

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	植松 香介
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 1・②項該当		
論文題目			
<p>On Classification of Irreducible Quandle Modules over a Connected Quandle (連結カンドル上の既約カンドル加群の分類について)</p>			
論文審査担当者			
主 査	准教授	高橋 宣能	
審査委員	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	島田 伊知朗	
審査委員	教 授	松本 眞	
〔論文審査の要旨〕			
<p>本論文は、カンドル上の加群とカンドルから定まる群上の加群の関係について分析し、カンドル上の既約加群の分類が、カンドルから定まる 2 つの群上の既約加群の分類に帰着されることを証明している。また、二種類の有限カンドルの系列について、その上のカンドル加群の分類を具体的に与えている。</p>			
<p>カンドルとは、自己分配性および巾等性を持つ演算 \triangleright により定まる亜群 (Q, \triangleright) であり、結び目理論での応用を念頭に Joyce, Matveev により導入された。それ以前にも、カンドルやその一般化である rack, また特別なカンドルである「圭」は様々な文脈で発見・再発見されており、基本的な重要性を持つ代数的構造であると言える。</p>			
<p>群や環の研究に加群が用いられるのと同様に、カンドルの研究においても加群の概念は有用であり、今後さらに重要性が増すものと思われる。歴史的には、自明な作用を持つ加群に対してコホモロジー群が定義された後、その一般化のために現在「付随する群上の加群から誘導される加群」と呼ぶべき加群概念が定義され、2000 年代に最も一般的な形で加群の定義がなされた。</p>			
<p>カンドル Q 上の加群は、</p>			
<ul style="list-style-type: none"> ● 各点 p に対する加法群 A_p と ● 各点の組 p, q に対する同型 $\eta_{p, q}: A_q \rightarrow A_{p \triangleright q}$ および準同型 $\tau_{p, q}: A_p \rightarrow A_{p \triangleright q}$ 			
<p>から成り、いくつかの条件を満たすものとして定義される。この条件は幾分煩雑だが、しかるべき圏におけるアーベル群対象を定めるものとして解釈できる。また、A_p として環 R 上の加群を取り $\eta_{p, q}$ および $\tau_{p, q}$ を R 上の準同型とすることにより、R を係数環とする Q 上の加群が定義される。</p>			
<p>以上のように定義される、カンドル Q 上の一般的な加群について、従来あまり多くの例は知られていなかった。Q に対して、それに付随する群 $As(Q)$ が定まり、$As(Q)$ 上の加群 A</p>			

は自然に \mathbb{Q} 上の加群 $\mathbb{Q} \times A$ を誘導する。このようなもの以外にどのような加群があるか、系統的な研究はこれまでに無かったものと思われる。本論文では、 \mathbb{Q} 上の加群から $\text{As}(\mathbb{Q})$ 上の加群を構成する方法や $\text{As}(\mathbb{Q})$ 上の加群から誘導される加群の部分加群を構成する方法について分析がなされ、 \mathbb{Q} が連結性という条件を満たす場合に

- \mathbb{Q} 上の加群 \mathbf{M} に対し、各 A_p に translation として作用する加法群 $T(\mathbf{M})$ を定め、 $T(\mathbf{M})$ が $\text{As}(\mathbb{Q})$ 加群となることを示し、
- $\text{As}(\mathbb{Q})$ 加群 \mathbf{M} に対し、 $\mathbb{Q} \times \mathbf{M}$ がある標準的な部分 \mathbb{Q} 加群 $\mathbf{MQ}(\mathbf{M})$ を持つこと

が示されている。さらに、

- 既約 \mathbb{Q} 加群 \mathbf{M} で $T(\mathbf{M}) \neq 0$ を満たすものと $\text{As}(\mathbb{Q})$ 加群 \mathbf{M} で非自明な作用を持つものが、上の構成により対応すること
- \mathbb{Q} 加群 \mathbf{M} で $T(\mathbf{M}) = 0$ を満たすものと \mathbb{Q} の基本群と呼ばれる群 $\pi_1(\mathbb{Q}, q)$ (q は \mathbb{Q} の元) 上の加群が対応すること

が証明される。これにより、既約な \mathbb{Q} 加群の分類は群 $\text{As}(\mathbb{Q})$ および $\pi_1(\mathbb{Q}, q)$ 上の加群の分類に帰着されたと言える。

さらに、この結果の応用として、二つの設定で実際に既約加群の分類が行われている。

- \mathbb{Q} を有限巡回群 C_n または $(C_n)^2$ に付随する一般二面体カンドルとし、係数環として標数 0 の体を取った場合。
- \mathbb{Q} を $\text{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ (ただし q は素数 p の冪) の連結な共役類とし、係数環として標数 p の体を取った場合。

これらの結果は、カンドル上の既約加群の分類を行う方法を与え、より一般に任意の加群を理解し、さらには加群圏全体を研究するための重要な基礎となるものと言える。また、この論文で与えられた具体的なカンドル加群の例や、この論文の手法を他の有限カンドルに適用して得られるカンドル加群は、結び目理論などでの応用も期待できる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Kosuke Uematsu, On Classification of Irreducible Quandle Modules over a Connected Quandle, Hiroshima Mathematical Journal に掲載決定。