

以上，審査の結果，本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める.

参考論文

Yuji Kondo, Hiroshi Tamaru, A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie group, to appear in Tohoku Math. J.