

論文審査の要旨

博士の専攻分野の名称	博 士 (理 学)	氏名	吉田 雄亮
学位授与の要件	学位規則第 4 条第 ①・2 項該当		
論文題目			
Projective plane curves whose automorphism groups are simple and primitive (原始的単純群を自己同型群に持つ射影平面曲線)			
論文審査担当者			
主 査	准教授	高橋 宣能	
審査委員	教 授	井上 昭彦	
審査委員	教 授	木村 俊一	
審査委員	教 授	島田 伊知朗	
〔論文審査の要旨〕			
<p>本論文は、複素数体上の非特異射影平面代数曲線の自己同型群として実現されうる群として分類されたもののうち、原始的かつ単純なもの G について、G を自己同型群に含む非特異曲線の次数、および既約かつ被約な曲線の次数を決定したものである。</p> <p>代数曲線の自己同型群の分類は古典的なトピックであり、Hurwitz による基礎的な仕事以来、さまざまな場合に研究がなされている。4 次以上の非特異な射影平面代数曲線(以下、平面曲線)については、その自己同型は一意的に平面の射影線形変換に拡張されるので、自己同型群は平面の射影変換群の部分群と同一視できることが知られていたが、近年、春井氏によって複素数体上で 4 次以上の非特異平面曲線の自己同型群が分類された。この結果を受け、各次数で実際に現れる群を調べるというのが一つの方向であり、5 次や 6 次の非特異平面曲線の自己同型群の決定などの研究が進展している。</p> <p>これに対して本論文では、与えられた群に対してそれを自己同型群に含む曲線がどのような次数において存在するか、という視点から研究を行なっている。まず、群としては、射影変換群 $PGL(3, \mathbf{C})$ の原始的部分群とよばれるもののうち、単純なもの G を考えている。これはより低い次元の射影変換群の部分群に帰着できないものと言え、ある意味で最も興味深い場合である。そのようなものとしては位数 360 の Valentiner 群 V、位数 60 の正二十面体群 I、位数 168 の Klein 群 K があるが、それぞれに対して、本論文では、それを自己同型群に含む非特異曲線・既約かつ被約な曲線の次数を、次のように完全に決定している。まず、非特異曲線については以下の通りである。</p> <ul style="list-style-type: none"> ● V を自己同型群に持つ d 次非特異平面曲線が存在するのは $d \equiv 0, 6, 12 \pmod{30}$ のときである。 ● I を自己同型群に含む d 次非特異平面曲線が存在するのは $d \equiv 0, 2, 6 \pmod{10}$ のときである。 ● K を自己同型群に持つ d 次非特異平面曲線が存在するのは $d \equiv 0, 4, 6 \pmod{14}$ のときである。 <p>また、既約かつ被約な曲線については以下の通りである。</p>			

- V を自己同型群に含む d 次の既約かつ被約な平面曲線が存在するのは d が 6 の倍数で $18, 24$ と異なるときである。
- I を自己同型群に含む d 次の既約かつ被約な平面曲線が存在するのは d が 2 の倍数で $4, 8, 14$ と異なるときである。
- K を自己同型群に含む d 次の既約かつ被約な平面曲線が存在するのは d が 2 の倍数で $2, 8, 12, 16, 22$ と異なるときである。

これらの証明のため、本論文では、まず $G=V, I, K$ の線形変換群 $GL(3, \mathbf{C})$ への持ち上げ G' であって、 G で不変なものが G' に関する不変式で定義されているものが存在する、という事実を示している。このような不変式については古典的な不変式論において詳しく調べられているが、現代的な文献は豊富でないため、本論文では不変式の性質について計算機代数システム SINGULAR を用いた確認を行なっている。

これによって各次数の不変曲線のなす線形系の記述が得られるので、非特異な不変曲線の存在については、線形系の基点での様子を調べ、Bertini の定理を用いることにより結論が得られる。

既約かつ被約な場合については、まず線形系の一般元の特異点を調べ、既約かつ被約でないとする成分の間の交点の特異点になっていることから特異性が(多くの場合)大き過ぎることになり矛盾する、という興味深い議論を用いている。

以上のように、本論文は、ある形の自己同型群を持つ射影平面曲線の次数を求めるという問題に、明確な解答を与えるものである。また、この結果により存在が明らかになった不変曲線について、より詳しい性質を調べることは興味深い問題である。用いられている手法についても、他の群の場合や特異点を指定した場合などに一般化が可能であると考えられる。

以上、審査の結果、本論文の著者は博士（理学）の学位を授与される十分な資格があるものと認める。

公表論文

Yusuke Yoshida, Projective plane curves whose automorphism groups are simple and primitive, *Kodai Mathematical Journal* に掲載決定。