豊内　智仁・北臺　如法(2022),「図形的な見方をいかした関数単元の導入授業の提案　－中学3年「関数 y=ax^2」の授業をもとにしてー」, 広島大学附属東雲中学校研究紀要「中学教育第 51 集」, 41－46.

図形的な見方をいかした関数単元の導入授業の提案

－ 中学３年「関数$y = ax^2$」の授業をもとにして －

豊内　智仁　・　北臺　如法*

１．本研究の目的と方法

著者の経験から，子どもたちは関数の学習を，難しいとか，楽しくないというように捉えていることが少なくないように思われる。この原因の一つに，数学教師の教材研究の不足があると考えられる。筆者は特に，関数授業の導入場面において，実験などの具体的な作業活動を取り入れ，さらに，それらの具体的な操作活動を図形的な見方として捉えることを通して，子どもたちは関数の学習において，理解が深まり，楽しいと捉える授業が実現すると考えている。

本研究の目的は，実験を取り入れた関数の導入授業における生徒の思考過程の様相を明らかにすることである。そのために，まず，関数の導入教材について考察する。次に，実践授業を設計・実践し，分析することを通して，関数の導入場面で生徒が思考する様相を考察する。

２．関数の導入教材の研究

（１）教科用図書の分析から

現行の学習指導要領（文部科学省，2018）において，具体物を操作して考えたり，データを収集して整理したりするなど，具体的な体験を伴う学習指導を充実させることが謳われている。

一方で，教科用図書〔東京書籍〕（藤井ほか，2021）における関数単元の導入課題をまとめると，次の**表１**のようになる。

表１　教科用図書〔東京書籍〕における関数単元の導入課題（藤井ほか，2021）

<table>
<tr><td>1年</td><td>〔課題〕　空のプールに水を入れ始めてから２時間後に見にいくと，底から 20cm の深さまで水がたまっていました。満水のときに水の深さを 120cm として，満水になるまでの時間を予想してみましょう。
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>…</td></tr>
<tr><td>y</td><td>0</td><td></td><td>20</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>…</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>2年</td><td>〔課題〕　鍋に 20℃の水を入れて強火で熱したところ，水の温度は，はじめの５分間で下の表のように変化しました。強火で熱したときの水の温度の上がり方を調べてみましょう。
<table>
<tr><td>時間（分）</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>温度（℃）</td><td>20.0</td><td>28.0</td><td>36.0</td><td>44.1</td><td>52.1</td><td>60.0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3年</td><td>〔課題〕　ジェットコースターが斜面①を上る場合と斜面②を下りる場合について，時間と進んだ距離を調べたら，下の表になりました。時間にともなって，進んだ距離はどのように変化しているでしょうか。
①を上る場合
<table>
<tr><td>上り始めてからの時間(秒)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>進んだ距離(m)</td><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>8</td><td>10</td></tr>
</table>
②を下りる場合
<table>
<tr><td>下り始めてからの時間(秒)</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>進んだ距離(m)</td><td>0</td><td>4.2</td><td>12.6</td><td>23.1</td><td>41.0</td><td>70.4</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

＊広島大学大学院人間社会科学研究科

Tomonori TOYOUCHI，Yukinori KITADAI

Designing introductory lesson of functional area in which the geometric perspective: the case example of Function $y = ax^2$ for the 3rd Graders of junior high school

具体物を操作してデータを収集することは，時間がかかったり，教室以外の場所や気軽に手に入らない物を使用したりするため，その実現が困難になることが多い。そこで，**表１**のように教科用図書では，仮想データを表にして与えている状態で思考させる展開になっている。したがって子どもたちに，念頭で操作することを期待する授業を設計していることになる。

（２）数学教育の研究から

赤松（1977）は，楽しい授業の要素として，「つくり出す学習」，「調べる学習」，「考える学習」の３つを挙げている。特に「調べる学習」については，教師の単なる教示で事象が知らされるだけでは，子どもは抽象的すぎて理解しにくいと述べている。このことに関連して，最初から与えられたデータを念頭操作のみで規則性を調べる学習を設定すれば，子どもたちの学習意欲を高めるうえで不十分であることも想像できる。

諸橋（1992）は，図形的な見方を学習に取り入れる意義には，次の６つがあると述べている。

㋐ 数学の教材として，具体的な存在を対象とすることができる。
㋑ 対象を数学的モデル(図形モデル)として整理しやすい。
㋒ 推論の演繹過程が日常語に近い用法で述べることができ，推論の有効性を感得しやすい。
㋓ 日常語に近い表現で，論証過程の把握がしやすい。
㋔ 事象に対する見方，考え方を，解析的なものにこだわらず，広く拡大することができる。
㋕ 数学のもつ「よさ，美しさ」に接しやすい。

飯島（1988）は，中学３年の関数指導について，次のように提言している。

『教育現場には「２次曲線」の指導内容があまりにも中途半端過ぎないかとの声が多い。２次曲線の焦点の性質やその名の由来にふれたり，サーチライトやパラボラアンテナの原理を説明したりすると，生徒たちはたいへん興味を示すところである。』

この飯島の提言に関わって，実際の教科用図書では，**図１**，**図２**のように扱われている。

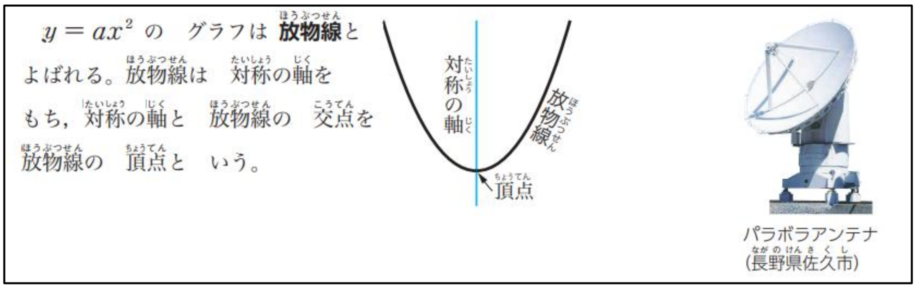


図１　教科用図書〔東京書籍〕でのパラボラアンテナの扱い（藤井ほか，2021）

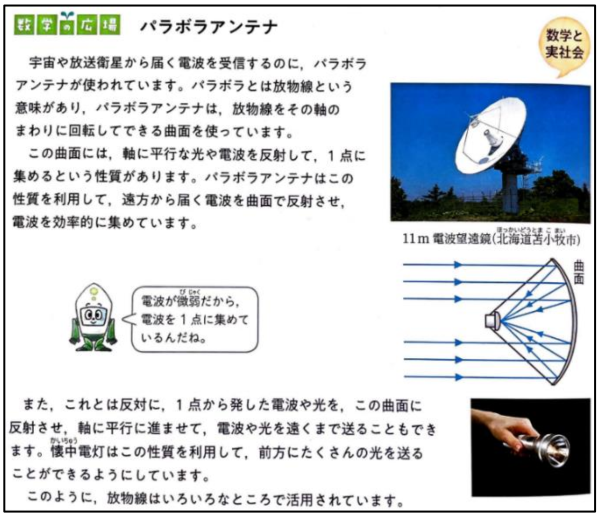


図２　教科用図書〔教育出版〕でのパラボラアンテナの扱い（坂井裕ほか，2021）

図１や図２のように教科用図書では，放物線が活用されている日常例として，パラボラアンテナやその性質が紹介されている。しかし，補助的な内容として掲載されているだけで，パラボラアンテナの性質を深く探究する展開としては扱われていない。

３．実験を取り入れた関数の導入授業

（１）実践授業の設計

実践授業の設計方針を，次のように４つ定める。

１つ目は，教科用図書の分析にあるように，教科用図書はあらかじめ用意されたデータから展開される授業になっている。実践授業では，学習活動を進めながら，自らデータを集め，規則性を発見できるような課題を検討する。

２つ目は，赤松（1977）の研究にあるように，教師の単なる教示で事象が知らされるだけでは，子どもは抽象的すぎて理解しにくい。実践授業では，実験などを通して規則性を調べられるような教材を検討する。

３つ目は，諸橋（1992）の主張をもとにして実践授業では，図形的な見方を学習に取り入れる展開を検討する。この展開によって，具体的に課題に取り組むことができる。また，放物線の形という直観的な見方から少しずつ関数の論理的な見方・考え方へとつなげられる。実際には，図形的な見方から関数的な見方へと変化しやすいように，方眼が書かれている工作用紙をビリヤードの板に見立てて，座標としてみることが可能になるように展開する。

４つ目は，飯島（1988）の主張にあるように，放物線の形を掘り下げ，焦点に向かって反射する壁の形を見つける活動を検討する。放物線の形がもつ性質に触れることで，主体的に学習に取り組む態度を醸成することにもつなげられる。実際には，光の反射を取り扱わず，ビリヤードの球の軌道を観察させることによって，壁にはね返って焦点に集まるまでの様子を可視化できるように展開する。

（２）実践授業（本時）の目標

ビリヤードの壁を作る実験を通して見つけた放物線の特徴を考え，式に表すことができることが分かる。

（３）指導計画

〔１〕課題を提示する

ペアで課題について確認させる。

ワークシートを配付して，個人の予想を直線や曲線で記述する時間を確保して，ワークシートに記入させる。このとき，生徒からは，「Ｖ字型にすればいい」，「ホールを囲うように曲線にすればいい」，「半円にしてみよう」などの予想が出されることを想定している。

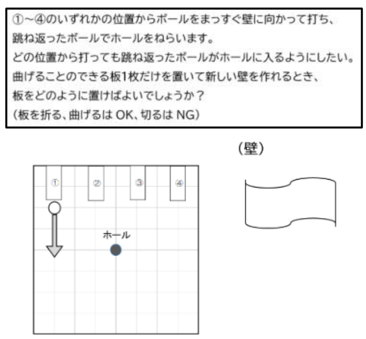


図３　ワークシート

〔２〕協働的問題解決活動を設定する

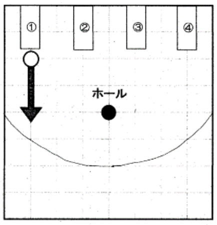
４人グループで実験させる。その際，グループのメンバー全員の予想を試しながら実験するように促す。その後，修正しながら再度実験をさせ，壁を完成させる。なお，セロハンテープのテープカッターを壁の後ろに置いて，きちんと跳ね返るようにさせる。実験では，工作用紙（中央に穴を開け，裏にテープを貼ったもの），壁（工作用紙で作成，曲げやすいように切り込みを入れたもの），セロハンテープ（壁を工作用紙に貼りつけて固定する役割）を使用させる。これらの活動の過程において，「直線よりは曲線が良さそう」，「関数のグラフみたいだから１次関数のときみたいに式で表せるのかな？」などのアイデアが出されることを想定している。

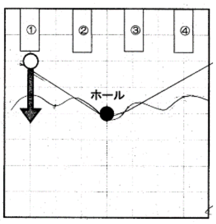
〔３〕まとめ

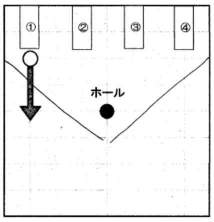
グループで意見を１つにまとめさせる。その後，グループの意見を授業者がタブレットで写真撮影して画像を投影して，全体で共有する。そして，壁の形から放物線という用語を導入し，その特徴をまとめる。さらに，工作用紙を方眼として見たとき，放物線が通る点の座標を表にまとめ，x と y の関係を見つけることで，式で表せることを確認する。次時でさらに考察することを伝える。

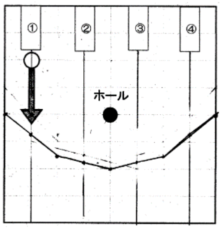
（４）実際の流れ

<table>
<tr><th>学習活動と実際の生徒の主な意見</th><th>実際の様子</th></tr>
<tr><td>

□課題把握
【実際の生徒の主な意見】
・放物線のような曲線


・放物線ではない曲線


・Ｖ字型


・直線を４本配置


</td><td>

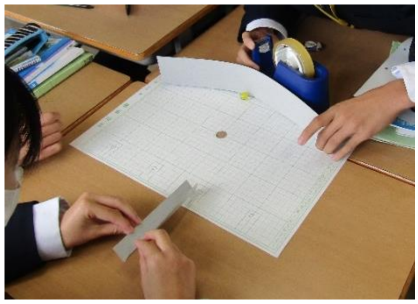
【実際の様子】

・教員のビリヤード失敗談から授業を開始した。
・課題の理解を促すために実際の具体物で示しながら説明した。
・壁の位置を予想できずに困っている生徒も多かったので，意欲が低下しないように予定していた時間よりも早めに次の実験活動に移行した。

</td></tr>
<tr><td>

☆協働的問題解決活動
【実際の生徒の主な意見】
○壁について
・放物線のような曲線
・Ｖ字型⇒個人で予想されていた意見のうち，最終的には上記の２つに限定して考えていた。
○壁以外について
・レールの角度を分度器で測ってビー玉を転がす角度に注目していた。
・４ヵ所以外から転がしても穴に入るのではないか試していた。
・理科の入射角と反射角の内容と関連付ける生徒もいた。
・焦点への反射位置をノートに記録し規則性を見つけて他の位置を予測しようとする生徒がいた。

</td><td>

【実際の様子】

・ビー玉を真っすぐ転がしたいという意見があったため，工作用紙でビー玉を転がすためのレールを各グループへ配付した。
・グループで活発に意見を出しながら活動していた。

</td></tr>
<tr><td>

□まとめ
【実際の生徒の主な意見】
結果は，全 10 グループのうち
・９グループが放物線のような曲線
・１つのグループがＶ字型


</td><td>

【実際の様子】
・壁を放物線になるように作成すると，どの場所から転がしても，焦点に入るようになることを確認した。
・規則性を見つけていた生徒がいたことを取り上げ，工作用紙の方眼を座標としてみることで，壁の放物線は x と y の関係式で表せることを確認した。

</td></tr>
</table>

（５）考察

本稿では，協働的問題解決活動における子どもたちの思考過程に限定して考察する。

具体物で実験しながら思考することを「具体操作」，実験をせずにワークーシートに記述したり，頭の中で考えたりしながら思考することを「念頭操作」と呼ぶことにする。その際，子どもたちの思考過程は，以下の４パターンの様相が見られた。

Ａ．具体操作のみ
Ｂ．具体操作から念頭操作に移行
Ｃ．念頭操作から具体操作に移行
Ｄ．具体操作と念頭操作の往還

Ａ．具体操作のみ

具体物で実験することだけを繰り返す生徒である。ボールを転がす位置を少しずつ変えながら，焦点に集まる壁の位置を決めていた。その際，規則性や反射について調べている様子は見られなかった。放物線にした方がいいということに気づくのは比較的遅かった。壁の形としてＶ字を最終的に選んだグループの生徒は，全員Ａのパターンであった。

Ｂ．具体操作から念頭操作への移行

最初に，具体物で実験し，ボールの軌道や反射する様子を観察し，焦点に跳ね返る反射位置を見つけてはワークシートやノートなどに記録している生徒がいた。反射について理科で学習した作図方法を利用して規則性を考えようとしていた。

Ｃ．念頭操作から具体操作への移行

図４のように最初から具体物で実験するのではなく，ワークシートで壁から焦点への反射の様子を予想して，見通しを立ててから実験に移っていた。実験に移った後は，ワークシートやノートに記録することはなく，Ａのように課題解決に取り組む様子が見られた。

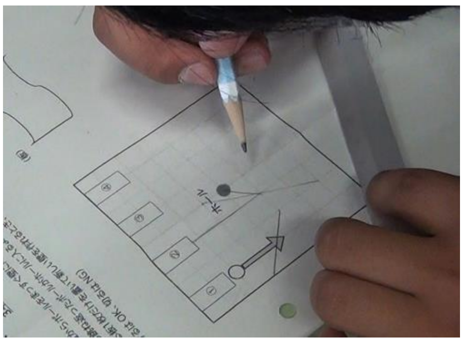


図４　実験をせずに念頭操作する生徒の様子

Ｄ．具体操作と念頭操作の往還

男子生徒Ｎは，**図５**のように実験の結果から反射位置４か所をノートに記録していき，そこから規則性を見つけ，他の反射位置を予想していた。

４か所を曲線で結び，その曲線の軌道上に壁を配置すればボールは焦点に反射していくであろうと推測し，その予想を具体物で実験することを通して，確認していた。

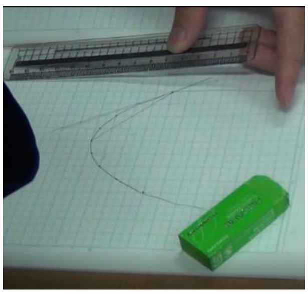


図５　実験の結果をノートに記録する生徒の様子

豊内　智仁・北臺　如法(2022),「図形的な見方をいかした関数単元の導入授業の提案　－中学3年「関数 y=ax^2」の授業をもとにして－」, 広島大学附属東雲中学校研究紀要「中学教育第 51 集」, 41－46.

４．おわりに

本稿の成果は，次の２つである。まず，教科用図書や数学教育の研究をもとに教材研究を進め，実験からデータを収集し，日常のビリヤードのゲームを図形として見立て，放物線の形から関数学習につなげる関数の導入授業を設計・実践できたことである。次に，実践授業を考察し，関数の導入授業における子どもたちの思考過程を，「A．具体操作のみ」，「B．具体操作から念頭操作への移行」，「C．念頭操作から具体操作への移行」，「D．具体操作と念頭操作の往還」の４パターン抽出できたことである。一方で，特定した４パターンの思考過程を有する子どもたちへの指導法を考察できていないことが，本稿の課題である。今後の研究課題としたい。

図形的な見方を必要とする教材を用いて，関数単元を導入することによって，子どもたちが主体的に学習に取り組む様子が見られた。具体操作を伴う授業では，具体操作のみで課題解決を行う生徒が存在し，図形的な見方のみで思考が止まってしまうことがある。その際，念頭操作で規則性を考えるよう促す指導法を開発する必要があると思われる。しかしながら，図形的な見方から関数的な見方へと移行する活動は，経験から培われるものと推測できる。したがって，日々の授業において，図形的な見方から関数的な見方へと移行する実践授業を意図的・継続的に実施することが有効だと考えられる。実際に，放物線の性質を実践授業の後半で共有できたときに子どもたちが驚く様子が見られた。また，その後の授業では，放物線を表や式で表現できること，グラフとして見ることができるなどモチベーションを高めることにつなげられていた。

本時においては，規則性を見つけようとしていた生徒を取り上げ，放物線を座標としてみることで x と y の関係式で表せることを確認できたが，式化するところまではいけなかった。次時の授業では，放物線上の点の座標を表に記録し，x と y の関係を見つけることを通して式で表すことができた。生徒の中には「中学１年生の反比例のときも曲線は式で表すことができたから放物線もできるだろう」と発言している生徒もおり，関数単元における既習内容や学習経験は，関数単元における他の学習内容を習得するうえで，大きな学習の基盤になると考えられる。

【 引用・参考文献 】

文部科学省，中学校学習指導要領解説　数学編，日本文教出版，169-170, 2018.
藤井斉亮ほか，新しい数学１～３，令和２年文部科学省検定済，東京書籍, 2021.
赤松旬，学習意欲を育てる指導法の研究－楽しく学ぶ算数－，日本数学教育学会誌，59 巻 10 号，196-199, 1977.
松尾七重，小学校算数科における新しい図形教育のあり方，鳥取大学数学教育研究，第 5 号, 2003.
諸橋孝明，変換を中心とした「平面幾何」の展開，日本数学教育学会誌，74 巻 9 号，28-36, 1992.
飯島忠，２次曲線の接線と２次曲線の焦点の性質，日本数学教育学会誌，70 巻 9 号，38-45, 1988.
坂井裕ほか，中学数学３，令和２年度文部科学省検定済，教育出版, 2021.