

## 論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 ( 理 学 )	氏名	梶浦 大起
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・② 項該当		
論文題目			
Point arrangements on some combinatorial objects (いくつかの組合せ論的对象上の点配置について)			
論文審査担当者			
主 査	准教授	奥田 隆幸	
審査委員	教 授	松本 眞	
審査委員	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	木村 俊一	
〔論文審査の要旨〕			
<p>ある構造を持った数学的对象の上に、目的の性質を満たす点集合を構成する問題を広く「点配置問題」という。しばしば工学的応用に端を発しつつ、純粋数学として興味深い分野へと発展を続けている。本論文においては、第一章においては digital <math>(t, m, s)</math>-net と呼ばれる数値積分に関連する点配置問題を扱い、第二章においては difference set と言われる組合せ論的デザインに関連する点配置問題を扱っている。</p> <p>第一章において扱われている digital <math>(t, m, s)</math>-net は Niedereitter (1987) により導入された概念であり、<math>s</math> 次元超立方体内に <math>2^m</math> 個の点を配置したときそれらが「理想的な一様性」からどのくらい欠陥があるかの尺度を <math>t</math> であらわすものである。2 元体上の線形代数により組合せ論的な特徴づけが与えられており、生成行列と呼ばれる 2 元体成分の <math>s</math> 個の <math>m</math> 次正方行列 <math>(M_1, \dots, M_s)</math> により digital <math>(t, m, s)</math>-net が決定され、値 <math>t</math> が求まる。 <math>t = 0</math> が理想的だが、 <math>s \geq 4</math> では <math>t &gt; 0</math> であることが知られており、 <math>s \leq 3</math> では <math>t = 0</math> が達成できることが示されていた。一方、マルコフ過程モンテカルロ法からの要請により、生成行列が <math>(I, B, B^2, \dots, B^{s-1})</math> の形をしていて、 <math>B</math> の乗法位数が大きい <math>(t, m, s)</math>-net に需要があった(Chen, et.al. 2012)。本論文では、 <math>t = 0</math>、 <math>s = 3</math> の場合にこのような <math>B</math> の探索を計算機を援用して行ったが、得られる <math>B</math> の乗法位数は意外にも全て 3 になった。計算結果を吟味し、これが一般的に成り立つことを証明した。さらに、このような行列 <math>B</math> を全て記述する簡明な式を得ることができた(第一章 Theorem 1.1.1)。これにより、マルコフ過程モンテカルロに利用するには値 <math>t</math> をより大きく設定する必要性があることがわかった。また証明に使われた手法はのちに Hofer-Suzuki(2019)による <math>t = 0</math>、 <math>s = 3</math>、 <math>m =</math>一般、に対する <math>(t, m, s)</math>-net の完全分類へとつながった。</p> <p>第二章においては、信号通信理論から組合せ論デザインの構成にわたり広く応用されている difference set という概念に対して一般化を行い、その基本的な性質や構成法、存在に関する強い必要条件を与えた。difference set とは有限群 <math>G</math> の部分集合が満たす性質であり、1940 年代から現在まで盛んに研究されている。本論文では、まず有限群 <math>G</math> を一般化した概念である regular unital relation partition (RURP) を導入した。これは、有限集合 <math>X</math> と <math>X \times X</math> の分割(すなわち <math>X \times X</math> から添え字集合 <math>I</math> への全射)の組であって、適切</p>			

な正則性条件を満たすものである。有限群  $G$  に対しては、 $X = G = I$  ととり、全射として「 $(g, h)$  に対して「差」 $g^{-1}h$  をとる写像」を考えると RURP が与えられる(古くから群  $G$  に付随する thin association scheme として研究されている)。また  $X = G$  とし、 $I$  を  $G$  の共役類集合とし、全射として「 $(g, h)$  に対して「差」 $g^{-1}h$  の共役類をとる写像」を考えると、RURP が与えられる(古くから群  $G$  に付随する群 association scheme として研究されている)。第二章においては、RURP の台集合  $X$  の部分集合  $D$  に対して、「equi-distributed subset」という性質を定義した。RURP が上述の「 $G$  の thin association scheme」である場合には equi-distributed subset と difference set は同じ概念となる。RURP が上述の「 $G$  の群 association scheme」である場合には、equi-distributed subset は著者らの先行研究 (Kajiura et.al. 2019) において導入された「pre-difference set」と同じ概念となる。また  $G$  が可換であるときには difference set と pre-difference set は同じ概念となる。

第二章前半は equi-distirubted subset の構成に関するものである。RURP に対して「fusion」という変形を定義し、元の RURP における equi-distributed subset は fusion 後も equi-distributed subset であることを示した。直ちに従う帰結として difference set は pre-difference set であることが示される。また fusion を利用して、直積群の difference set から半直積群の pre-difference set を構成する方法も与えられている (Theorem 2.3.1)。これにより二面体群  $D_{16}$  や三角行列群  $UT(3,3)$  には(非自明 difference set は存在しないが)非自明 pre-difference set が存在することが証明できる。全く異なる構成法として、equi-distributed subset が与えられた RURP が二つ与えられたとき、その直積 RURP 上に equi-distributed subset を構成する方法を与えた (Theorem 2.4.2)。この結果は difference set に関する Menon (1962) の結果の一般化であり、彼の結果を含んでいる。これらの構成法を組み合わせることにより「有限群と、その非自明 pre-difference set であるが difference set ではない部分集合」の組の無限列を構成することができる。

第二章後半は非自明 equi-distributed subset の存在の必要条件を研究している。RURP がその商として群  $Z/ZZ$  の thin association scheme を含むという仮定の下で、equi-distributed subset の各種パラメータが満たさなければならない必要条件が与えられている (Theorem 2.5.9)。系として、そのような RURP に非自明な equi-distributed subset が存在する場合、台集合  $X$  の濃度に強い制限が加わる。これらの結果は difference set に対する (Deng 2004) および (Shiu 1996) の結果を一般化したものであり、彼らの結果はこの結果から従う。

本章で導入された equi-distributed subset の概念は著者らの共同研究によりさらに一般化され、位数120の二種の群に対する「非自明 difference set の非存在性」の証明に応用されるなど、適用価値が広い。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士(理学)の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

(1) Characterization of matrices  $B$  such that  $(I, B, B^2)$  generates a digital net with  $t$ -value zero.

Hiroki Kajiura, Makoto Matsumoto, Kosuke Suzuki.

Finite Fields and Their Applications, volume 52(2018), 289–300.

(2) Non-existence and Construction of Pre-difference Sets, and Equi-Distributed Subsets in Association Schemes.

Hiroki Kajiura, Makoto Matsumoto, Takayuki Okuda.

Graphs and Combinatorics, volume 37(2021), 1531–1544