学位論文要旨

On Classification of Irreducible Quandle Modules over a Connected Quandle

(連結カンドル上の既約カンドル加群の分類について)

植松　香介

カンドルとは、集合 Q と Q 上の二項演算 $\triangleright$ であって、

- すべての $x \in Q$ に対し、$x \triangleright x = x$(冪等性)
- すべての $x \in Q$ に対し、$y \mapsto x \triangleright y$ は Q 上の全単射である (左可逆性)
- すべての $x, y, z \in Q$ に対し、$x \triangleright (y \triangleright z) = (x \triangleright y) \triangleright (x \triangleright z)$(分配性)

の 3 つの公理を満たすものとして定義される。これは群の共役を一般化した代数系であり、80 年代に Joyce、Matveev によって導入されて以来、結び目理論において多くの応用を持つ概念でもある。群や環などの他の代数系と同様、カンドルはその上の加群を通して研究されている。カンドル Q 上の加群 $\mathcal{A}$ とは、各点 $q \in Q$ に対するファイバーとよばれる加群 A_q たちの非交和 $\mathcal{A} = \coprod_{q \in Q} A_q$、各 $p, q \in Q$ に対する加群の同型 $\eta_{p,q} : A_q \to A_{p \triangleright q}$ と加群の準同型 $\tau_{p,q} : A_p \to A_{p \triangleright q}$ が与えられ、以下の 4 つの公理が満たされるようなものである:

1. $\eta_{p,q \triangleright r} \eta_{q,r} = \eta_{p \triangleright q, p \triangleright r} \eta_{p,r}$.
2. $\eta_{p,q \triangleright r} \tau_{q,r} = \tau_{p \triangleright q, p \triangleright r} \eta_{p,q}$.
3. $\tau_{p,q \triangleright r} = \eta_{p \triangleright q, p \triangleright r} \tau_{p,r} + \tau_{p \triangleright q, p \triangleright r} \tau_{p,q}$.
4. $\eta_{q,q} + \tau_{q,q} = \mathrm{id}_{A_q}$.

さらに $(a, p) \in A_p$、$(b, q) \in A_q$ に対し、$(a, p) \triangleright (b, q) = (\tau_{p,q} a + \eta_{p,q} b, p \triangleright q)$ と演算を定義することにより、Q 加群 $\mathcal{A}$ はカンドルの構造も持つ。加群の概念は Andruskiewitsch、Graña によって導入され、そこから定義されたホモロジーを用いて様々な不変量を定めることができる。

先にも述べた通り、カンドルは群と深い関わりを持つ。群 G が与えられたとき、G 上で $g \triangleright h = ghg^{-1}$ と置くことでカンドル $\mathrm{Conj}(G)$ が構成される。一方で、カンドル Q に対し、Q に付随する群 $\mathrm{As}(Q) = \langle g_q \ (q \in Q) \mid g_{p \triangleright q} = g_p g_q g_p^{-1} \ (p, q \in Q) \rangle$ が定義され、これらの関手は群の圏とカンドルの圏の間の関手として随伴である。

これにより「カンドル Q 上の加群」は「カンドル Q に付随する群 $\mathrm{As}(Q)$ 上の加群」と結びつきがあり、実際に $\mathrm{As}(Q)$ 上の加群は自然な方法で Q 加群とみなすことができる。これを「$\mathrm{As}(Q)$ 加群から誘導されるカンドル加群」と呼ぶ。逆に全ての Q 加群がこの方法で記述できるとは限らず、これがカンドル加群の分類を考える上で面白い部分でもある。

本論文では、連結カンドル上の既約カンドル加群の分類について研究する。カンドル Q に対し、左からの積という作用によって生成される内部自己同型群 $\mathrm{Inn}(Q)$ が定義される。カンドル Q が連結であるとはこの作用が推移的であるということである。まず、一般にカンドル加群 $\mathcal{M}$ に対し、$\mathrm{As}(Q)$ 加群から誘導されるカンドル加群 $\mathcal{I}(\mathcal{M})$ と加群の準同型 $i_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{I}(\mathcal{M})$ を定義することができる。今、$\mathcal{M}$ が既約であると仮定すると、準同型 $i_{\mathcal{M}}$ は単射であるか零であるかのいずれかである。それぞれの場合に応じ、本論文では以下のような結果を得る：

- 既約加群 $\mathcal{M}$ は、準同型 $i_{\mathcal{M}}$ が零であるときは「基本群」と呼ばれる $\mathrm{As}(Q)$ の部分群 $\pi_1(Q, q)$ 上の既約加群に対応する (ただし q は固定した Q の点)。具体的な対応は、Q 加群 $\mathcal{M}$ に対して $\mathcal{M}$ の q におけるファイバー M_q を取る対応、$\pi_1(Q, q)$ 加群 M に対して構成されるカンドル加群を取る対応が互いに逆の対応を与える。
- さもなくば、$\mathcal{M}$ は然るべき方法で $\mathrm{As}(Q)$ 上の既約加群と対応する。具体的には、Q 加群 $\mathcal{M}$ に対し、$\mathrm{Inn}(\mathcal{M})$ のある部分群 $T(\mathcal{M})$ を取る対応、$\mathrm{As}(Q)$ 加群 M に対し $\mathcal{M} = \coprod_{q \in Q} (1 - g_q) M$ なるカンドル加群を取る対応が互いに逆の対応を与える。

主結果の応用として、2 つの具体的な有限カンドルの系列について、その上の既約カンドル加群を分類する。1 つは一般二面体群により構成される一般二面体カンドルである。このようなカンドル上の既約加群を標数 0 の体の上で分類する。もう 1 つは有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の特殊線形群 $SL_2(\mathbb{F}_q)$ の共役カンドルの連結部分カンドルである。本論文では有限群のモジュラー表現に関する Brauer 理論を援用し、標数 $\mathrm{char}(\mathbb{F}_q)$ の体上で既約カンドル加群を分類する。