# 学位論文要旨

# A classification of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on some nilpotent Lie groups (ある冪零リー群上の左不変擬リーマン計量の分類)

近藤　裕司

## 1. イントロダクション

Lauret ([3]) により, 次の定理が知られている.

**定理 1** ([3])**.** 連結かつ単連結なリー群で, スカラー倍と等長の違いを除いて左不変リーマン計量を1つだけ持つものは, 同型の違いを除いて以下の3つである：

$$\mathbb{R}^n, \quad G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}\ (n \geq 2), \quad H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}\ (n \geq 3).$$

ここで, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ は実双曲空間のリー群と呼ばれるものであり, $H_3$ は3次元ハイゼンベルグ群である. 上記のリー群に対して, 左不変擬リーマン計量の場合の結果が以下のように知られている.

**定理 2** ([1, 4, 5])**.** スカラー倍と等長の違いを除いて,

- 任意の符号数に対して, $G_{\mathbb{R}\mathrm{H}^n}$ 上の左不変擬リーマン計量はちょうど3つ存在する.
- $H_3$ 上には, 左不変ローレンツ計量がちょうど3つ存在する.

本論文では, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ $(n \geq 4)$ に対して, 左不変擬リーマン計量を次の定義で与えられる同値関係により分類した.

**定義 3.** $g_1$ と $g_2$ をリー群 $G$ 上の左不変擬リーマン計量とする. このとき $(G, g_1)$ と $(G, g_2)$ が**スカラー倍と自己同型の違いを除いて同値**であるとは, 以下を満たすこと: ある $c > 0$ とリー群自己同型 $\varphi : G \to G$ が存在して, 任意の $a \in G$ と $x, y \in T_aG$ に対し,

$$g_1(x, y)_a = cg_2(d\varphi_a(x), d\varphi_a(y))_{\varphi(a)}$$

が成り立つこと. ただし, $T_aG$ は $a$ における $G$ の接空間, $d\varphi_a$ は $a$ における $\varphi$ の微分写像である.

[2] ではこの同値関係により, $H_3 \times \mathbb{R}^{n-3}$ $(n \geq 4)$ 上の左不変ローレンツ計量が分類されている. 本論文の主結果は, この結果を任意の符号数での分類に拡張したものである.

**定理 4.** $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(p + q \geq 4)$ とする. このとき, $H_3 \times \mathbb{R}^{p+q-3}$ 上の符号数 $(p, q)$ の左不変擬リーマン計量のスカラー倍と自己同型の違いを除いた個数は以下のようになる：

(1) $p, q \geq 3$ ならば21個.

(2) $p \geq 3$ かつ $q = 2$ ならば15個.

(3) $p \geq 3$ かつ $q = 1$ ならば6個.

(4) $p = q = 2$ ならば10個.

ここで任意の$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$とリー群$G$に対して, $G$上の符号数$(p, q)$と$(q, p)$の左不変擬リーマン計量は$1:1$に対応することに注意する. したがってこの定理4により, 定理1の中で述べられた3つのリー群に対して, スカラー倍と自己同型の違いを除いた左不変擬リーマン計量の分類が完成した.

## 2. 主定理の証明の key idea

以下では$p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ $(p+q \geq 4)$ とし, $G := H_3 \times \mathbb{R}^{p+q-3}$とする. $G$上の符号数$(p, q)$の左不変擬リーマン計量全体の空間を$\mathfrak{M}_{(p,q)}(G)$で表す. この空間は次のような等質空間表示を持つ:

$$\mathfrak{M}_{(p,q)}(G) = \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/\mathrm{O}(p, q). \tag{1}$$

定義3による$G$上の左不変擬リーマン計量の同値類は, $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})$内の放物型部分群

$$P := \left\{ \left( \begin{array}{c|ccc|cc} * & * & \cdots & * & * & * \\ \hline 0 & * & \cdots & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * & * \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R}) \right\}$$

による$\mathfrak{M}_{(p,q)}(G)$への群作用の軌道と$1:1$に対応する. この作用の軌道空間$P \backslash \mathfrak{M}_{(p,q)}(G)$は(1)により,

$$P \backslash \mathfrak{M}_{(p,q)}(G) = P \backslash \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/\mathrm{O}(p, q)$$

のように同一視できる. 右辺の両側剰余集合は$\mathrm{O}(p, q) \backslash \mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/P$と対応する. さらに$P$の定義から, $\mathrm{GL}(p+q, \mathbb{R})/P$は旗多様体

$$F_{1,p+q-2} := \{(V_1, V_{p+q-2}) \mid V_1 \subset V_{p+q-2} \subset \mathbb{R}^{p+q},\ \dim V_i = i\}$$

と同一視される. したがって, $\mathrm{O}(p, q)$ による旗多様体 $F_{1,p+q-2}$ への作用の軌道空間$\mathrm{O}(p, q) \backslash F_{1,p+q-2}$を決定することで, 定理4を証明した.

## 参考文献


[1] A. Kubo, K. Onda, Y. Taketomi and H. Tamaru, *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J. **46** (2016), 357–374.

[2] Y. Kondo and H. Tamaru, *A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups*, Tohoku Math. J. to appear, arXiv:2011.09118v1.

[3] J. Lauret, *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194.

[4] S. Rahmani, *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires, de dimension trois*, J. Geom. Phys. **9** (1992), no. 3, 295–302.

[5] N. Rahmani and S. Rahmani, *Lorentzian geometry of the Heisenberg group*, Geom. Dedicata **118** (2006), 133–140.