教職開発研究　第５号　2022　11－21

小学校算数科における一次式の乗法の素地指導に関する研究

― 帯分数同士の乗法と図的表現との関連付けを通して ―

岩本　充弘・松浦　武人

A Study on the Teaching of the Multiplication of Linear Expressions in Elementary School Mathematics

― The Association between Multiplication of Mixed Fractions and Graphical Representation ―

Takahiro IWAMOTO and Taketo MATSUURA

Abstract: The purpose of this study is to design, practice, and verify a lesson that will lead to the foundation of multiplication between linear expressions in the learning of multiplication between mixed fractions in the sixth grade of elementary school, and to obtain suggestions for learning instruction. For this purpose, this paper organizes and examines relevant literature and previous studies, and conceives a lesson that encourages students to relate the four-square area diagram to equations, numbers, and words. The performance of the children before and after the class was evaluated using a rubric. A significant difference was found in the test of the difference in the percentage of children who achieved the pre- and post-assessment criteria, indicating that the conceived lesson was effective in preparing students for the multiplication of linear expressions.

Key words: Linear expression, Multiplication between mixed fractions, Distributive law, Graphical representation
キーワード：一次式の乗法，帯分数同士の乗法，分配法則，図的表現

１．問題の所在と研究の目的

1-1　筆者の指導経験から

小学校第６学年で指導する分数同士の乗法における帯分数同士の乗法の扱いは，小学校学習指導要領解説算数編（2017, 以下「小29年解説」とする）によると,「分数の計算については，真分数や仮分数の計算を中心に扱い，帯分数を含む計算については児童の実態によって扱うものとする。」（p288）とあり，帯分数同士の乗法場面を扱っている各社検定済教科書では，どれも「帯分数同士の乗法は仮分数に直して計算することができる。」という旨の記述であった。小29年解説でも「分数の乗法及び除法については，帯分数で表すよりも仮分数で表す方が計算を進めやすくなる。このことに児童が気付くことができる程度でよい。」（p288）とある。

筆者もこれまで，帯分数同士の乗法では上記のような考えに基づいて，計算方法を指導してきた。しかし令和２年度に担任した学級での帯分数同士の乗法を考える授業において右の考え（図１）をする児童が数名いた。この考えは整数同士，分数同士の積を帯分数同士の積と捉えていると推測される。

$$2\frac{2}{5} \times 3\frac{1}{7} = 6\frac{2}{35}$$

図１　児童の考え

この誤答に至った背景として，「第４学年，第５学年の帯分数の加減における計算は整数同士，分数同士の加減をしても答えが求められる」という学習経験が影響していると考えられる。しかしながら，帯分数の整数部分をａ，ｃ，分数部分をｂ，ｄとして図２の式に表すと，分配法則を用いた式の展開によって帯分数のままでも解決することができる。

$$(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$$

図２　式の展開

筆者は授業の中で，図３の面積図を扱い，数や式と

面積図との関連付けを促す展開を行った。児童がどれほど理解できたかは把握できてはいないが，面積図と関連付けることはある程度の効果があったのではないかと考える。

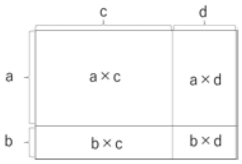

図３　面積図

中学校学習指導要領解説数学編（2017）では，図２のような（a+b）×（c+d）=a×c+a×d+b×c+b×d の一次式同士の乗法は第３学年で扱われている。また（a+b）×（c+d）の展開について，a+b=M と置き換え，分配法則を用いて M×（c+d）=Mc+Md に表し，考えていく方法を例に挙げている（p138）。つまり，（a+b）×（c+d）の積を求める上で，小学校段階で学習する分配法則が活用されることが分かる。

小29年解説では，帯分数を用いた乗法について「いたずらに複雑な計算を指導するのではなく，分数の計算を生活や今後の学習へ活用できるようにすることを重視する必要がある。」（p288）と示されている。確かに図２の式の展開は，分配法則を活用した式だけで考えると抽象度が高く，児童の理解は難しいことが予想される。しかしながら，筆者が授業で行ったように，面積図と式を関連付けると計算の意味が理解しやすくなるのではないだろうか。また，帯分数同士の乗法場面において，仮分数に直して計算するだけでなく，図２のように帯分数同士の積を４つの部分積の和ととらえることは，計算の仕方を多面的に捉える態度を育むことも期待できる。加えて，中学数学の文字式で考える一次式同士の乗法を，小学校段階において数を用いて考える経験が文字を用いた一次式同士の乗法の素地につながると考える。その実態を明らかにすることに本研究の課題意識がある。

1.2　研究の目的

本研究では，小学校第６学年の帯分数同士の乗法の学習場面において，一次式同士の乗法の素地につながる授業を構想し，実践，検証することで学習指導の示唆を得ることを目的とする。そのために，関連する文献や先行研究の整理と検討を行い，帯分数同士の乗法場面の授業を構想する。さらに，授業構想に基づいた授業実践を行い，授業前後のパフォーマンス課題の変容についてルーブリックを基に考察する。

２．研究の基本的な考え方

2.1　小29年解説における計算に関する性質の捉え

一次式同士の乗法の計算方法には，小学校算数で学習する分配法則が活用されている。ここでは，小学校算数における計算に関する性質，分配法則を含む計算法則について整理する。

筆者は分配法則を含む計算に関して成り立つ性質は，児童によって発見し，活用することで習得しつつ，新たな知識を獲得することに意義があると考える。しかしながら，計算に関して成り立つ性質は，他の教師の授業を観察する限りでは，教えて暗記させる傾向があり，児童が必要感やよさを感じる知識となっていないのではないかと考える。小29年解説にも分配法則を含む計算に関して成り立つ性質は，「単に『覚えるもの』ではなく『活用するもの』であることに気付き，活用しようとする態度を育むこと。」（p113）と示され，計算に関して成り立つ性質の指導の在り方について留意する必要があることがうかがえる。

2.2　計算に関して成り立つ性質

小29年解説には「計算に関して成り立つ性質に着目することは，乗法に関して成り立つ性質や除法に関して成り立つ性質，交換法則，結合法則などの四則に関して成り立つ性質に着目することである。」（p289）とあり，計算に関して成り立つ性質とは，乗法に関して成り立つ性質，除法に関して成り立つ性質，交換法則，結合法則などの四則に関して成り立つ性質であることが分かる。

小29年解説には「計算法則」という用語が出てきている（p111，141，199，289，290）。杉山（1986）は，「交換，結合，分配の三つの法則は，数及び文字計算を支配する基本的な法則である。」（p182）としている。また，計算法則を一般的には加法についての交換法則，結合法則，乗法についての交換法則，結合法則，分配法則としている。

2.3　分配法則

ここでは分配法則の意味と，小学校段階の分配法則の扱いについて捉えていく。小29年解説と杉山（1986）を参考にして，小学校算数で扱う分配法則の説明と式化したものを以下の表１に整理した。

表１　小学校算数で扱う分配法則

解説	式
乗数が１ずつ増減したときの積が被乗数の大きさずつ増減する。	a×（b±1）＝a×b±a
乗数が２つの数の和であるとき，積は，それぞれの積の和である。	a×（b＋c）＝a×b＋a×c
被乗数が２つの数の和であるとき，積は，それぞれの積の和である	（a＋b）×c＝a×c＋b×c
乗数が２つの数の差であるとき，積は，それぞれの積の差である。	a×（b－c）＝a×b－a×c
被乗数が２つの数の差であるとき，積は，それぞれの積の差である	（a－b）×c＝a×c－b×c

小29年解説における分配法則に関する記述は第２学年から見られる。加固（2012）は，目的に応じて適切に数を変化させていく大切な見方として「加法的把握」と「乗法的把握」を示し，「加法的把握」の例を第１学年の数の分解・合成の学習から挙げていることから，分配法則の素地は第１学年の学習内容にも及んでいることが分かる。第２学年の九九の構成や第３学年の被乗数が二位数の乗法の計算方法を考える際にも，分配法則が扱われている。第４学年では，問題場面から求めた２通りの式の積が等しいことを確認し，等号で結ぶことで分配法則をとらえ，○や△を用いて分配法則の一般化が行われる。第５学年では数の適用範囲を小数に，第６学年では分数に広げても計算法則が成り立つことを確かめるとともに，第６学年では文字を用いて交換，結合，分配の計算法則を整理している。

このように分配法則は第１～６学年まで素地も含めて扱われ，中学・高校数学でも活用されていく。

2.4　数学的表現を用いた抽象と具体の往還

ここまで計算に関して成り立つ性質・計算法則について整理し，小学校算数における分配法則について整理してきた。数や式は算数・数学特有の言語であり，事象を簡潔，的確に示すことができ，その特性を生かして，問題を解決できるよさがある。一方で数や式は抽象的でその具体が見えにくく，理解が難しいと捉えることもできる。分配法則にしても，数や式のみで考えるだけでは，児童の理解は難しいと考える。

小29年解説では抽象度の高いとされる式や数についての理解を促すために「具体物，図，数，式，表，グラフ相互の関連を図る機会を設けること。」（p337）が数学的活動の取組での配慮事項として示されている。

中村（2003）は「計算法則を式変形として示すのは，児童の抵抗感が大きい」として，「計算法則のモデルにはアレイ図や数直線図と併用することが不可欠である」と述べており，分配法則を含む計算法則の指導，児童の理解のために図を用いることの重要性を示している。筆者もこれまでの算数指導の中で，数や式といった抽象度の高いものだけでなく，図化や操作化によって算数の事象を置き換えて，児童の理解を促してきた。小29年解説にも「算数科の指導では，言葉による表現とともに，図，数，式，表，グラフといった数学的な表現の方法を用いることに特質がある。」（p36）とされ，数学的な表現を有効に，有機的に活用した授業づくりが大切であると考える。

中原（1995）は，ブルーナーのEIS原理をもとに数学教育における表現様式を大きく５つに分類し，図４の表現体系にまとめている。５つの表現様式を以下に示す（p199，200）。

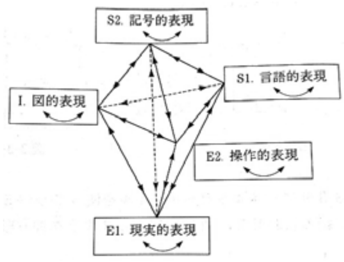

図４　数学教育における表現体系（中原．1995）

E1． 現実的表現…実世界の状況，実物による表現，具体物や実物による実験。
E2． 操作的表現…具体的な操作活動による表現，人為的加工，モデル化が行われている具体物，教具等に動的操作を施すことによる表現。
Ⅰ． 図的表現…絵，図，グラフ等による表現。
S1． 言語的表現…日本語，英語など日常言語を用いた表現，またはその省略的表現。
S2． 記号的表現…数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現。

中原は図４の表現体系を算数・数学授業で活用する場合には「ある表現様式から他の表現様式へと表し変えていくことがしばしば必要になる」（p202）とし，表現様式間の変換を「翻訳」と呼び，それぞれの表現様式への翻訳を「現実化」，「操作化」，「図化」，「言語化」，「記号化」とした。この表現体系は同表現様式内においての翻訳も取り入れているところや翻訳のベクトルが双方向に往還するものであると捉えている点が特徴的である。つまり，分配法則を例にすると式を展開したり，因数分解したりすることが記号的表現内における翻訳であり，分配法則の式を図に表したり，図を分配法則の式に表したりすることであると考える。

抽象度の高い記号的表現を図的表現や操作的表現などの具体的な表現様式に翻訳していくことは，児童の理解を促す上でも重要であると筆者は考える。では分配法則の理解に効果的な表現様式は何であろうか。

ここでは分配法則と特に関連する表現様式として図的表現を取り上げて考えていく。その理由として，分配法則は記号的表現で整理されるのであり，中村（2003）も「分配法則はアレイ図がモデルとして活用することができる」と述べており，分配法則と図的表現との有効性を示唆しているからである。

2.5　分配法則と図的表現との関連

中原（1995）は図的表現について，「数学的概念や法則は抽象的であり，形式的である。これらを子どもたちに分かりやすく指導する方法として，古くからいろいろな図的表現が工夫されている」（p232）と述べ，算数・数学の教授・学習場面で扱われる様々な図的表現を表２のように分類している。

表２　図的表現の分類（中原．1995）

I1.　情景図…現実的情景，状況を表す図
I2.　場面図…算数・数学的場面を表す図
I3.　手続き図…操作や計算などの手続きを表す図
I4.　構造図…場面や問題などの構造を表す図
I5.　概念図…算数・数学の概念を表す図
I6.　法則・関係図…算数・数学の法則，関係を表す図
I7.　グラフ図…各種のグラフを表す図
I8.　図形図…各種の図形を表す図

この分類の中でも分配法則と関連がある図は「I6. 法則・関係図（図５）」であることが分かる。

中原は，I3～I6の図的表現を図的表現固有のものであり，数学的内容を対象としていること，問題解決方法や学習内容を効果的に表現することが基本的な役割であることから「中核的図的表現」を呼び，中でもI5，I6は概念や法則の意味内容を示すことが基本的な役割であることから「内容図」と呼んでいる（p234)。さらに図的表現の特性を「基本的特性」と「導出的特性」の面からまとめており，図的表現活用の際にはこれらの特性を考慮すべきであると述べている(P243)。

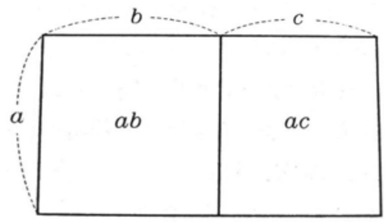

図５　法則・関係図（中原．1995）

中原は図的表現の主たる役割として「A. 現実的状況と学習内容との関連を図る」「B. 問題解決の手がかり，方法を示す」「C. 学習内容を効果的に示す」の３つを示している。（p246. 247）この中でも図的表現の役割で最も重要なものは「C. 学習内容を効果的に示す」であると述べている。この「C. 学習内容を効果的に示す」に図５の法則図・関係図が属しており，このことからも法則図・関係図が図的表現の中での重要な役割を果たすものであることが分かる。

また，田中（2003）は図的表現の役割について，「わからないことを解決するための図」と「わかったことを説明するための図」（p60）があるとしており，分配法則による法則・関係図はその法則を捉えると同時に他者に説明する上でも有効な図的表現であると考える。

ここまで，分配法則と図的表現との有効性について整理・検討してきた。分配法則と図的表現との関連性は強く，抽象から具体へと翻訳をした際に，児童の理解に有効であると解釈できる。

最後に図５の法則・関係図を見ると，筆者が扱った図３の面積図とその役割は同意であると捉えることができる。そこで本研究では図３の４つの部分に分かれた面積図を「４マス面積図」，図５の２つの部分に分かれた法則・関係図を「２マス面積図」と呼ぶことにする。

2.6　帯分数同士の乗法について

本研究で扱う単元である第６学年の分数の乗法は，小29年解説では分数の乗法及び除法の計算の仕方を考え，それらの計算ができるようにすることや数の意味と表現，計算に関して成り立つ性質に着目し，多面的に捉え，計算の仕方を考える態度や能力を高めることが主なねらいとされている。本単元学習前には，分数×整数，分数÷整数を学習している。分数同士の乗法と分配法則との関連について検定済教科書では，整数，小数において適用できた計算に関して成り立つ性質が分数でも成り立つことを確かめる場面が位置付けられており，帯分数同士の乗法については，どの検定済教科書でも扱われている。

しかし，帯分数同士の乗法の先行研究を参考にしようとしたところ，帯分数同士の乗法に関する先行研究を見つけることはできなかった。これは，これまでの学習指導要領，指導書，解説によって，帯分数を扱わない・扱わないほうがよいとされる時期があったことや帯分数を仮分数に直して計算すればよいという計算の簡潔さに重きが置かれていたからであると考える。小29年解説では，「分数の乗法及び除法については，帯分数で表すよりも仮分数で表す方が計算を進めやすくなる。このことに児童が気付くことができる程度でよい。いたずらに複雑な計算を指導するのではなく，分数の計算を生活や今後の学習へ活用できるようにすることを重視する必要がある。」（p288）として帯分数を仮分数に直して計算する立場をとっている。

分配法則を用いた帯分数同士の乗法計算は「(a+b)×(c+d)=a×c+a×d+b×c+b×d」となり確かに複雑である。これを記号的表現のみでとらえていくことは，抽象的であり児童の理解が難しい面はあると考えられる。しかしながら，これまで整理・検討してきた図的表現，特に面積図を用いて抽象から具体への翻訳を促せば，その困難さは緩和できると考え，計算方法を多面的に捉える力の育成や一次式同士の乗法の学習の素地となることが期待される。

なお，本研究でとらえる一次式同士の乗法の素地とは，「(a+b)×(c+d)の積がa×c+a×d+b×c+b×dの４つの部分積の和であることをとらえること」と定義する。小学校算数の最終学年の学習において，抽象

的な文字ではなく具体的な数で考えることは重要であると考えたからである。また帯分数を扱うことで，仮分数に直さないという条件にするならば，整数と分数を (a+b) と捉えることができると考えたからである。

帯分数同士の乗法場面を４マス面積図を用いて計算の意味理解を目指す検証授業を行い，その成果を検証する。また，４マス面積図が児童にとって，思考を助けるもの，説明を助けるものであるかを調べ，その有効性についても考察を図りたい。

３．研究仮説及び検証の視点と方法

3.1 研究仮説

研究仮説を「帯分数同士の乗法において，４マス面積図と式と数と言葉を関連付ける授業を構成すれば，４つの部分積から帯分数同士の計算の意味を理解することができるであろう。」と設定した。また，検証授業を通して４マス面積図についての有効性も考察する。

3.2 検証の視点と方法

研究仮説に基づく検証の視点と方法を表３に示す。

表３　検証の視点と方法

検証の視点	検証方法
４マス面積図と式や数や言葉を関連付ける授業構成は，帯分数同士の乗法の意味理解に有効であるか。	作成したルーブリックに基づく，児童のパフォーマンス課題の事前事後の変容をマクネマー検定により分析
４マス面積図は，帯分数同士の乗法における４つの部分積を思考・表現する面で有効であるか。	・２項目の質問紙調査（５件法）の分析 ・質問紙自由記述の分析

3.3 質問紙

４マス面積図の有効性を分析する質問項目を図６に示す。

岩本先生との学習で，みんなは今回「分数×分数」について知り，４マス面積図に出合いました。この４マス面積図はあなたが考えたり，説明したりする上でどうでしたか？　〇をつけましょう。
①考えやすい
（　とても・まあまあ・ふつう・あまり・ぜんぜん　）
②説明しやすい
（　とても・まあまあ・ふつう・あまり・ぜんぜん　）
③４マス面積図についての感想

図６　質問項目

3.4 パフォーマンス課題

検証授業に向けてパフォーマンス課題を作成した。作成に際しては，算数・数学教育を専攻する４名（教授１名，教職大学院生２名，附属小学校教員１名）で，内容の検討を行った。設定した２問の内，②の問題を検証問題として扱う。

なお，本パフォーマンス課題は検証授業直前の授業の後と検証授業翌日に行った。パフォーマンス課題を図７に示す。

パフォーマンス課題

けんじくんは，$3\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{3}$の計算方法を考えています。

①けんじくんは「仮分数に直して計算する方法」を思いつきました。
けんじくんの計算の仕方について，数や式，図や言葉を使って説明しましょう。

②けんじくんは，「仮分数に直さずに計算できる方法」も思いつきました。
このけんじくんの計算の仕方について，数や式，図や言葉を使って説明しましょう。

図７　パフォーマンス課題

3.5 ルーブリック

パフォーマンス課題の変容を測定するためのルーブリック（表４）を作成した。評価規準は帯分数の計算方法を式のみではなく，他の表現様式を用いて説明することが計算の意味を理解している状態であるととらえ，レベルⅣに位置付けた。さらに左辺と右辺を等号で結んでいる状態をレベルⅤにしている。ルーブリックの作成に際しては，算数・数学教育を専攻する４名（教授１名，教職大学院生２名，附属小学校教員１名）によるモデレーションを行った。

４．検証授業の概要

検証授業の概要を以下に示す。

〇期　間　令和３年６月14日～６月29日
〇対　象　広島県国立大学法人附属小学校
　　　　　第６学年（31名）
〇単元名　分数×分数
〇目　標

帯分数同士の乗法において，面積図を用いて，仮分数に直したり，４つの部分積を求めたりするなど計算方法を考え，計算の意味を理解することができる。

５．検証授業の構想

検証授業の構想の要点を以下に示す。

1 面積の縦横の辺の長さをそれぞれ伸ばす問題

「たて３m，よこ４m の畑があります。少し広くしようと，たてに$\frac{1}{4}$m，横に$\frac{2}{3}$m 伸ばしました。広くしたあとの畑は，何㎡ですか。」

初めから辺の長さを帯分数で示すと，単なる長方形

表４　ルーブリック評価表

評価基準		児童のパフォーマンス事例	基準達成のための手立て
Ⅴ	帯分数同士の乗法の計算方法について，図や数，式，言葉を用いて，４つの部分積の和であるとした式の展開で説明することができる。	・（図や数，式，言葉を用いた説明） ・$3\frac{2}{5}\times 2\frac{1}{3}=3\times 2+3\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$ ・$(3+\frac{2}{5})\times(2+\frac{1}{3})=3\times 2+3\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$	立式した式と等号で結ぶ場面を設定し，Ⅲの式をつなぐことができるようにする。
Ⅳ (評価規準)	帯分数同士の乗法の計算方法について，図や数，式，言葉を用いて，４つの部分積の和であると説明することができる。	・（図や数，式，言葉を用いた説明） ・$3\times 2+3\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$	その式が面積図のどの部分を表しているのか。式に言葉をつけ足したり，図と線で結び付けるなどの関連付けを促す。
Ⅲ	帯分数同士の乗法の計算方法について，４つの部分積を用いて式のみで説明している。	・$3\times 2+3\times\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\times 2+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}$のみ	４マス面積図がいくつの部分に分かれるかを問い，その部分の面積をもとめる式を考えるよう促す。
Ⅱ	帯分数同士の乗法の計算方法について，整数同士・分数同士の積を用いて説明している。	・$(3+\frac{2}{5})\times\frac{7}{3}$，$6+\frac{2}{15}$	仮分数に直さずに計算する方法であることを確認し，立式を促す。
Ⅰ	帯分数同士の乗法の計算方法について，仮分数に置き換えて説明しているor説明ができない。	・$\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}$	

を想像する児童が想定される。本時では，４マス面積図を基に展開していくことが前提としてある。そのため，辺の長さが整数の長方形の畑を示し，その畑を拡げる場面を扱うことで，初めの長方形から辺が延長され，４マス面積図につながるようにした。その後，求積の式を問うことで，$(3+\frac{1}{4})$ や$3\frac{1}{4}$を用いた２種類の式を引き出し，立式の理由を面積図と関連付けて説明するよう促すことで「$(3+\frac{1}{4})=3\frac{1}{4}$であることを確認する。

②仮分数に直して計算する考えを取りあげ，積を確認

児童にとっては，帯分数を仮分数に変換して求積する方法が見通しとして想定される。その考えを取り上げ，計算するよう促し，積を確認する。

③帯分数同士の乗法における誤答を扱う

この問題における誤答を想像するよう促し，整数同士，分数同士の積とする誤答を引き出すとともに，誤答が帯分数同士の加法の学習で整数同士，分数同士の和で求めた経験から起因しているのではと捉えることができるようにする。

④誤答の数値をあえて強く否定

誤答である$12\frac{2}{12}$をあえて強く否定する。そのことにより，特に整数同士の積である「12」を $(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$ の式や面積図の中に見い出すことができるようにする。

⑤既習の分配法則「(a+b)×c=a×c+b×c」との比較

既習の分配法則と比較し，(a+b)×(c+d) がどのような右辺となるか考える方向付けを行う。

⑥４マス面積図と数，式との関連を問う

４つの部分積の話題を扱い，４マス面積図においてどこの面積を表しているかを問い，式や数と４マス面積図との関連付けを促すことで，記号的表現と図的表現との翻訳を通した計算の意味理解をねらう。

⑦誤答の数値を振り返る

誤答の面積が整数同士，分数同士の部分積であることを確認し，残りの２つの部分積を合わせた和が全体の積（面積）となることを確認する。

⑧$(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$ の式展開を確認

本研究でとらえる一次式同士の乗法の素地とは，「(a+b)×(c+d)の積が，a×c+a×d+b×c+b×d の４つの部分積の和であることをとらえること」と定義している。それだけであれば，４つの部分積を和であることを確かめるだけでよいが，⑤で方向付けた (a+b)×(c+d) の右辺が４つの部分積の和を表している。ここでは等号によって左辺と右辺をつなぎ，式の展開をも確認することも意図した。

⑨４つの部分積の和で考えた学習経験を問う

４つの部分積の和によって (a+b)×(c+d) を考えてきた本時の学びを振り返る中で，これまでも４つの部分積の和で考えた経験を問い，二位数×二位数の計算や乗法の筆算の経験を引き出し，実際に (a+b)×(c+d) や４マス面積図に二位数をあてはめて確かめることで，統合を促す。

６．検証授業の実際

ここでは，検証授業の構想の要点にそった授業の実際と授業後の児童の学習感想を示す。なお，VTR から作成したプロトコルと板書を基に記述する。T は教師，C は児童，CC は多人数の発話やつぶやきをと示し，番号は T，C それぞれ分けて通している。

6.1　検証授業の構想の要点にそった授業の実際

1 面積の縦横の辺の長さをそれぞれ伸ばす問題

T9:今，先生が回ったら，３パターンくらいかな。こういう人，ちょっと見てくれる？※$(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$と板書
T10:こういう式のお友達ね。
T11:それとこういう人，これけっこう多かったな。
　※$3\frac{1}{4}\times4\frac{2}{3}$と板書
C1yd:同じやん。
T12:おなじやんって yd 君が言っているんだけどどういうこと？ud さん同じやんってどういうこと？
C2ud:$3+\frac{1}{4}$は$3\frac{1}{4}$だから，そこを省略したみたいな感じだと思う。
T13:ここをなんだか省略しているように見えるってことね。そういうこと yd 君？
C3yd:３と1/4は整数の３と分数の1/4を足しているから，ud さんの言ったように省略した。

上記は（$3+\frac{1}{4}$）や$3\frac{1}{4}$を用いた式を引き出し，それらが等しいことを確認する場面ある。次に式の正誤を問い，４マス面積図につなげていった場面が下記である。

T14:なるほど。ここは同じだねってことね。ちょっと聞くけど（$3+\frac{1}{4}$）×（$4+\frac{2}{3}$）は広くした後の畑の面積を求める式として何でいいのかな？この式はなんで，いいの？全員起立。
T15:どうしてこの式が広くした後の畑の面積をもとめる式になっているのかお話したら座ってごらん。
T16:この式でいいよってお話してくれる？
C4hd:縦が３ｍで横が４ｍの畑だったけど，広くして縦３と$\frac{1}{4}$m になって，横が$\frac{2}{3}$と４ｍになって，横と縦の長さがちょっと変わったから･･･
T17:どう変わったの？（前に出るよう促す）
C5hd:ここがこうで，ここがこう。
T18:ima 君みてた？見てて。もう一回。
C6hd:ここの縦の長さが伸びて，ここの横の長さが伸びたから。

C5hd はこの時，図８のように，３ｍ，４ｍの長方形の辺を延長した説明をしていた。それを受けて図９のように板書を筆者がした。

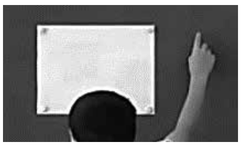
図８　辺の延長の動作化

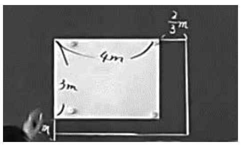

図９　図８を加筆した図

2 仮分数に直して計算する考えを取りあげ，積を確認

T21:ちょっとさ，もう答えを出している人もいるけれど，帯分数×帯分数ってどんなやり方でしようと思ってるの？ちょっとお隣さんと。
T22:はい。じゃあ聞いてみます。どうする nd くん。
C7nd:仮分数に直す。
（子どもの中に入って連続で尋ねる）
C8hr～C12ima:仮分数に直す。
T23:直す。仮分数に直して計算してみようか。じゃあさっとやってごらん。

～中略～

C14ft: 途中で計算したよ。
T26:途中約分もあるのか。答えいくつになる？
C15ft: $15\frac{1}{6}$。
C16ama: 仮分数でいうと$\frac{91}{6}$。
T27:ということは，$15\frac{2}{12}$ってことだ。仮分数に直せば答えが出せるってことね。

この時，ほとんどの児童が仮分数による求積ができていたので，すぐに3の T28の発問へ移った。

3 帯分数同士の乗法における誤答を扱う。

T28:仮分数にするとできるよ。できているんですけど，これ，例えば６年生の最初とか５年生の人がぱっとみたらどんな間違え方をすると思う？（少し間をとる）
T29:この問題を仮分数に直すのではなく，間違えるとするとどんな間違えがあるかな？ちょっとお話してごらん。
T30:これどんな間違え方するかな？ts さん。
C17ts:整数×整数，分数×分数をすると思います。
T31:「整数×整数，分数×分数をする」って意味わかる？end 君。
C18end:分けて考えると，3×4+…たすか分からんけど。3×4と$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$をすると思う。
T32:こことこことしちゃうよってイメージ。ts さんもそういうことかな？じゃあ，このままの答えにすると，$12\frac{2}{12}$。約分すると$12\frac{1}{6}$になるんだけど，今 end 君が言ってくれた12は3×4で出していて，分数同士ってのは，こういう見方をしているんだね。これ，なんでこういう見方をしているかわかる？
C19ft 簡単だから？
T33:こっちの方が簡単だと思うってこと？
C20ft:それを習っているから？
T34:こんな風な見方をならっているってこと？分数同士していいよ，整数同士していいよという見方を。
C21yd:整数と整数をパッとしちゃう。

C17ts のように誤答を引き出すことはできたが，この誤答が生まれる着想を問うても，帯分数同士の加法の学習経験は想起されなかった。

4 誤答の数値をあえて強く否定

T35：なんかイメージがぱっとつながっちゃうってことかな？じゃあ，この間違えは，この考え方はぜ絶対に間違いかな？（間をとる）あそこは２人手を挙げているけど。どう思う？ちょっとお隣さんと。この答えを求める考え方は絶対に違うのかな。
T36：はい。どうだろう。ama くん。
C22ama：（図10を板書）今，整数同士と分数同士でしかかけ算していないけど，あと整数と分数をかけて足したら答えになるんだと思います。
T37：今見てた人。今もう一回言ってって言われたら困る人？いや大丈夫だよ？hr 君。
C23hr：この間違え方は，横の整数同士，分数同士をかけているから，整数と分数，整数と分数をかけたらいけるってことだと思う。


図10　C22ama の図

T38：お隣さんと今のお話を確かめてごらん。
T39：ちょっと聞くよ。お，hm 君何？
C24hm：3×4ってのは…。（図９を指さそうとする）
T40：ちょっと待って。hm 君は，ここだけ（図10）の話じゃなくて，目線がどこ向いていたか見てた？
C25nd：あそこの図（図９）。
T41：よく見てるね。このへん（図９）を使って言いかけてるね。hm 君の言いたいこと分かる？
C26ft：わからん。
C27ama：分かる。

誤答の数値をあえて強く否定したことで，C22ama が図10をかいた後，誤答は整数同士分数同士の積しか求めていないことを指摘した。それを聞いた C23hr が考えを再現し，ペアで確認後 C24hm が図９を用いて説明をしようとしたところを制止した。

図10の線の数を確かめ，その線で結ばれる数同士をかけていることを①～④で記号化して確かめた後，C33yd が「その後，①と②をやったやつと，③と④をやったやつをたすんだと思う。」というつぶやきを取り上げ，残りの③と④の式化と C24hm が図９を用いて説明をしようとしたことを考えるよう促すことで，式と４マス面積図との翻訳をねらった。

5 既習の分配法則「(a+b)×c=a×c+b×c」との比較

構想時では4の後に5を扱う予定であったが，上記の児童の反応に合わせて構成を変えることにした。以下の展開は7の後に示すこととする。

6 ４マス面積図と数，式との関連を問う

C45ft：（右下に長方形が見えるよう補助線を引く）
T59：ストップ。見てなかった人いない？今何が変わったか見ていないでしょ？いま，ft さんがここに２本線引いたら，何かいいことある？ちょっとお隣さんと。
T60：はい，ft さんの２本線は何かいいことあるのかな？
C46hd：３つの面積を求めるときに…。
T61：３つの面積？
C47hd：あ～。ここの面積は$\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$でこの式（②）になって，$\frac{1}{4}\times 4$でこの式（④）になって…。
T62：全部言っちゃいそうだから ft さんにチェンジね。いまここを引いたらここ（②）が見えたってことね。
C48ft：ここの$\frac{1}{4}$がそのままここにあてれるから，ここが$\frac{1}{4}$になって，ここももってこれるから$\frac{2}{3}$になって，ここは12（①）って出てるじゃないですか？そしたらここところをかけたときに，ここの面積（②）が分かるじゃないですか？
T63：つまりちょっと聞くよ。番号で言うとここ（②）は何番ってこと？ここ（②）の面積は何番のお話ってこと？hk さん。
C49hk：②のお話だと思います。
～中略～
T66：どう？ここは④ね。ここが，③ね。hm 君はそういうことが言いたかったのかな？囲んでおこう。
（①～④の式と面積図の部分積を線で結ぶ。）

C45ft の補助線によって，４マス面積図が完成し，図10の①～④の部分積を求める式と４マス面積図との翻訳を，記号化した①～④を用いながら促した。児童が動作で式と図を行き来しながら説明を行い，式と図の関連付けが分かるよう筆者が線でつないだ。（図11）

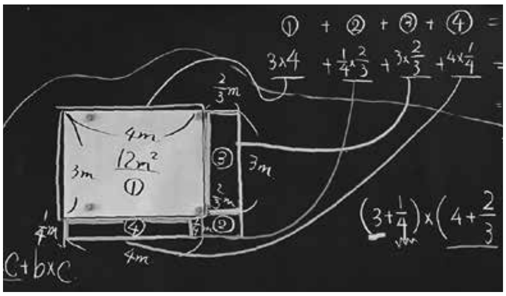

図11　式と４マス面積図でつながれた４つの部分積

7 誤答の数値を振り返る

T71：ちょっと黒板をたどってみると，ここから先生が話題を振っていますが，どんな間違えをすると思うといったこの数は違うのかな？どうですか？
C56hm：惜しい。
C57ft：もうちょいあれば。
C58nd：付け足せば。

誤答を振り返ることで，誤答が正答への途中の段階だったことを確認することができた。

5 & 8 $(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$ の式展開を確認する。

T72：いい言葉だね。さて，帯分数で見るとそういうことができるってわかったんだけど，その1つ上。結構な人がかいていたこの式 $(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$ なんだけど。これって今まで見たことある？このタイプ。かっこの中は先に計算するとは習ってはいるよね。ちょっとタイプの違うのは今回勉強しているんだけど分配するよってお話しましたよね？※ $(a+b)\times c$ と板書
これって「$a\times c+b\times c$」というこういうやり方じゃないですか？でもこれと少しお話が違うの分かる？こっちの分配「$a\times c+b\times c$」とこっち「$(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$」。ちょっと違うよね？これはこのあとどうすればいいかな？
※ $(3+\frac{1}{4})\times(4+\frac{2}{3})$ ＝＿と板書。
この続きはどうするといいのかな？仮分数にするといいんだけど，それはここ（$a\times c+b\times c$）でやっていることとは違うよね。この続きをかいてみましょう。イコールで結んだ向こう側，右側をかいてみましょう。
T73：tkm 君がかいていたからかいてもらおう。
C59tkm：($3\times4+3\times\frac{2}{3}$ と板書)
T74：ストップ。tkm 君こうかいてくれたんだけど，その続き分かるかな？
C60hr：あ，そういうことか。
T75：どういうこと？
C61hr：だから，かっこの中で一部分だけとって，それとこの２つをかけ合わせるとこっちの式になるから，それを…。
T76：ここまで大丈夫？もう一回聞きたい人？いるのね。その人のためにもう一回話してもらえるかな？
C62hr：この式（$3\times4+3\times\frac{2}{3}$）を見ると同じところである３はここにある ($\underset{\sim}{3}+\frac{1}{4}$) × ($4+\frac{2}{3}$) じゃないですか？（下線部は筆者）それで，これ(3)とこの２つ ($4+\frac{2}{3}$) をかけ合わせたら，$(a+b)\times C$ みたいにできるからその式が，$3\times4+3\times\frac{2}{3}$ になる。
T77：じゃあこの続きはどんな式になる？お隣さんと。
C63ama：$\frac{1}{4}\times4$ と $\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}$

C62hr は C59tkm の式を3が4と $\frac{2}{3}$ に分配されていると解釈し，説明をしていた。それによって既習の分配法則で示していた $(a+b)\times c$ と同じ構造であると考えることができていたと考えられる。T77で共有する場面を図ったが，C62hr の解釈をもう少し扱う必要があったと考える。

9 ４つの部分積の和で考えた学習経験を問う

T78：こういうふうに習っていないけれど，４つのかけ算の答えを足して答えを出すことができました。こうした４回かけて足すっていう経験，みんなはしたことないかな？
C64：一回もない。
T79：先生と前回やった15×15だったらどうかな？４回かけるのが見える？
C65：あー。
T80：5×5の25と10×5で50と10×5で50と10×10で100で合わせて225ね。こういう筆算のやり方も４回かけて足すって見方をすると今日の勉強と同じようにみえるかもしれませんね。

４つの部分積の経験を問うたが，想起する児童はおらず，筆者が示すこととなった。構想していた二位数同士の乗法を $(a+b)\times(c+d)=a\times c+a\times d+b\times c+b\times d$ の式の展開で確認したかったが，授業終了時刻が迫ったため扱えなかった。

6.2 検証授業後の児童の学習感想

検証授業後の児童の学習感想を表５に示す。

表５　授業後の学習感想

①１つの式でもいろいろな解き方があっておもしろかった。
②帯分数×帯分数をかけるとき出し方は何通りかあることがわかる。帯分数でもできる。
③分数×分数は仮分数に直したり，帯分数のままで計算できると分かった。
④ごちゃごちゃになったけど，図と数で表したらあまり難しくなかった。
⑤４マス面積図が４回かけて足すことにつながった。
⑥面積図でやるとすぐにわかりました。
⑦面積図って分数の数がたくさんあってもこれをかいたら何と何をかけたらいいかわかって小さい子に活用できるから。
⑧この図（面積図）がとても分かりやすかったです。
⑨４マス面積図にすると，イメージがつきやすくなるけど，式が長くなってめんどう。
⑩初めてこんなに長い式をしました。
⑪普段しない分け方で計算するやり方が分かった。
⑫分配法則をうまく使えば，仮分数に直さなくても計算できることが分かった。
⑬分配すると簡単になる。

①〜③の記述は帯分数同士の乗法の計算を多面的に考えたことによる記述である。④〜⑨は４マス面積図に関しての記述である。⑩〜⑬は分配法則に関しての記述が見られた。

７．研究仮説の検証結果と考察

ここでは，研究仮説に基づく検証の視点と検証方法に沿って考察していく。

7.1　ルーブリック表に基づく，児童のパフォーマンス課題の事前事後の変容

作成したルーブリックに基づき，事前と事後における児童の基準の変容を示したものを表６，表７に示す。モデレーションは算数・数学教育を専攻する３名（現職大学院生２名，学部卒大学院生１名）で行った。

表６　パフォーマンスの変容

		事後					
		Ⅴ	Ⅳ	Ⅲ	Ⅱ	Ⅰ	合計
事前	Ⅴ	0	0	0	0	0	0
	Ⅳ	0	1	0	0	0	1
	Ⅲ	0	0	1	0	0	1
	Ⅱ	2	4	1	1	0	8
	Ⅰ	0	15	2	1	3	21
	合計	2	20	4	2	3	31

表７　評価規準達成・未達成児童数（事前・事後）

		事後		合計
		達成	未達成	
事前	達成	1	0	1
	未達成	21	9	30
合計		22	9	31

表６，７が示すように評価規準を達成した児童が事前１名から事後22名となった。その内，左辺と右辺を等号で結び，「(a+b)×(c+d)=a×c+a×d+b×c+b×d」と記述していた児童は２名であった。また規準を達成した22名中，４マス面積図を用いた記述をしている児童は16名であった。一方，図10を用いて説明している児童もいた。検証授業の中で登場した図10のよさを感じた児童が４マス面積図よりも図10を選択したと考えられる。また，４マス面積図と図10の２つを用いて説明する児童もいた。

次に授業実践前後において評価規準を達成した児童の比率の差を調べるためにマクネマー検定を行った結果，有意差（p<.05）が認められ，検証授業の有効性が示唆された。

しかしながら，事後のパフォーマンス課題を筆者が一人でモデレーションをした際，事後調査においても評価規準を達成できなかった児童が９名いた。レベルⅢの児童３名は，数式のみの記述であったことから４マス面積図を用いて考えるよう促し，その説明を文章で表すよう促した。レベルⅡの児童２名は，分数同士，整数同士の積を求めていたため，式を４マス面積図に表し，整数同士，分数同士の積が面積図のどの部分積を求めているかを問い，不足した残りの部分積を求めるように促した。レベルⅠの児童３名の内１名は仮分数に直して積を求めていた。２名は無回答であったが，面積図に表して考えた形跡や式に表しを捉えようとした形跡が見られた。３名には，帯分数同士の積を４マス面積図に示した後，４つの部分積を求め，それぞれの積を合わせる計算過程を一緒に確認した後，文章で記述する指導を行う予定であったが，広島県国立大学法人附属小学校での実地研究期間の都合上指導が叶わず，学級担任に支援を依頼した。

7.2　質問紙調査

質問紙調査の結果，４マス面積図を「考えやすい」と肯定的に捉える児童は24名(77.4%),「説明しやすい」と肯定的に捉える児童23名（74.3%）であった。上記の結果から４マス面積図が帯分数同士の乗法の計算方法の意味理解に思考面・表現面において一定の効果があると考えられる。

7.3　成果と課題

本研究は，小学校第６学年の帯分数同士の乗法の学習場面において一次式同士の乗法の素地につながる授業を構想し，実践，検証することで学習指導の示唆を得ることを目的としていた。

帯分数同士の乗法において，４マス面積図と式と数と言葉を関連付ける授業構成は，４つの部分積の和としてとらえ，一次式同士の乗法の素地につながるとともに，計算の意味理解に有効であったことが成果として挙げられると考える。

課題として，本検証授業は授業者による発問の多さが目立つ。児童同士で学びを進めながら行うための授業構成を講じるとともに，因数分解の素地学習の教材開発を進め，算数と数学をつなぐ知見を得たい。

引用・参考文献

加固 希支男（2012).「数の構成に対する感覚を育てるための授業の在り方についての研究」．日本数学教育学会誌，94巻，10号，pp.11-18.

小山正孝ほか(2019).『小学算数６年』. 日本文教出版.
清水静海ほか（2019).『わくわく算数６』. 啓林館.
杉山吉茂（1986).『公理的方法に基づく算数・数学の学習指導』. 東洋館出版社.
相馬一彦ほか（2019).『たのしい算数６年』. 大日本図書.
田中博史(2003).『使える算数的表現法が育つ授業』. 東洋館出版社.
坪田耕三ほか（2019).『小学算数６』. 教育出版.
中村享史（2003).「計算指導における計算法則の役割－小学校算数の乗法・除法の計算法則を中心に－」. 日本数学教育学会第36回数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録, pp.110-117.
中原忠男（1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文新社.
一松信ほか(2019).『みんなと学ぶ小学校算数６年』. 学校図書.
藤井斉亮ほか(2019).『新しい算数６数学へジャンプ』. 東京書籍.
文部科学省(2017).『小学校学習指導要領解説算数編』. 日本文教出版.
文部科学省(2017).『中学校学習指導要領解説数学編』. 日本文教出版.