学位論文要旨

Projective plane curves whose automorphism groups are simple and primitive
（原始的単純群を自己同型群に持つ射影平面曲線）

吉田　雄亮

代数曲線の自己同型群というテーマは古くから研究されてきた。例えば、複素数体上の射影平面曲線に対する基本的な結果として「4次以上の非特異平面曲線の自己同型射は射影平面$\mathbb{P}^2$の自己同型射に一意に延長される」ということが知られている。このことに加えて、射影平面の自己同型群$\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^2$は射影一般線形群$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$と同型であるから、非特異平面曲線$C$の自己同型群$\mathrm{Aut}\,C$は$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$に埋め込まれることがわかる。

また、平面曲線に限らず、射影代数曲線の自己同型群の位数の上界は詳しく調べられている。19 世紀末には Hurwitz が、コンパクトな Riemann 面の自己同型群の位数の上界を、Riemann-Hurwitz の公式を用いることにより与えた。この結果により非特異曲線の自己同型群の位数の上界が種数ごとに得られる。その後、及川氏や荒川氏によってより強い上界も与えられている。

このような結果を踏まえ、近年、春井氏は複素数体上の非特異平面曲線Cの自己同型群$\mathrm{Aut}\,C$を分類する定理を与えた（[1]）。具体的には、自己同型群$\mathrm{Aut}\,C$の部分群Gは以下のいずれかを満たすという主張である：(a)射影平面の自己同型群として平面上の点を固定する、(b)組(C,G)が特定の曲線の“descendant”である、(c) $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$の原始的(primitive)な有限部分群である。この分類により非特異平面曲線の自己同型群として現れるような群がどのようなものか明らかになった。さらに、分類ごとに現れる群を詳しく調べることにより自己同型群の位数の上限などについての結果も得られている。

分類の結果を受けて、逆に$\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$の部分群$G$を固定したとき、自己同型群が$G$となる平面曲線はどのようなものであるか、ということが問題になる。分類の(a)に含まれる群については、Galois 点の研究に関連し、対応する曲線も含め活発に研究されている。また、(b)の場合のある特定の曲線とは Fermat 曲線と Klein 曲線のことであり、“descendant”という性質によりこれらの曲線とCは関係が深いことがわかる。

そこで本論文では、(c)の分類に含まれる群のうち単純な群Gの場合について考察を行った。このときGは、交代群$\mathfrak{A}_5$や$\mathfrak{A}_6$に同型であるような正二十面体群$\mathcal{I}$あるいは Valentiner 群$\mathcal{V}$、また Klein 群とよばれることもある$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{F}_7)$と同型な群$\mathcal{K}$、のいずれかに共役である。本論文では、これらの群を自己同型群に持つような非特異平面曲線の次数を決定した。すなわち、次のような主定理を与えた。

定理１

(1) $\mathcal{V}$を自己同型群に持つd次非特異射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
$d \equiv 0, 6, 12 \bmod 30$ が成り立つことである。

(2) $\mathcal{I}$で不変なd次非特異射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
$d \equiv 0, 2, 6 \bmod 10$ が成り立つことである。

(3) $\mathcal{K}$を自己同型群に持つd次非特異射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
$d \equiv 0, 4, 6 \bmod 14$ が成り立つことである。

より一般に「既約かつ被約」の場合についても考察を行い、次のような結果を得た。

定理２

(1) $\mathcal{V}$で不変な既約かつ被約なd次射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
dが18と24以外の6の倍数であることである。

(2) $\mathcal{I}$で不変な既約かつ被約なd次射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
dが4，8，14以外の偶数であることである。

(3) $\mathcal{K}$で不変な既約かつ被約なd次射影平面曲線が存在するための必要十分条件は
dが2，8，12，16，22以外の偶数であることである。

手法について述べる。$\mathfrak{A}_5$、$\mathfrak{A}_6$、$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{F}_7)$については、鏡映群として 19 世紀の末から研究が盛んに行われており、特に不変式環の記述が与えられている。不変曲線は、一般には不変式により定義されているとは限らず、いわゆる半不変式により定まる場合もあるが、Gが原始的単純群である場合には、適当な持ち上げ$\tilde{G} < GL(3, \mathbb{C})$を取ることにより、$G$で不変な曲線がすべて$\tilde{G}$の不変式から得られることが示される。

そこで、群Gで不変なd次曲線の線形系$(\mathfrak{d}_G)_d$が考えられる。$G = \mathcal{V}$，$\mathcal{I}$，$\mathcal{K}$のそれぞれについて、既約かつ被約な曲線が存在すればdは偶数であり、またdが偶数であれば線形系$(\mathfrak{d}_G)_d$の元はある3つの不変式F_G，Φ_G，Ψ_Gを用いた斉次式で定義される。線形系の基点における特異性は、これらの不変式の次数とdに関する合同式を用いて調べることができる。この条件の読み替えと Bertini の定理を用いることにより、定理 1 を得ることができる。

既約かつ被約の場合については、まず被約性は非特異の場合と同様に調べることができる。この場合、非特異な元が存在しない次数dにおいて、既約な元を与えればよい。このとき、一般の元の特異点の集合およびその型を調べることができる。そこで、可約であると仮定すると、局所交点数の計算から矛盾が導かれ、一般の元は既約であることがわかる。これが定理 2 の証明の概要である。

参考文献

[1] T. Harui, Automorphism groups of smooth plane curves, Kodai Math. J. **42** (2019), no. 2, 308-331.