学校数学の内容としての「数学的方法学」

広島大学附属福山中・高等学校　上ヶ谷 友佑
岡山大学　石 橋　一 昴
高知大学　服部 裕一郎

１．序論

『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示)』において，例えば，数学Ｉの「数と式」では，身に付けるべき思考力・判断力・表現力等の１つとして，「日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え，一次不等式を問題解決に活用すること」(p. 112）という記載がある．また，文部科学省（2018）では，この具体例として，「『40 名のクラスから３名のクラス代表を選ぶ選挙を行うとき，最低何票入れば当選するか』を調べることや，買い物や旅行等の計画を立てる際に，必要経費等の条件を連立不等式に表して考えるなど」(p. 38）が挙げられている．数学的活動，すなわち，「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること」(p.25）の中で，「日常生活や社会の事象を数理的に捉える過程」を経験することは重要であるから，この例に限らず，小学校算数から高等学校数学に至るまで，多様な内容領域において重視されている．しかしながら，これは，数学なのだろうか？ 日常の事象や社会の事象を数学的に捉える力は，なぜ他教科ではなく，数学科で指導すべき事柄なのだろうか？

議論を具体化するため，「40 名のクラスから３名のクラス代表を選ぶ選挙を行うとき，最低何票入れば当選するか」という問いを，以下では「クラス代表選の問題」と呼ぶことにして，この問題を具体例として考察を展開していこう．このクラス代表選の問題の場合，社会科や特別活動における指導内容ではなく，数学科の指導内容である理由は何であろうか？ まずもって，文部科学省（2018）の記述だけでは，「一人何票有しているか？ そもそもクラス全員に投票権があるのか？」，「問題として，当確ラインを知りたいのか，当選判定となり得る最低得票数を知りたいのか？」など，問題設定が曖昧なので，数学的に解を１つに定めることができない．このことを逆手に取って，社会的に意味のある形に問題を数学的に定式化する力を育むための題材だと理解することもできるが，そうであればなおのこと，生徒達には「社会的に意味のある形」の理解を問うことになるわけであるから，それは，社会科や特別活動の範疇のようにも思えてくる．

カリキュラム設計の基本路線としては，複数教科において同じ内容を違う観点から学ぶことには十分に意義があると考えられるため，例えば，クラス代表選の問題を数学科・社会科・特別活動のいずれかに排他的に位置付けなければならない，ということではないであろう．しかしながら，複数教科で重複して扱うことを許容するだけでは，クラス代表選の問題のどんな観点をどこまで扱えば，数学科の責任範囲が完結するのかが明確ではない．

本稿の目的は，親学問を基軸としたカリキュラム設計の理論的枠組の内部で，この問題に対する答えが得られないことを指摘し，1 つの解決策として，学校数学の内容として「数学的方法学」（mathematical methodology）という新しい考え方を提起することである．

２．既存の理論的枠組

本章では，この問題に関連する理論的枠組を取り上げる．

（1）社会批判的モデリング

社会における数学的モデリングの役割の批判的理解を強調する指導アプローチは，社会批判的モデリングと呼ばれる（Abassian et al., 2020; Barbosa, 2006; Kaiser, 2017）．生徒達は，数学を通じて彼らの現実を構造化することになる（Skovsmose, 2019）ので，生徒達が，社会における数学の有用性と限界を意識することは，数学的なエンパワーメントとして重要であると言えよう（Skovsmose, 2006）．

他の数学的モデリングの視座が多くの場合は，モデリングのサイクルを強調する（Blum & Leiß, 2007; Czocher, 2017, 2018）のに対して，社会批判的モデリングは，そのサイクルを強調しない．むしろ，批判的数学教育の哲学（Skovsmose, 1994）を背景として，授業で数学の役割を批判的に反省するという一点を重視する（Barbosa, 2006）．社会批判的モデリングのアプ

ローチを実践した研究は，提案されてから 15 年が経つけれども，まだ少しずつ実践的研究の数を増やしている段階である（例えば，Araújo & Campos, 2015; Uegatani et al., 2020; Villa-Ochoa & Berrío, 2015）.

（2）真正性

数学教育において，「真正性」は，実に多様な意味で用いられている．Weiss ら（2009）は，現実世界に対する本物感（AM_W），学問数学に対する本物感（AM_D），数学者の実践に対する本物感（AM_P），生徒自身にとっての本物感（AM_S）という 4 種類の真正性を指摘している．また Vos (2015, 2018）は，真正性を，学校外に起源を持つ内容で，メディアなどによってそれが本物であることが証明されるような内容を真正であると規定している．いずれにせよ，真正性とは，「教室で見られる何かの，ある観点から見た本物らしさ」を示した指標なのだが，真正性とは，どんな観点から見られるかによって多義的な概念である．本稿では，必要に応じてその意味を明示しながら真正性について議論することにしよう．

（3）教科と親学問の関係

教科と親学問との関係は，古くから議論されている問題である．例えば，Shulman（1986）の議論を発展させて構築された Ball ら（2008）の「教えるための教科の知識」の枠組は，教師の有する数学科に関する知識としては，親学問として数学を理解するだけでは不十分であることを示している．例えば，教師が数学の学習だからこそ生じる子どもの誤答とその要因を推察する力は，親学問・数学の知識から直接得られるわけではない．

一方，親学問の応用領域として教科が構成されているという見方は，依然として根強い．例えば，佐藤 (1992, 2005, 2016）は，この立場から長年に渡って教科教育学の学問的固有性を否定してきた．教科教育の研究は，教育学者，親学問の学者，そして現場の教師の三者が揃えば十分実施できるという考え方である．

カリキュラム研究者として，最も広い立場からこの問題に取り組んだのは，おそらくは Stengel (1997）である．Stengel (1997）は，教科と親学問の関係性についてのあり得る立場として，次の 5 つを提起した．

[1] 親学問と教科は本質的に連続的である．
[2] 親学問と教科は基本的に不連続である．
[3] 親学問と教科は異なるが，次の 3 つのうちのいずれかの仕方で関連している．
  [3a] 親学問が教科に先立つ．
  [3b] 教科が親学問に先立つ．
  [3c] 教科と親学問の関係は弁証法的である．

教科の役割が，親学問の習熟であるという理解に立つならば［1］の立場に，教科の目的と親学問の目的を切り離し，親学問の知識は，生徒達の学びにとって必要となる限りにおいて重要であると捉えるならば［2］の立場となる．また，教科が，親学問からの変換で得られる親学問の教育学的バージョンとして捉えるならば［3a］の立場に，教科での個人の学びが，親学問の歴史的発展を総括することになると捉えるならば［3b］の立場となる．［3a］と［3b］を統合し，教科と親学問が相互に規定し合う関係にあると見るならば，［3c］の立場となる．

ここで重要なことは，Stengel（1997）の主張が，5 つのうちのいずれかの立場が重要だと言っているわけではないという点である．「学問領域と学校教科の関係性は，カリキュラムという教育的道具の構成にあたってはっきりと明示され，交渉されるべき問題の 1 つである」（Stengel, 1997, p. 600）と述べているように，どの立場からカリキュラムを構成しようとするかの明示化が重要なのだという．

Deng（2007, 2012）は，Grossman & Stodolsky (1995）が教科内の文化が，教師の実践そのものや，カリキュラムや指導に対する教師の視座を枠付けしているという指摘を踏まえて，教科を知るということが，「内容の理論」（the theory of content）を知るということに関係する点を指摘する．すなわち，その教科の内容として，どのような内容が親学問から選ばれ，どのように定式化され，どのように枠付けされ，生徒達の経験を有意味にするためにどのように変換されるかを知ることである．

3．カリキュラム編成に関する理論的問題

前章で概観した既存の理論的枠組に基づくと，本稿の提起している問題の骨子が明瞭になる．問題は，クラス代表選の問題のような，（例えば AM_W の意味で）真正であり得る社会批判的モデリングの問題が，カリキュラム内容として理論的に上手く位置付かない点にある．

問題は，次の 3 通りの形で立ち現れる．第一に，クラス代表選の問題を，クラス代表選そのものを内容とした問題であると捉える場合，その内容が，社会学的な内容ではなく数学的な内容であると捉える根拠が希薄となる．Stengel (1997）の示した 5 つのどの立場に立つにせよ，この問題の取扱いを数学科に位置付ける根拠が失われる．

第二に，クラス代表選の問題を，不等式を内容とした問題であると捉える場合を考えよう．この場合は，数学科に位置付ける根拠は得られるかもしれないが，

社会批判的モデリングの視座から，この問題を不等式以外の数学を用いて解く可能性を検討したり，そもそも数学を用いて解くことが妥当なのかを検討したりするという活動が意味をなさなくなる恐れがある．そうした検討の結果，生徒達の最終判断が，不等式以外の方法で解決するというものになってしまったならば，この内容を高等学校の数学 I で扱った根拠が失われてしまうからである．

第三に，上記 2 つの問題を回避しようとすると，不自然な出題になってしまう問題が挙げられる. 例えば，一次不等式で解くことが最も自然な解法となるような緻密な条件設定でクラス代表選の問題を出題すると，条件設定が緻密過ぎて，かえってクラス代表選の問題としては不自然になってしまうかもしれない. これは，子ども達がしばしば, 鶴亀算を適用する問題に対して，「足の数が数えられる状況であるにもかかわらず，なぜ頭の数が数えられないのか？」とツッコミを入れたくなることと同じで，数学の文章題がしばしば抱える問題である. このような不自然さを内包する方法では，曖昧な状況からその条件設定を緻密化したり，緻密化した条件設定の妥当性を吟味したりというモデリング能力を養えないことになってしまい，社会批判的モデリングの観点からはいずれの意味の真正性で考えたとしても真正性の低い無意味な出題となってしまう．もちろん，社会批判的モデリングの視座を採用しないという考え方もあってもよいが，その場合,「初めから解き方の決まっている問題を扱うような親学問が存在するのか？」,「初めから一次不等式で解くことが決まっている問題を解く経験は，生徒達の何を育んでいることになるのか？」という疑問が生じる．親学問との関係性の中で，数学科で扱う内容を議論する場合は，AM_Dの意味での真正性も重要である．

もちろん，クラス代表選の問題を様々な数学が潜在的に応用可能な問題と捉え,「課題学習」の一種と見なすならば，現行の学習指導要領の内部で取り扱うことはできる．しかし，ここで指摘していることは，そうした課題学習それ自体が，なぜ数学科に位置付くのかという，学習指導要領を含めたカリキュラム編成上の理論的問題であり，学習指導要領と現場での実践の整合性の問題ではない．

これは，ある意味では，学習指導要領を内容で組織することに由来する問題である.「どんな数学を応用するのか」という形で指導内容を規定してしまうことは，社会批判的モデリングの精神それ自身によって，指導内容の妥当性そのものが疑われてしまう．つまり，文脈 C (例えば, クラス代表選の問題) に数学 M (例えば,不等式) が，安定していつでも応用可能であるというカリキュラム編成上の前提を持つことは，社会における数学の役割の批判的検討を重視する社会批判的モデリングの観点から許容できない．その応用可能であるという前提を疑ってかかることが，社会批判的モデリングだからである．これは，原理的には，すべての応用数学（統計学を含む）に当てはまる. 例えば, ある文脈に t 検定が安定していつでも応用可能であると考えることは，社会批判的モデリングの観点から許容できない.

4．方法の学習と方法学の学習

上述の理論的問題を踏まえ，本稿では，方法を内容化した「数学的方法学」(mathematical methodology) という考え方を提起したい．Methodology の語は，しばしば「方法論」と訳されるが，ここではあえて「方法学」と訳す．Bakker (2018) は，デザイン・リサーチとは何かを説明する過程で， method と methodology の違いを次のように述べている．

> 接尾辞“-logy”は，その接尾辞の前に来るものの研究を科学的にする．心理学は精神を，社会学は社会的現象を研究する.「方法」(method) は,「どのように」(how) を処方 (prescribe) し，“-logy”は，その「なぜ」(why) を説明する．
>
> (pp.6-7，括弧内原語)

したがって，methodology とは,「なぜその方法はそのように処方されるのか？」を説明する科学的研究領域ということになる．本稿では，心理学や社会学に合わせて，“-logy”を「学」と訳すこととし,「数学的方法学」を,「なぜその数学的方法はそのように処方されるのか？」を説明する科学的研究領域と捉えたい．

このとき，数学的方法とは，背理法や数学的帰納法といった数学的証明の方法や，ユークリッドの互除法や 2 次方程式の解の公式といった解法アルゴリズムも含むが，力点としては，日常の事象や社会の事象に数学や統計を活用する方法に関する“why”を扱うことに力点を置いた学問領域として捉えたい．

すべての応用数学は，多かれ少なかれこの数学的方法学をその下位領域に含んでいると考えられるため，数学的方法学は応用数学の一種である．そのため，数学的方法学は，学校教育で扱うとすれば，親学問を数学とする数学科で扱うのが最も自然である．ただし，親学問をそのまま教えるということを重視したいわけではない．

本稿の提案と親学問をそのまま教えるということを明瞭に区別するために，一例として，心理統計学の入門書としてよく引用される南風原 (2002) の記述を取

り上げよう．南風原（2002）は，t 検定の基礎となる確率モデルに関して，次のように述べている．

> 各群の母集団分布の分散については，それらが互いに等しいという仮定をおきます．…（中略）…2つの群の間で母集団分散を等しいと仮定するのは，実際の母集団においてそうであるケースが多いからというのではなく，検定や推定の方法を数学的に導くために便宜上，そう仮定されるだけです．ただし，本章で述べる 2 群の平均値差の分析法，およびそれを拡張した 3 群以上の平均値差の分析法（第 9 章で述べる分散分析）は，特に各群の被験者数が大きく異ならない場合，母集団分散の等質性というこの仮定に関してかなり頑健であることがわかっています．つまり，この仮定が満たされていなくても，分析結果が大きく歪むことはないということです．
>
> (pp.157-158)

統計学という学問は，数学的方法学の一種であると捉えられ，それゆえに，統計学それ自身としては，上の引用箇所からもわかるように,「なぜ t 検定という方法は,分散の等質性を仮定するのか？ なぜその仮定が満たされていなくても t 検定が適用可能なのか？」という問いに答える学問である．しかし，ここで大事にしたいことは，統計学を教えるということは，この問いに答えられるようになることを必ずしも意味しない，ということである．事実，上の引用箇所から,「被験者数が概ね同じ 2 群に対しては，分散が等しくない場合でも t 検定が適用可能である」という知識を学ぶことはできるが，上の引用箇所だけからは,「なぜ適用可能なのか？」という問いに対する答えを学ぶことができない．それを学ぶためには，より専門的な文献を参照する必要がある．つまり，統計学を教えるということは，単に統計的方法を事実として教えるということに留まる可能性があり，統計学が本来追究している "why" の答えを学ぶことを含意しない．一般化して述べるならば，数学的方法学を教えることは，単に数学的方法を事実として教えるということに留まる可能性があり，数学的方法学が本来追究している "why" の答えを学ぶことを含意しない．

数学教育に携わる者は，背理法やユークリッドの互除法を学ぶ際のイメージから,「数学的方法を学ぶ」ということは，方法それ自身の学習のみならず，なぜその方法でよいのかを合わせて学ぶことが当たり前だというイメージを持ってしまうかもしない．しかし，一般的に言えば，数学的方法学の学習と数学的方法の学習の境界線は曖昧であるし，同時に，単なる数学的方法の学習であっても，決して否定されるべきものではない．

例えば，心理学で利用するために統計学を学ぶということと，心理学で利用するためにコンピュータの使い方を学ぶということの差異を明確に述べることは難しい．心理学で統計処理を行うにあたって，今どき手計算をするなどということは考えられないから，統計処理もコンピュータ処理も心理学研究の本質的な構成要素である．それらを欠いた状態で心理学研究を遂行することは，実質的に不可能である．こうした状況であるから,「なぜその統計処理でよいのか？」と「なぜそのコンピュータ処理でよいのか？」という 2 つの問いに本質的な差異を見出すことは難しい．研究者が，統計処理の妥当性を統計学に基づいて説明できなければならないのなら，それと同じ理由で，コンピュータ処理の妥当性をコンピュータ理論の基礎（例えば，コンピュータが動く仕組み）に基づいて説明できなければならない．ところが，コンピュータ理論の基礎を踏まえてコンピュータを使用している心理学者などほとんどいないであろうから，これは現実的な要求ではないし，心理学者にそのような知識は期待されてもいないだろう．そうであるならば，同じ理由で，心理学者は統計処理の妥当性を統計学の基礎に基づいて説明することを必要としない，と言えるかもしれない．そうした説明は，専門の統計学者によって与えられてさえいれば十分なのである．南風原（2002）の記述も，その意味で，統計学を教えるための統計学の入門書としては十分な記述がなされているように思われる．

高度に数学化された社会は，かえって市民の脱数学化が生じる（Jablonka & Gellert, 2007)．社会が，高度にブラックボックス化された数学によって支えられている状況を，Skovsmose (2019, 2021) は，数学が危機を形成する力を有しているものとして描き出したが，まさにその通りであって，危機を伴う脱数学化の現象が,数学的方法の普及とともに広がっている.しかし，科学技術の恩恵を受けた我々の生活を，もはや原始時代に戻すことはできないので,こうした危機の形成は，止めることができるわけではない．我々にできることは,ただ,そうした危機の形成を自覚することである．そして，だからこその，社会批判的モデリングの観点での数学教育であった．

こうした議論を踏まえて，方法の学習と方法学の学習の区別を改めて明確に述べておこう．方法の学習とは，方法として how を学ぶことである．方法学の学習とは，その方法の妥当性 why を学ぶことである．方法学を教えることは，一般的には方法の学習に留まる可

能性があり，方法学の学習を必ずしも含意しない．逆に言えば，方法学の学習は，原則として方法の学習を包摂し，方法の学習を批判的に捉えることによってのみ成立する．本稿の提案は，数学的方法学の学習を，数学を親学問とする数学科という教科に，きちんと理論的に位置付けることである．これまでのカリキュラム編成においては,理論的な位置付けが不明確なまま,文章題解決や課題学習を通じて，数学的知識を応用する経験の機会提供が企図されてきた．しかしながら，文章題解決も課題学習も，単なる方法の適用の経験に留まるようであれば，数学的方法の学習に留まる．なぜそれでよいのかを扱わない限りにおいては，数学的方法学の学習にならない．次章では，この点について具体的に論じていくことにしよう．

５．「なぜ」の意味

抽象的な主張として「方法の妥当性 why を学ぶことが重要である」というのは，ほとんど自明な主張であり，数学の授業としては，時間的制約が許す限り，できるだけ丁寧に扱う方がよいに決まっている．また，従前の文章題指導においても，ある文章題の解決に，ある数学的概念が適用可能であることは，きちんと確認をしながら指導されているはずであり，殊更問題とすべきことではないように感じられるかもしれない．しかし，だからこそ我々は次のように理解すべきである．説明を聞いた人間に対してそのような感覚を抱かせることができるという点が，演繹的論証をその基礎とする数学の，まさに本性なのである．

De Villiers (1990) は，証明の機能の 1 つに，「なぜそれが正しいのかについての洞察を与えること」(p. 18) を挙げた．例えば,「1 万個の三角形を調べて，いずれの内角の和も 180° であった」というデータを見せられたとしよう．このとき，そのデータから，三角形の内角の和が多くの場合で 180° になるということはよくわかるかもしれないが，なぜそうなるのかについては，そのデータを眺めているだけでは何も得られないであろう．ところが，平行線の性質に依拠した証明を示されたならば，我々は，平行線の性質が成り立つ以上は，必然的に三角形の内角の和が 180° になるということを直観することができるようになる．論理的必然性を示すことは，同時に，内角の和が 180° ではないような三角形が構成可能であることを否定することになる．

しかし，注意して考えてみると,「なぜどんな三角形も内角の和が 180° であるのか？」(以下，この問いを単に Q とする）と問われたとき，与えられ得る解答には，いくつかのバリエーションが考えられる．実際，「なぜ」という形式の問いの答えは，当該の文脈において暗黙的にどういう対比がなされているかによって変化する（ファン・フラーセン, 1986)．例えば，Q を，「なぜ他の角度ではなく 180° になるのか？」という意味で解釈するとすれば,「平角が 180° だから」という解答になる．あるいは，Q を,「なぜ特別な三角形だけでなく，どんな三角形でも成り立つのか？」と解釈するとすれば，例えば,「△ABC がどんな三角形であったとしても，底辺 BC に平行で点 A を通る直線を引くことができるから」という解答になるであろう．

De Villiers (1990) の指摘で重要なことは，証明の機能が，なぜそれが正しいのかについての洞察を与えるという点にあり，証明が「なぜそれが正しいのか」についての直接的な解答を与えてくれるわけではないということである．この洞察の提供は，もちろん証明の肯定的な機能なのだが，否定的な言い方をすれば，なぜそれが正しいのかについての洞察を与えてしまうがゆえに，なぜそれが正しいのかを実際に問う機会を奪う役割を有している，ということもできる．De Villiers (1990) が証明の第一の役割としても挙げているように，証明は「正当化」に主たる役割がある．数学者は，命題が正しいかどうかに疑義を向ける他の数学者を説き伏せるために証明を書くわけであるから，証明が,「その命題はなぜ正しいのか？」という疑問の余地を挟ませないような構成になっているのは，ある意味では自然なことであろう．

これは，文章題解決の場合も同じである．例えば，次のような問題を考えてみよう．

> 1km の道のりを，初めの何分かは分速 200m で走って移動し，残りは分速 80m で歩いて移動する．8 分以内に移動したいとき，最初に何分以上走るべきか？

この問題の解答は，例えば次のようになる．

> 最初に x 分以上走るとすると，
> $$x+\frac{1000-200x}{80} \leqq 8$$
> であるから，これを解いて，
> $$x \geqq 3$$
> これは問題に適した解であるから，最初に 3 分以上走ればよい．

これは，文章題を一次不等式の問題だと解いた場合の解法である．必要に応じて，$\frac{1000-200x}{80}$ が何を意味し

ているかなどを細かく説明したり，不等式を解く過程を細かく説明したりする必要はあるかもしれないし，1 点だけ，解の吟味をしている部分だけは演繹的とは言えない (石橋 & 上ヶ谷, 2019 参照) が，解答としては概ね演繹的に記述されている. しかし, だからこそ，問題が解けてしまった後は, 解法として why を問うことなく納得してしまうという問題がある.

本稿の主張,「方法の妥当性 why を学ぶことが重要である」を，この文章題解決の場合において体現するとすれば，次が問われなければならない.「なぜこの文章題の解決において，1 次不等式の利用が妥当であったのか？」と.

ここでは，特に「なぜこの文章題の解決は，他の方法ではなくて 1 次不等式の利用が妥当なのか？」を考えてみよう．例えば，次のような考え方もあり得る.

> 最初に x 分走った場合に 8 分ちょうどで移動できるとすると，
> $$200x + 80(8 - x) = 1000$$
> であるから，これを解いて，
> $$x = 3$$
> 走る時間を長くすれば長くするほど早く着くわけであるから, 3 分以上走れば, 8 分以内に移動できる.

8 分「以内」をきちんと数学的にモデル化しようと思えば，1 次不等式が必要であるが，計算の利便性を考えると, 1 次方程式で立式した方が簡単な式になる. また，方程式を持ち出すまでもなく，勘で「3 分くらい走ったら合計移動時間は 8 分かな？」と予想して，後からその 3 分の妥当性を説明するという方法もあり得る．数学の試験でない限り，問題解決という観点でわざわざ 1 次不等式を持ち出す必要はないことがわかる．そのため，なぜ他の方法ではないのかという問いに対しては，他の方法でもよい，という結論が得られる.

対比先を変えて,「他の問題では妥当ではなかったかもしれないのに，なぜこの文章題の解決においては，1 次不等式の利用が妥当であったのか？」についても考えてみよう．そうすると，1 次不等式が有効でないような類似の文章題は何かを考える必要性が生じる. 例えば，分速 200m で走っていたところから，一瞬で変速して分速 80m で歩き始めるという前提があるからこそ，上記の立式が意味をなすということが見えてくる．走る場合と歩く場合で，それぞれ等速運動をしていることが，この文章題に隠された暗黙的な仮定である.

文章題の設定が非現実的であるという点を批判的に考えて，1km の道のりを急いで移動するとき,「走る道のりと歩く道のりがそんなに綺麗に分かれるのか？」と考えることもできよう. 少し走っては疲れて歩いて，また少し走って……を繰り返すかもしれない. しかし，この点については，走る合計時間と歩く合計時間が決まっていれば，1km の中で走る区間と歩く区間が交互に何度現れても，1 次不等式を利用することの妥当性が損なわれないことがわかる.

あるいは,「1 次不等式と 1 次方程式を直接対比して, なぜ 1 次不等式の解き方は計算が複雑なのか？ (1 次方程式の解き方は計算が簡単なのか？)」と問うこともできよう．このように考えると，問題の解釈が立式の複雑性を決めており，方程式か不等式かが問題ではないことがわかる．すなわち，

> 最初に x 分走ったとして，8 分ちょうどで 1km 以上移動できるなら, 1km を 8 分以内に移動したことになるから，
> $$200x + 80(8 - x) \geqq 1000$$

このように立式することができれば，1 次不等式か 1 次方程式かという方法の選択は，実は本質的な問題ではないことがわかる.

では，方程式と不等式はいつでも交換可能な解法なのかと言えば, もちろん, まったくそんなことはない. 問題が，例えば次のようになると，途端に方程式は役に立たなくなる.

> 1km の道のりを, 初めの何分かは分速 200m で走って移動し，次の何分かは分速 150m で走り，残りは分速 80m で歩いて移動する. 8 分以内に移動したいとき，最初に何分以上走るべきか？

解集合が複雑になる 2 変数の問題においては，不等式で立式しなければ，制約条件の記述として無意味である.

問題解決の過程を，単に解けたという事実に目を向けて振り返った場合，数学的方法の学習に留まってしまう可能性がある．しかし，その数学的方法では解けないような類題を考えたり，他の数学的方法と比較してどの方法がどんな条件下でどのような利点を有するかを考えたりすることは，数学的方法学の学習に繋がる.

このとき注意すべきは，数学的方法学の学習は，その知識の真理性を演繹的に正当化できないことがある点であろう．2 次方程式の解の公式がどんな 1 変数 2 次方程式に対しても有効な公式であることは，数学的に証明することができるが，1 次不等式を用いた解決が，どんな日常的問題や社会的問題に有効であるかを

一般的に述べることはできない．ただ，述べることができないからといって議論する価値がないわけではない. 社会批判的モデリングの視座を念頭に置くならば，ある数学的な考え方が利用できる問題を扱った際は，その考え方が他のどんな類題への応用が有用かと，他のどんな類題への応用が有用でないかをあわせて扱うことが重要である．それによって，数学的方法の学習が数学的方法学の学習になる．

有用でない場合は，限定された具体例しか扱えないかもしれないが，どのみち有用である場合も，限定された具体例しか扱えないわけであるから，どちらも事情は同じである．有用でない場合を同時に扱うことの意義は，一見するとよく似た 2 つの問題であっても，ある数学的方法が有効に応用される場合とされない場合があるということを学ぶことである．これは，日常的な問題や社会的な問題へ数学的方法を応用するということは，適用条件を満たす問題場面にアルゴリズムを適用するということとは区別されるということを学ぶことに等しい．言うなれば，日常的な問題や社会的な問題へある数学的方法を応用してよいかどうかは，たとえ以前とよく似た問題場面であったとしても，毎回毎回慎重に適用してよいかどうかの吟味を経て決定すべき問題だということである．数学的方法学の指導としては，この点が重要になる．

６．結論

本稿は，親学問を基軸としたカリキュラム設計の理論的枠組の内部では，数学科の責任範囲として，数学的方法の学習を取り扱うことが理論的にできない点を指摘した．本稿では，応用数学や統計学のように，なぜその数学的方法は妥当であるのかを追究する学問を「数学的方法学」と総称することとし，数学的方法の学習ではなく，数学的方法学の学習が，数学科のカリキュラムに位置付くことを論じた．例えば,「被験者数が概ね同じ 2 群に対しては，分散が等しくない場合でも t 検定が適用可能である」という統計学的な知識を学ぶことは，数学的方法を学んでいるに過ぎず，どんなときになぜ適用可能で，どんなときになぜ適用不可能であるかを事例的に学ぶことまで行わなければ，数学的方法学の一種として統計学を学んだことにはならない．本稿冒頭で取り上げたクラス代表選の問題にしても，どういう問題設定であれば一次不等式が有効であり，どういう問題設定であれば一次不等式が有効でないかを合わせて議論する授業構成にして初めて，数学的方法学の学習となる．

本稿では，社会批判的モデリングの視座を重視する立場から，特に日常的な事象や社会的な事象を数学的に捉える場合を念頭に置いた考察を展開した．理科や技術科，情報科，理数科で扱われているような事象に対して数学的方法を応用する場合も，基本的には本稿の主張が当てはまると予想されるが，詳細な検討は稿を改める必要があるであろう．

ただし，科学一般に話を広げる場合は，数学的方法学ではなく，科学的方法学をその考察の射程に入れなければならないと思われる．科学の科学，すなわち，「メタ科学」として，情報学の可能性が既に指摘されており，Wing (2006) の Computational thinking 論が情報学教育の要になると考えられている（山崎, 2015)．数学教育における Computational thiking 論も少しずつ展開されては来ている (上ヶ谷 et al., 2019; 影山 et al., 2020) が，まだ考察が始まったばかりであり，今後，情報学の動向を踏まえた関連性の検討が重要になるであろう．

また，本稿は，カリキュラムに位置付ける理論的根拠を得るという着眼点で考察を始めたが，得られた結論は，数学的方法の適用条件を考えるという視点であった．これは，条件節の明示化を重視する推論主義研究の結論に通じる（上ヶ谷 et al., 印刷中；杉田, 2016）ところがあり，理論的統合の可能性が示唆される．この点も合わせて今後の課題として示しておきたい．

付記

本稿の一部は，JSPS 科研費 20K22188, 21K13587, and 21K02470 の助成を受けた研究成果に基づいている．

注

1) 学習指導要領の法的性格を踏まえると，学習指導要領の著者を文部科学省として便宜上，文部科学省を著者として

引用および参考文献

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (2020). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, *12*(1), 53–65. https://doi.org/10.1080/19477503.2019.1595360

Araújo, J. de L., & Campos, I. da S. (2015). Negotiating the Use of Mathematics in a Mathematical Modelling Project. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 283–292). Springer International Publishing.

https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_23
Bakker, A. (2018). What is design research in education? In A. Bakker (Ed.), *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers* (pp. 3–22). Routledge.
Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554
Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: A socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, *38*(3), 293–301. https://doi.org/10.1007/BF02652812
Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling* (pp. 222–231). Woodhead Publishing. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221
Czocher, J. A. (2017). Mathematical Modeling Cycles as a Task Design Heuristic. *The Mathematics Enthusiast*, *14*(1–3), 129–140.
Czocher, J. A. (2018). How does validating activity contribute to the modeling process? *Educational Studies in Mathematics*, *99*(2), 137–159. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9833-4
de Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17–24.
Deng, Z. (2007). Knowing the subject matter of a secondary-school science subject. *Journal of Curriculum Studies*, *39*(5), 503–535. https://doi.org/10.1080/00220270701305362
Deng, Z. (2012). School subjects and academic disciplines. In A. Luke, K. Weir, A. Woods, & M. Moroney (Eds.), *Curriculum, syllabus design and equity: A primer and model* (pp. 40–53). Routledge.
Grossman, P. L., & Stodolsky, S. S. (1995). Content as Context: The Role of School Subjects in Secondary School Teaching. *Educational Researcher*, *24*(8), 5–23. https://doi.org/10.2307/1176887
Jablonka, E., & Gellert, U. (2007). Mathematisation and demathematisation. In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and Demathematisation: Social, Philosophical and Educational Ramifications* (pp. 1–18). Sense Publishers. http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2:993715
Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modelling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 267–291). National Council of Teachers of Mathematics,U.S.
Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004
Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-017-3556-8
Skovsmose, O. (2006). Research, practice, uncertainty and responsibility. *The Journal of Mathematical Behavior*, *25*(4), 267–284. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.002
Skovsmose, O. (2019). Crisis, Critique and Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *35*.
Skovsmose, O. (2021). Mathematics and crises. *Educational Studies in Mathematics*. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10037-0
Stengel, B. S. (1997). “Academic discipline” and “school subject”: Contestable curricular concepts. *Journal of Curriculum Studies*, *29*(5), 585–602. https://doi.org/10.1080/002202797183928
Uegatani, Y., Ishibashi, I., & Hattori, Y. (2020). Role of probability in socio-critical modelling. *JSSE Research Report*, *35*(3), 43–48. https://doi.org/10.14935/jsser.35.3_43
Villa-Ochoa, J. A., & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 241–250). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19
Vos, P. (2015). Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct. In G. A. Stillman, W. Blum, & M. Salett Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* (pp. 105–113). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_8
Vos, P. (2018). “How Real People Really Need Mathematics in the Real World”—Authenticity in Mathematics Education. *Education Sciences*, *8*(4), 195. https://doi.org/10.3390/educsci8040195
Weiss, M., Herbst, P., & Chen, C. (2009). Teachers’ perspectives on “authentic mathematics” and the two-column proof form. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(3), 275–293. https://doi.org/10.1007/s10649-008-9144-2
Wing, J. M. (2006). Computational Thinking. *Commun. ACM*, *49*(3), 33–35. https://doi.org/10.1145/1118178.1118215
石橋一昴, & 上ヶ谷友佑. (2019). 「数学的モデル化の観点から見た学習者の解の吟味を支援する教材の条件：方程式の文章題を中学２年生が解決する過程の分析を通じて」．日本科学教育学会誌『科学教育研究』, *43*(4), 333–344.

上ヶ谷友佑, 青谷章弘, & 影山和也. (2019).「数学教育研究における研究対象としての Computational Thinking : 数学的思考との相互依存的発達について」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *25*(2), 101–111.

上ヶ谷友佑, 白川晋太郎, 伊藤遼, & 大谷洋貴. (2021).「推論主義に基づく数学的タスクデザインの原理の開発：複素数係数の 2 次方程式に関する数学的タスクを具体例として」. *『日本科学教育学会第 45 回年会論文集』*. 535-538.

影山和也, 上ヶ谷友佑, & 青谷章弘. (2020).「リテラシーとしての Computational Thinking 論 —Computation の意義と学校数学教育の役割—」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, *26*(1), 29–41.

佐藤学. (1992).「「パンドラの箱」を開く＝「授業研究」批判」. In *『教育学年報 1 教育研究の現在』* (pp. 63–88). 世織書房.

佐藤学. (2005). 「教職専門職大学院のポリティクス：専門職化の可能性を探る」. 現代思想, *33*(4), 98–111.

佐藤学. (2016). 「教科教育研究への期待と提言」. 『教科教育学研究』, *38*(4), 85–88.

杉田浩崇. (2016).「R. ブランダムの明示化プロジェクトとその教育学的意義 : 条件文を用いた行為理由の明示化と人間形成」. 『愛媛大学教育学部紀要』, *63*, 49–65.

ファン・フラーセン B. C. (1986). *科学的世界像* (丹治信春, Trans.).

南風原朝和. (2002). *『心理統計学の基礎—統合的理解のために』*. 有斐閣.

文部科学省. (2018). *『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説 数学編 理数編』*.

山崎謙介. (2015). 「メタサイエンスとしての情報学とその教育」. 『情報処理』, *56*(10), 1008–1011.